UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

Dinámica de Funciones Inducidas entre Productos Simétricos

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN MODELACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA:

LIC. VICTOR MANUEL GRIJALVA ALTAMIRANO

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. FRANCO BARRAGÁN MENDOZA

CO-DIRECTOR DE TESIS:

Dr. JESÚS FERNANDO TENORIO ARVIDE

HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA, FEBRERO DEL 2016

Dedico este trabajo a:

A mis padres
Virgen Altamirano Guerra
Gabriel Grijalva Santos

A mis hermanos
Yuridia y Luis Edgar

A mi inspiración
Rosa María Gutierrez Apolonio

Agradecimientos

Agradezco a Dios por darme el regalo de la vida, por darme la oportunidad de conocer a todas las personas que me han hecho crecer como matemático y persona.

Agradezco a mis padres que a lo largo de mi carrera me brindaron su apoyo emocional y con esfuerzo solventaron mis gastos en la universidad.

Agradezco a mis sinodales por hacerme las debidas observaciones y así poder mejorar este trabajo. Extiendo mi gratitud al Dr. Jesús Fernando Tenorio Arvide, por sus multiples sugerencias y por ser un maestro quien siempre exigió un alto nivel académico.

Finalmente agradezco a mi director de tesis, al Dr. Franco Barragán Mendoza, pues con su ayuda he obtenido esta tesis y ha contribuido de forma incomparable a mi formación como matemático.

Prefacio

La temática de la tesis se encuentra dentro de las ramas de la matemática conocidas como topología y sistemas dinámicos. En varios fenómenos de la naturaleza el movimiento de los objetos juega un papel imprescindible. La parte de la matemática que se encarga del estudio del movimiento de los objetos y su evolución a través del tiempo se le llama sistemas dinámicos. Así, de manera intuitiva, un sistema dinámico es un fenómeno de la naturaleza, un sistema físico o un espacio de puntos, cuyo estado evoluciona con el tiempo mediante una ley determinada. Si el tiempo se considera o se mide en lapsos, se dice que es un sistema dinámico discreto. Por otra parte, además de considerar la dinámica de los objetos, podemos analizar su comportamiento respecto a la cercanía o acumulación entre estos o respecto a ciertos conjuntos, interviniendo de esta forma la topología. En este sentido, sean X un espacio métrico y $f : X \to X$ una función continua. Dado $k \in \mathbb{N}$, la k-ésima iteración de f se define como la composición de f consigo misma k veces y se denota por f^k. Considerando un punto $x \in X$, la órbita del punto x bajo f, denotada por $\mathcal{O}(x, f)$, es la sucesión $\{x, f(x), f^2(x), \ldots, f^k(x), \ldots\}$. Así, la órbita $\mathcal{O}(x, f)$ representa el movimiento de un objeto, cuya interpretación es como sigue: en el tiempo $t = 0$, un objeto se encuentra en la posición x; en el tiempo $t = 1$ el objeto ha cambiado de posición y ahora se encuentra en la posición $f(x)$; en el tiempo $t = 2$ el objeto ha cambiado nuevamente de posición y ahora se encuentra en $f^2(x)$; y así sucesivamente. En tal caso se dice que se analiza la dinámica individual o puntual. De esta manera, la pareja formada por X y f proporcionan un modelo matemático del movimiento, esto es, proporcionan un sistema dinámico discreto, que denotamos por (X, f), cuyo comportamiento depende tanto de f como de X. Así, es importante estudiar las propiedades dinámicas de la función f.

En la literatura es común encontrar el estudio sólo de la dinámica individual o puntual. Sin embargo, en matemáticas y en varios fenómenos de la naturaleza se tiene la necesidad de tener una noción en cuanto a la dinámica de un subconjunto, lo cual motiva a estudiar las propiedades dinámicas en hiperespacios de continuos. Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Dado $n \in \mathbb{N}$, consideremos el hiperespacio de X conocido como el n-ésimo producto simétrico de X y definido por:

$$\mathcal{F}_n(X) = \{A \subset X : A \neq \emptyset \text{ y tiene a lo más } n \text{ puntos}\},$$

con la métrica de Hausdorff.

La función f induce la función $F_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ definida por $F_n(f)(A) = f(A)$, para cada $A \in \mathcal{F}_n(X)$. De esta forma el sistema dinámico discreto (X, f) induce el sistema dinámico discreto $(\mathcal{F}_n(X), F_n(f))$. En consecuencia, dado $A \in \mathcal{F}_n(X)$, analizar la órbita $\mathcal{O}(A, F_n(f))$ es estudiar la dinámica colectiva.

El objetivo del trabajo de tesis es estudiar la relación que existe entre la dinámica puntual y la dinámica colectiva. Cabe señalar que el primer trabajo que se realiza para estudiar la relación entre estas dos dinámicas fue realizado por W. Bauer y K. Sigmund en 1975 [7]. Sin embargo, en los últimos años este tema ha despertado el interés de varios investigadores, obteniendo varios resultados al respecto, por ejemplo en: [1], [8] y [10].

Para lograr tal objetivo, este trabajo lo hemos distribuido de la siguiente manera.

En el Capítulo 1, realizamos una breve introducción a los espacios métricos, principalmente para familiarizarnos con algunos conceptos y algunas notaciones que son utilizados a lo largo de la tesis. Al final de este capítulo, damos la definición de lo que es un continuo y algunas propiedades. En particular nos enfocamos en las propiedades del continuo producto simétrico, el cual es el hiperespacio donde trabajaremos en el Capítulo 5.

En el Capítulo 2, damos una breve introducción a los sistemas dinámicos, con la finalidad de familiarizarnos con algunos conceptos y algunas notaciones que son utilizados en los Capítulos 3, 4 y 5. Empezamos este capítulo con los sistemas dinámicos discretos, luego, nos enfocamos en los sistemas dinámicos unidimensionales y analizamos algunos ejemplos. Para terminar este capítulo, estudiamos dos tipos de funciones continuas: las transitivas y las caóticas.

En el Capítulo 3, analizamos algunos problemas relacionados con el crecimiento de poblaciones que se pueden modelar mediante sistemas dinámicos discretos, específicamente, estudiamos: el Modelo de Malthus, modelos con crecimiento restringido (Logístico, de Beverton y de Ricker) y algunos modelos lineales. Analizamos y formalizamos la parte matemática y, además, proporcionamos ejemplos.

En el Capítulo 4, estudiamos varios tipos de funciones dinámicas. En la Sección 4.1 estudiamos las funciones exactas, mezcladoras, débilmente mezcladoras y totalmente transitivas. En la Sección 4.2 estudiamos las funciones fuertemente transitivas, minimales, irreducibles y semi-abiertas. En ambas secciones vemos algunos ejemplos y algunas relaciones entre ellas. En la Sección 4.3 estudiamos a la conjugación topológica y analizamos la relación que hay entre algunas funciones de las Secciones 4.1 y 4.2 con las funciones conjugadas.

En el Capítulo 5, estudiamos la relación que existe entre la dinámica puntual y la dinámica colectiva. Para lo cual se analiza el siguiente problema: Sea $\mathcal{M}$ alguna de las siguientes clases de funciones: Transitivas, mezcladoras, débilmente mezcladoras, totalmente transitivas, fuertemente transitivas, minimales, irreducibles, sensibles a las condiciones iniciales, caóticas o semi-abiertas. Hallar la relación que existe entre las dos proposiciones siguientes:

a) $f \in \mathcal{M}$,

b) $F_n(f) \in \mathcal{M}$.

En la tesis se ha hecho un estudio, dentro de lo posible, sobre la dinámica colectiva del producto simétrico. Por tal motivo organizamos y presentamos un texto que sirva como referencia para adentrarse en el estudio de dicho tema.

Esperamos que el lector encuentre interesante, comprensible y útil la tesis aquí expuesta.

Índice general

Capítulo 1

Conceptos en espacios métricos

En este capítulo introducimos las notaciones, los conceptos y los resultados que utilizamos para el desarrollo de nuestro trabajo. Las demostraciones de los teoremas de esta capítulo se pueden consultar en [11], [14] y [12]. En este capítulo sólo se demostraron los teoremas que no son muy conocidos o que son de mucha utilidad en nuestro trabajo.

1.1. Notaciones y conceptos básicos

En esta sección hablaremos del ínfimo y del supremo de un conjunto, siempre y cuando existan. El conjunto de los números reales lo hemos denotado como $\mathbb{R}$, al conjunto de los números reales positivos lo hemos denotado como $\mathbb{R}^+$, al conjunto de los números naturales lo hemos denotado como $\mathbb{N}$, al conjunto de todos los números enteros lo hemos denotado como $\mathbb{Z}$, al conjunto de todos los números complejos lo hemos denotado como $\mathbb{C}$ y al conjunto de todos los números irracionales lo hemos denotado como $\mathbb{I}$. Designamos a los conjuntos con letras mayúsculas: $A, B, C, \ldots, Z$. El conjunto vacío es denotado por $\emptyset$. En todo el trabajo de la tesis, la unión y la intersección entre conjuntos serán denotadas por $\cup$ y $\cap$, respectivamente. Las familias de conjuntos las denotamos por medio de letras caligráficas mayúsculas: $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$,... la unión y la intersección sobre familias de conjuntos las denotamos por $\bigcup$ y $\bigcap$, respectivamente. Además, dado un espacio métrico X, X^n denota el producto de X por sí mismo n veces. Dada una función $f : A \to B$ y $C \subset A$, la restricción de f al conjunto C la denotamos por $f\mid_C$.

Definición 1.1.1. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$. Se dice que A es:

1. *Acotado superiormente* si existe un número $M \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq M$, para todo $a \in A$. Al número M se le llama cota superior de A.

2. *Acotado inferiormente* si existe un número $m \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq a$, para todo $a \in A$. Al número m se le llama cota inferior de A.

3. *Acotado* si está acotado superior e inferiormente.

Definición 1.1.2. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$.

1. Se dice que un número $\alpha \in \mathbb{R}$ es *el supremo* de A y se escribe $\alpha = \sup(A)$, si verifica:
   a) α es cota superior de A;
   b) si μ es cota superior de A, entonces $\alpha \leq \mu$.

2. Se dice que un número $\beta \in \mathbb{R}$ es el *ínfimo* de A y se escribe $\beta = \text{ínf}(A)$, si verifica:
   a) β es una cota inferior de A;
   b) Si μ es una cota inferior de A, entonces $\mu \leq \beta$.

Recordemos el Axioma del supremo:

Axioma 1.1.3. Si S es un conjunto no vacío acotado superiormente en $\mathbb{R}$, entonces S tiene supremo en $\mathbb{R}$.

La demostración del siguiente resultado puede consultarse en [3, pág. 31].

Teorema 1.1.4. Si S es un conjunto no vacío acotado inferiormente en $\mathbb{R}$, entonces S tiene ínfimo en $\mathbb{R}$.

Se conoce bien que si el supremo y el ínfimo existen, entonces son únicos. Además, si $A \subset \mathbb{R}$ con A acotado y no vacío, entonces $\inf(A) \leq \sup(B)$.

Teorema 1.1.5. Sean A y B dos subconjuntos acotados no vacíos de números reales. Se sigue que:

1. $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$.

2. $\inf(A \cup B) = \min\{\inf(A), \inf(B)\}$.

Demostración.
Sólo probaremos la parte 1. Sea $\alpha = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$. Primero veamos que α es cota superior de $A \cup B$. Sea $x \in A \cup B$. Luego, $x \in A$ o $x \in B$. Si $x \in A$, entonces $x \leq \sup(A)$. Si $x \in B$, entonces $x \leq \sup(B)$. Por lo tanto, $x \leq \max\{\sup(A), \sup(B)\} = \alpha$. Ahora veamos que α es la mínima cota superior de $A \cup B$. Supóngase que β es una cota superior de $A \cup B$. Entonces $x \leq \beta$, para cada $x \in A$ y cada $x \in B$. Note que $\sup(A) \leq \beta$ y $\sup(B) \leq \beta$. Así, $\alpha \leq \beta$. Por lo tanto, $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$. De forma similar se prueba la parte 2 de este teorema. $\square$

Las demostraciones de los siguientes resultados pueden consultarse en [9, pág. 3].

Teorema 1.1.6. Sean A y B subconjuntos acotados no vacíos de números reales tales que $A \subset B$. Entonces: $\inf(B) \leq \inf(A) \leq \sup(A) \leq \sup(B)$.

Teorema 1.1.7. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$ no vacío y acotado inferiormente. Si $\epsilon > 0$ e $\inf(A) < \epsilon$, entonces existe $a \in A$ tal que $a < \epsilon$.

1.2. Espacios métricos y propiedades

En esta sección hablaremos sobre algunas propiedades en espacios métricos tales como: precompacidad, compacidad, completez, etc. Las demostraciones de los resultados estudiados en esta sección pueden consultarse en [11] y [12].

Definición 1.2.1. Sea X un conjunto no vacío. Una *métrica* en X es una función $d : X \times X \to [0, \infty)$ que posee las siguientes propiedades:

1. Para todo $x, y \in X$, $d(x, y) \geq 0$.

2. Para todo $x, y \in X$, $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

3. Para todo $x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$.

4. Para todo $x, y, z \in X$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

El par (X, d), constituido por el conjunto X y la métrica d definida sobre X, se denomina *espacio métrico*.

Por lo general a una métrica d sobre un conjunto X también se le llama distancia sobre X, además si $x, y \in X$, al número $d(x, y)$ se le denomina distancia entre x y y.

Si debilitamos la definición excluyendo a 2, y se permite que existan $x, y \in X$ con $x \neq y$ tales que $d(x, y) = 0$, d no es una métrica y recibe el nombre de *seudométrica*.

De aquí en adelante, siempre que se trabaje con $\mathbb{R}$, será considerado con la métrica usual, esto es, con el valor absoluto, el cual es denotado por $|\cdot|$.

Proposición 1.2.2. Sean (X, d) un espacio métrico y X^n el producto de X por sí mismo n veces. Sea $d_\pi((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) = \max\{d(x_1, y_1), d(x_2, y_2), \ldots, d(x_n, y_n)\}$. Entonces d_π es una métrica sobre X^n.

Teorema 1.2.3. Sean (X, d) un espacio métrico y A un subconjunto de X. Entonces A es un espacio métrico con la métrica $d|_A : A \times A \to [0, \infty)$.

Recordemos que si X es un conjunto, se define y denota *al conjunto potencia de* X como $\mathcal{P}(X) = \{A \subset X : A \neq \emptyset\}$.

Definición 1.2.4. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$ con $A \neq \emptyset$. Si $\{d(x, y) : x, y \in A\}$ está acotado superiormente, *el diámetro de* A se denota y define como $\delta(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$. En caso contrario diremos que $\delta(A) = \infty$. Si $\delta(A) \in \mathbb{R}$, diremos que A es acotado.

Observación 1.2.5. Sean (X, d) un espacio métrico, $A \subset X$ con $A \neq \emptyset$ y $z \in X$. Entonces el conjunto $\{d(z, a) : a \in A\}$ es no vacío y acotado inferiormente. Luego, por el Teorema 1.1.4, el conjunto $\{d(z, a) : a \in A\}$ tiene ínfimo, el cual denotaremos por $d(z, A)$, esto es, $d(z, A) = \inf\{d(z, a) : a \in A\}$. Obsérvese que la única condición que se le ha pedido al conjunto A es que sea no vacío.

Definición 1.2.6. Sea (X, d) un espacio métrico. Tomemos un punto $a \in X$ y un número real $r > 0$. Se llama *bola abierta* de centro a y radio r al conjunto: $\{x \in X : d(x, a) < r\}$ que lo denotamos por $B(r, a)$.

Definición 1.2.7. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. El conjunto A es un conjunto *abierto* en X si para todo punto $x \in A$ existe $r > 0$ tal que $B(r, x) \subset A$.

La demostración del siguiente resultado puede consultarse en [11, pág. 35].

Teorema 1.2.8. En un espacio métrico (X, d), para cada $x \in X$ y $r > 0$, la bola abierta $B(r, x)$ es un conjunto abierto.

La demostración del siguiente resultado puede consultarse en [11, pág. 37].

Teorema 1.2.9. Sean (X, d) un espacio métrico y $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos abiertos en X. Entonces se cumple que:

1. El espacio X y el conjunto $\emptyset$ son abiertos en X.
2. $\bigcup_{i \in I} A_i$ es un conjunto abierto en X.
3. Si I es finito, entonces $\bigcap_{i \in I} A_i$ es un conjunto abierto en X.

Definición 1.2.10. Sean (X, d) un espacio métrico y A un subconjunto de X. Se dice que $x \in A$ es un *punto interior* de A si existe un número real $r > 0$ tal que $B(r, x) \subset A$. Al conjunto $\{x \in A : x \text{ es interior de } A\}$ se le llama *interior* de A y se denota por $\mathrm{int}(A)$.

La demostración del siguiente resultado puede consultarse en [13, pág. 17].

Teorema 1.2.11. Sean (X, d) un espacio métrico y $A, B \subset X$. Entonces se cumplen:

1. Si $A \subset B$, entonces $\mathrm{int}(A) \subset \mathrm{int}(B)$.
2. $\mathrm{int}(A)$ es abierto en X.
3. $\mathrm{int}(A) \cup \mathrm{int}(B) \subset \mathrm{int}(A \cup B)$.
4. $\mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B) = \mathrm{int}(A \cap B)$.

Definición 1.2.12. Sean (X, d) un espacio métrico y $x \in X$. Se llama *entorno* del punto x a todo conjunto abierto que lo contenga.

Obsérvese que en particular, una bola abierta de centro x y radio r es un entorno de x.

Definición 1.2.13. Sean (X,d) un espacio métrico, $A \subset X$ y $x \in X$. Se dice que x *es un punto de acumulación del conjunto* A, si todo entorno de x contiene puntos de A distintos de x. Es decir, si para todo entorno S de x se cumple que $(S \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Al conjunto de todos los puntos de acumulación de un conjunto A se llama conjunto *derivado de* A y se denota como A'.

Definición 1.2.14. Sean (X,d) un espacio métrico y A un subconjunto de X. Si A contiene todos sus puntos de acumulación, decimos que A es un conjunto *cerrado* en X.

La demostración del siguiente resultado puede consultarse en [11, pág. 48].

Teorema 1.2.15. Sean (X,d) un espacio métrico y $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos cerrados. Entonces se cumple que:

1. El espacio X y el conjunto $\emptyset$ son cerrados en X.
2. Si I es finito, entonces $\bigcup_{i\in I} A_i$ es un conjunto cerrado en X.
3. $\bigcap_{i\in I} A_i$ es un conjunto cerrado en X.

Definición 1.2.16. Dado un conjunto A en un espacio métrico (X,d), al conjunto $\overline{A} = A \cup A'$, se le llama *clausura o cerradura de* A.

Teorema 1.2.17. Un conjunto A en un espacio métrico (X,d) es cerrado si y sólo si $\overline{A} = A$.

La demostración del siguiente resultado puede consultarse en [14, pág. 13].

Teorema 1.2.18. Sean (X,d) un espacio métrico y $A, B \subset X$. Entonces se cumplen:

1. Si $A \subset B$, entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$.
2. $\overline{A}$ es cerrado en X.
3. $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$.
4. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

La demostración del siguiente resultado puede consultarse en [11, pág. 46].

Teorema 1.2.19. Sean (X,d) un espacio métrico y $A \subset X$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. $x \in \overline{A}$,
2. $d(x, A) = 0$,
3. Para todo entorno S de x, $S \cap A \neq \emptyset$.

La demostración del siguiente resultado puede consultarse en [11, pág. 47].

Teorema 1.2.20. Un conjunto A en un espacio métrico (X,d) es cerrado si y sólo si $X \setminus A$ es abierto.

Observación 1.2.21. Sean (X,d) un espacio métrico y $x \in X$. Entonces $\{x\}$ es cerrado en X.

Teorema 1.2.22. Sean (X,d) un espacio métrico y $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un subconjunto finito de X. Entonces A es cerrado en X.

Demostración.
Notemos que $A = \bigcup_{i=1}^{n}\{x_i\}$, y por la Observación 1.2.21, los conjuntos singulares son cerrados en X. Por el Teorema 1.2.15 (2), se sabe que la unión finita de cerrados es cerrado. Así, $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es cerrado en X. $\square$

Definición 1.2.23. Un subconjunto A de un subconjunto B en un espacio métrico X se dice que es *denso* en B si B está contenido en la clausura de A, es decir, $B \subset \overline{A}$. En particular, A es denso en X o es un subconjunto denso de X si $\overline{A} = X$.

Recordemos las siguientes nociones en un espacio métrico:

Definición 1.2.24. Sean (X, d) un espacio métrico, $A \subset X$ y $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$. Se dice que $\mathcal{U}$ es una *cubierta* de A, si $A \subset \bigcup\{B : B \in \mathcal{U}\}$. Decimos que $\mathcal{U}$ es una *cubierta abierta* de A, si $\mathcal{U}$ es una cubierta de A y todos los elementos de $\mathcal{U}$ son subconjuntos abiertos de X. Una *subcubierta* de una cubierta $\mathcal{U}$ de A es una colección $\mathcal{S}$ de elementos de $\mathcal{U}$ que es también una cubierta de A.

Definición 1.2.25. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Decimos que A es *compacto* si toda cubierta abierta de A admite alguna subcubierta finita para A.

Las demostraciones de los siguientes dos resultados pueden consultarse en [9, pág. 8].

Teorema 1.2.26. Sea (X, d) un espacio métrico. Sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Entonces existe un entorno S de x y un entorno T de y con $S \cap T = \emptyset$.

Teorema 1.2.27. Sea (X, d) un espacio métrico. Si A y B son dos conjuntos ajenos y compactos de X, entonces existen abiertos ajenos S y T de X tales que $A \subset S$ y $B \subset T$.

Teorema 1.2.28. Sean (X, d) un espacio métrico compacto y $A \subset X$ con A cerrado en X. Entonces A es compacto.

Demostración.
Sea $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ una cubierta para A. Dado que A es cerrado, por el Teorema 1.2.20, se sigue que $X \setminus A$ es abierto, así, $\{X \setminus A\} \cup \{U_\alpha : \alpha \in I\}$ es una cubierta abierta de X. Dado que X es compacto, la cubierta abierta $\{X \setminus A\} \cup \{U_\alpha : \alpha \in I\}$ admite una subcubierta finita de X. Por lo tanto, al remover $X \setminus A$ de esta subcubierta finita, se produce una subcubierta finita de la cubierta $\{U_\alpha\}$ de A. $\square$

Teorema 1.2.29. Sean (X, d) un espacio métrico compacto y sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos cerrados de X tales que para cada $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} \subset X_n$. Si U es un abierto de X tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \subset U$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $X_N \subset U$.

Demostración.
Sea U un abierto en X tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \subset U$. Entonces $X \setminus U$ es cerrado. Por el Teorema 1.2.28, se sigue que $X \setminus U$ es compacto. Como $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \subset U$, se tiene por leyes de De Morgan, $X \setminus U \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} X \setminus X_n$. Entonces, la familia $\{(X \setminus X_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta de $X \setminus U$. Dado que $X \setminus U$ es compacto, existe una subcubierta finita $\{X \setminus X_{n_1}, X \setminus X_{n_2}, \ldots, X \setminus X_{n_m}\}$ que cubre a $X \setminus U$.
Sea $N = \text{máx}\{n_1, n_2, \ldots, n_m\}$. Entonces, $\bigcup_{j=1}^{m}(X \setminus X_{n_j}) = X \setminus X_N$. Por lo tanto $X_N \subset U$. $\square$

El siguiente resultado es el Teorema de Tychonoff en el caso finito. Para ver una demostración de este resultado consulte [12, pág. 267].

Teorema 1.2.30. Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son espacios métricos compactos, entonces $\prod_{i=1}^{n} X_i$ es compacto.

1.3. Convergencia en espacios métricos

En esta sección hablaremos sobre las sucesiones, en particular hablaremos de las sucesiones de Cauchy y analizaremos algunas de sus propiedades. Las demostraciones de los resultados estudiados en esta sección pueden consultarse en [11].

Definición 1.3.1. Sea X un espacio métrico. Una *sucesión* en X es una función $f : \mathbb{N} \to X$. Normalmente, en vez de utilizar la notación funcional, se utiliza la notación con subíndices $f(n) = x_n$, y se habla de la sucesión f o $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. El punto x_n se llama n-ésimo término de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Definición 1.3.2. Una *subsucesión* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es otra sucesión definida por $y_n = x_{\varphi(n)}$, donde $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función creciente. Es decir, se eligen elementos de la sucesión original, sin alterar el orden.

Observación 1.3.3. Toda sucesión es una subsucesión de sí misma.

Definición 1.3.4. Sean (X, d) un espacio métrico y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Se dice que $x \in X$ es *punto límite* de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X, si para cada $\epsilon > 0$, existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geqslant n_\epsilon$, $x_n \in B(\epsilon, x)$. Se dice también que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x en X y se denota por $x_n \to x$. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge en X, se dice que diverge.

La demostración del siguiente resultado puede consultarse en [11, pág. 104].

Teorema 1.3.5. El límite de una sucesión convergente en un espacio métrico es único.

La demostración del siguiente resultado puede consultarse en [11, pág. 106].

Teorema 1.3.6. Sean (X, d) un espacio métrico, $A \subset X$ y $x \in X$. Si x es un punto de acumulación de un conjunto A, entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en A, cuyos términos son distintos dos a dos y $x_n \to x$.

Teorema 1.3.7. Sea A un conjunto no vacío en un espacio métrico. Entonces $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en A con $x_n \to x$.

Demostración.
Veamos que si $x \in \overline{A}$, entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en A con $x_n \to x$. Sea $x \in \overline{A}$. Si $x \in A'$, por el Teorema 1.3.6, existe una sucesión en A que converge a x. Si $x \in A$, basta tomar la sucesión constante, es decir, para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n = x$, que está en A y $x_n \to x$.
Recíprocamente, supongamos que $\{x_n\}$ es una sucesión en A con $x_n \to x$. Demostraremos que $x \in \overline{A}$. Sea S un entorno de x, luego existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, $x_n \in S$. Dado que la sucesión está en A, $x_n \in A$ para todo $n \geq N$, es decir, $x_n \in S \cap A$ para todo $n \geq N$. Así, $S \cap A \neq \emptyset$. Por el Teorema 1.2.19, $x \in \overline{A}$. □

Definición 1.3.8. Sean (X, d) un espacio métrico y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Se dice que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una *sucesión de Cauchy* si para cada $\epsilon > 0$, existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que para cada $m, n \geq n_\epsilon$, $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

Obsérvese que los términos de una sucesión de Cauchy se acercan entre sí a medida que los índices crecen.

La demostración del siguiente resultado puede consultarse en [11, pág. 111].

Teorema 1.3.9. En un espacio métrico toda sucesión convergente es de Cauchy.

El recíproco del teorema anterior no siempre es cierto, pues existen sucesiones que son de Cauchy, pero no son convergentes. Por ejemplo la sucesión $x_n = \frac{1}{n}$ es de Cauchy en $M = (0, 1]$, pero no es convergente en M, pues su límite no se encuentra en M.

Para ver una demostración del siguiente teorema, vea [11, pág. 112].

Teorema 1.3.10. Sean (X, d) un espacio métrico y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ admite una subsucesión convergente en X, entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge y ambas tienen el mismo límite.

1.4. Funciones entre espacios métricos

Es esta sección hablaremos sobre las funciones en espacios métricos, pues serán de gran utilidad en los Capítulos 3 y 4. Las demostraciones de los resultados estudiados en esta sección pueden consultarse en [14].

Definición 1.4.1. Sean (X, d_X), (Y, d_Y) espacios métricos y $f : X \to Y$ una función.

1. Se dice que f *es inyectiva* si para todo $a, b \in X$ se tiene que si $a \neq b$, entonces $f(a) \neq f(b)$.
2. Se dice que f *es suprayectiva o sobreyectiva* si para todo $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$.
3. Se dice que f *es biyectiva* si f es inyectiva y suprayectiva.

Definición 1.4.2. Sean (X, d_X), (Y, d_Y) espacios métricos, $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ una función y $a \in X$. Se dice que f *es continua en* a, si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $d_X(a, x) < \delta$, entonces $d_Y(f(a), f(x)) < \epsilon$. Decimos que f *es continua en* X si para cada $a \in X$, f *es continua en* a.

La demostración del siguiente resultado puede consultarse en [11, pág. 157].

Teorema 1.4.3. Sea $f : X \to Y$ una función entre espacios métricos. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:

1. f es continua en X.
2. Si V es un subconjunto abierto en Y, entonces $f^{-1}(V)$ es subconjunto abierto en X.
3. Si T es un subconjunto cerrado en Y, entonces $f^{-1}(T)$ es subconjunto cerrado en X.
4. Para todo subconjunto S de X, $f(\overline{S}) \subset \overline{f(S)}$.

Definición 1.4.4. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos. Se dice que la función $f : X \to Y$ es *abierta* si para todo U abierto en X, se tiene que $f(U)$ es abierto en Y. Se dice que la función $f : X \to Y$ es *cerrada* si para todo U cerrado en X, se tiene que $f(U)$ es cerrado en Y.

La demostración del siguiente resultado puede consultarse en [11, pág. 164].

Teorema 1.4.5. Si f es una función continua y sobreyectiva del espacio métrico compacto X en el espacio métrico Y, entonces Y es compacto.

Definición 1.4.6. Dos espacios métricos X y Y son *homeomorfos* si existe una función biyectiva $f : X \to Y$ tal que f y f^{-1} son continuas.

La demostración del siguiente resultado puede consultarse en [13, pág. 30].

Teorema 1.4.7. Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ una función continua y biyectiva. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. f es un homeomorfismo.
2. f es cerrada.
3. f es abierta.

Definición 1.4.8. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos. Se dice que la función $f : X \to Y$ es una *isometría* si es biyectiva y además para cualesquiera $x, y \in X$, $d_X(x, y) = d_Y(f(x), f(y))$. Se dice que X es *isométrico* al espacio Y, si existe una isometría entre estos dos espacios.

La isometría es una relación de equivalencia en la clase de los espacios métricos.

Teorema 1.4.9. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos. Si existe una isometría entre X y Y, entonces X y Y son homeomorfos.

Demostración.
Supóngase que X es isométrico a Y. Entonces existe una biyección $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ tal que para cualesquiera $x, y \in X$, $d_X(x, y) = d_Y(f(x), f(y))$. Resta probar que f y f^{-1} son continuas. Por demostrar que f es continua. Sea $y \in X$ y $\epsilon > 0$. Considerese $\delta = \epsilon$, si $d_X(x, y) < \delta$, entonces $d_X(x, y) < \epsilon$. Así $d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon$, es decir, f es continua. De manera similar se prueba que f^{-1} es continua. □

Definición 1.4.10. Sean (X, d) un espacio métrico y $f : (X, d) \to (X, d)$ una función. Se dice que f *es una función de Lipschitz* si existe una constante $k > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$, para cada $x, y \in X$. En tal caso, k es llamada la *constante de Lipschitz*.

Las demostraciones de los siguientes dos resultados pueden consultarse en [9, pág. 14].

Proposición 1.4.11. Sean (X, d) un espacio métrico y $f_1, f_2, \ldots, f_n$ funciones de Lipschitz, entonces $f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n$ es una función de Lipschitz.

Teorema 1.4.12. Sean (X, d) un espacio métrico y $f : (X, d) \to (X, d)$ una función. Si f es una función de Lipschitz, entonces f es continua.

Definición 1.4.13. Sean (X, d) un espacio métrico y $f : X \to X$ una función de Lipschitz con constante de Lipschitz $k > 0$. Entonces:

1. Si $k \leq 1$, la función f se le llama *no expansiva*.
2. Si $k < 1$, la función f se le llama *contracción*, y en tal caso a k se le llama *constante de contracción para f*.

Teorema 1.4.14. Sean (X, d) un espacio métrico, $f : (X, d) \to (X, d)$ y $g : (X, d) \to (X, d)$ funciones. Si f y g son contracciones, entonces $f \circ g$ es una contracción.

Aplicando la Proposición 1.4.11, se tiene el siguiente resultado:

Corolario 1.4.15. Sean (X, d) un espacio métrico y $f_1, f_2, \ldots, f_n$ contracciones, entonces $f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n$ es una contracción.

1.5. Continuos

En esta sección hacemos una breve introducción a los continuos. Analizaremos algunas de sus propiedades y construiremos algunos continuos que son de interés para este trabajo. Las demostraciones de los resultados estudiados en esta sección pueden consultarse en [9] y [11].

Definición 1.5.1. Sea X un espacio métrico. Decimos que los conjuntos S y T son una *disconexión de* X si son no vacíos, ajenos, abiertos en X y $X = S \cup T$. Si tales conjuntos existen decimos que X admite una *disconexión*.

Notemos que S y T también son cerrados en X. Observemos que si X admite una disconexión, ésta puede no ser única. En efecto, si S es abierto y cerrado en X tal que $S \neq \emptyset$ y $S \neq X$, se sigue que $T = X \setminus S$ es un abierto y cerrado en X tal que $T \neq \emptyset$ y $X = S \cup T$. Así, cualquier S abierto y cerrado en X, $S \neq \emptyset$ y $S \neq X$, induce una disconexión de X.

Definición 1.5.2. Sea A un conjunto no vacío en un espacio métrico (X, d). Decimos que A *es disconexo* si admite alguna disconexión. Decimos que A *es conexo* si no es disconexo, es decir, no admite disconexión.

Teorema 1.5.3. Sea X un espacio métrico. Entonces X es conexo si y sólo si $\emptyset$ y X son los únicos conjuntos en X que son al mismo tiempo abiertos y cerrados.

Demostración.
Supongamos que X es conexo. Sea $A \subset X$ tal que A es abierto y cerrado en X, con $A \neq X$ y $A \neq \emptyset$. Observemos que por el Teorema 1.2.20, se sigue que $X \setminus A$ es abierto y cerrado en X. Notemos que $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$ y $X = A \cup (X \setminus A)$, así, X es disconexo, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, los únicos conjuntos en X que son al mismo tiempo abiertos y cerrados son el $\emptyset$ y X.
Recíprocamente, probemos el contrarrecíproco de esta afirmación. Supongamos que X es disconexo. Así, existen U y V abiertos no vacíos de X tales que $U \cap V = \emptyset$ y $X = U \cup V$. Notemos que $U = X \setminus V$. En efecto, dado que $U \cap V = \emptyset$, se sigue que $U \subset X \setminus V$. Por otro lado, sea $x \in X \setminus V$. Como $X = U \cup V$, se tiene que $x \in U$. En consecuencia, $U = X \setminus V$. De aquí, U es un abierto y cerrado en X tal que $U \neq \emptyset$ y $U \neq X$. $\square$

La demostración del siguiente resultado puede consultarse en [11, pág. 69].

Teorema 1.5.4. Sea X un espacio métrico. Si A y B son subconjuntos de X tales que A es conexo y $A \subset B \subset \overline{A}$, entonces B es conexo. En particular, $\overline{A}$ es conexo.

La demostración del siguiente resultado puede consultarse en [11, pág. 70].

Teorema 1.5.5. Sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos conexos de un espacio métrico X. Si existe $A_0 \in \mathcal{F}$ tal que para todo $A \in \mathcal{F}$, $A \cap A_0 \neq \emptyset$, entonces $\bigcup \mathcal{F}$ es conexo.

La demostración del siguiente resultado puede consultarse en [11, pág. 71].

Corolario 1.5.6. Si $\mathcal{F}$ es una familia de subconjuntos conexos de un espacio métrico X tales que $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$, entonces $\bigcup \mathcal{F}$ es conexo.

Definición 1.5.7. En $(\mathbb{R}, d)$ sea $A \subset \mathbb{R}$. Decimos que A *es un intervalo* si para cada $x, y \in A$, y para cada $z \in \mathbb{R}$ con $x \leq z \leq y$ se cumple que $z \in A$.

La demostración del siguiente resultado puede consultarse en [9, pág. 15].

Teorema 1.5.8. Sea el espacio métrico $(\mathbb{R}, d)$ y $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Entonces $[a, b]$ es conexo.

Corolario 1.5.9. Un subconjunto A de $\mathbb{R}$ es conexo si y sólo si A es un intervalo.

La demostración del siguiente resultado puede consultarse en [14, pág. 143].

Teorema 1.5.10. Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son espacios métricos conexos, entonces $\prod_{i=1}^{n} X_i$ es conexo.

Definición 1.5.11. Las *n-celdas* son espacios homeomorfos a $[0, 1]^n$, donde $[0, 1]^n$ se define como el producto cartesiano de n veces el intervalo $[0, 1]$.

Note que como $[0, 1]$ es conexo. Entonces por el Teorema 1.5.10, las *n-celdas* $[0, 1]^n$ son conexas. La demostración del siguiente resultado puede consultarse en [11, pág. 169].

Teorema 1.5.12. Si f es una función continua del espacio métrico conexo X sobre el espacio métrico Y, entonces Y es conexo.

Definición 1.5.13. Sean (X, d) un espacio métrico y $x \in X$. *La componente conexa del punto* x se define como $C_x = \bigcup \{C \subset X : C \text{ es conexo y } x \in C\}$.

La demostración del siguiente resultado puede consultarse en [11, pág. 73].

Teorema 1.5.14. Sean (X, d) un espacio métrico y $x \in X$. Entonces:

1. Si C es conexo tal que $x \in C$, entonces $C \subset C_x$.

2. C_x es cerrado en X.

Definición 1.5.15. *Un arco* es un espacio homeomorfo al intervalo $[0, 1]$.

Dado que un intervalo cerrado es un conjunto conexo y compacto, por los Teoremas 1.5.12 y 1.4.5, se sigue que un arco es conexo y compacto.

Definición 1.5.16. Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Un *subcontinuo* es un *continuo* el cual está contenido como subespacio en otro continuo.

De los Teoremas 1.2.30 y 1.5.10, se sigue que:

Teorema 1.5.17. Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son continuos, entonces $\prod_{i=1}^n X_i$ es continuo.

Ejemplo 1.5.18. Algunos ejemplos de continuos son los siguientes:

1. El intervalo $[a,b]$, para $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$.

2. Las n-celdas $[0, 1]^n$. En particular, la 2-celda es un continuo (Ver Figura 1.1).

3. Un arco (Ver Figura 1.2).

4. En un espacio métrico, la imagen continua de un continuo.

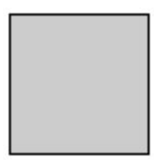

Figura 1.1: Gráfica del continuo 2-celda.

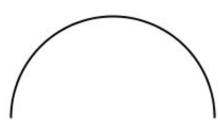

Figura 1.2: Gráfica de un arco.

Construir continuos no es una tarea fácil, por lo cual conviene ver el siguiente resultado que brindará una gran herramienta para dicha tarea.

Teorema 1.5.19. Si X es un *continuo* y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de subcontinuos de X tales que para toda $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ es un subcontinuo de X.

Demostración.
Sea $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Como A es intersección de cerrados, por el Teorema 1.2.15,(3), se sigue que A es cerrado en X. Dado que X es compacto y A es cerrado en X, por el Teorema 1.2.28, se tiene que A es compacto.

Obsérvese que $X \setminus A_n$ es abierto en X, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por demostrar que A no es vacío. Supóngase que A es vacío. Por leyes de Morgan

$$X = X \setminus A = X \setminus \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) = (X \setminus A_1) \cup (X \setminus A_2) \cup \ldots$$

Entonces la familia $\{(X \setminus A_1), (X \setminus A_2), \ldots\}$ es una cubierta abierta de X. Como X es compacto existe una subcubierta finita $X \setminus A_{n_1}, X \setminus A_{n_2}, \ldots, X \setminus A_{n_m}$ de X. Supóngase, sin pérdida de generalidad que $n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_m$. Entonces

$$X = (X \setminus A_{n_1}) \cup (X \setminus A_{n_2}) \cup \ldots \cup (X \setminus A_{n_m}) = X \setminus (A_{n_1} \cap A_{n_2} \cap \ldots \cap A_{n_m}) = X \setminus A_{n_m}.$$

En consecuencia $A_{n_m} = \emptyset$, lo cual conduce a una contradicción, pues al ser A_{n_m} un subcontinuo es diferente del vacío. Por lo tanto, A es diferente del vacío.
Resta probar que A es conexo. Supóngase que A no es conexo. Entonces existen U y V cerrados de X, no vacíos tales que $U \cap V = \emptyset$ y $A = U \cup V$. Al ser X compacto, por el Teorema 1.2.28 se sigue que U y V son compactos. Entonces por el Teorema 1.2.27 existen I y J abiertos en X tales que $U \subset I$ y $V \subset J$, con $I \cap J = \emptyset$. Nótese que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset I \cup J$, entonces por el Teorema 1.2.29 existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_N \subset I \cup J$. De donde $A_N = (A_N \cap I) \cup (A_N \cap J)$. Observemos que, $U \cup V = A \subset A_N$. Como $U \neq \emptyset$, sea $k \in U$, así $k \in I$. Como $k \in A$, se sigue que $k \in A_N \cap I$. Luego $A_N \cap I \neq \emptyset$. De manera similar se prueba que $A_N \cap J \neq \emptyset$. Así, A_N no es conexo. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, A es conexo. $\square$

De la demostración del Teorema 1.5.19, se puede deducir lo siguente:

Teorema 1.5.20. Si X es un compacto y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de compactos tales que para toda $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$ entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ es un compacto.

En el siguiente ejemplo se hará uso del Teorema 1.5.19 para construir un continuo.

Ejemplo 1.5.21. Sean $A_0 = [0,1] \times [0,1]$ y $B_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, obsérvese que A_0 es un continuo, pues A_0 es el producto de conexos, por lo cual es conexo. También A_0 es el producto de compactos, por lo cual es compacto.
Sea $A_1 = A_0 \setminus B_1$. Obsérvese que A_1 es un continuo. Sea $B_{21} = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \times \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$, $B_{22} = \left(\frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right) \times \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$, $B_{23} = \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right) \times \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$, $B_{24} = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \times \left(\frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right)$, $B_{25} = \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right) \times \left(\frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right)$, $B_{26} = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \times \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$, $B_{27} = \left(\frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right) \times \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ y $B_{28} = \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right) \times \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$. Sea $A_2 = A_1 \setminus B_2$, donde $B_2 = B_{21} \cup B_{22} \cup B_{23} \cup B_{24} \cup B_{25} \cup B_{26} \cup B_{27} \cup B_{28}$, obsérvese que A_2 es un continuo. Así, sucesivamente se sigue con la construcción de los A_n. Para una idea geométrica de como son los conjuntos formados, vea la Figura 1.3.
Entonces, por el Teorema 1.5.19, se sigue que $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ es un continuo. Dicho continuo se conoce como *la Carpeta de Sierpinski.*

Observe que el Teorema 1.5.19, nos brinda una herramienta para construir continuos de una manera sencilla. En el ejemplo anterior se construyó la Carpeta de Sierpinski mediante una sucesión de continuos. De manera similar es posible construir *el Triángulo de Sierpinski.* A continuación enunciaremos algunos resultados sobre la función continua $f : X \to Y$, donde X y Y son continuos.

Teorema 1.5.22. Sean X y Y dos espacios métricos compactos. Si $f : X \to Y$ es una función continua, entonces f es cerrada.

Un caso particular del Teorema 1.5.22, es el siguiente:

Teorema 1.5.23. Sean X y Y dos continuos. Si $f : X \to Y$ es una función continua, entonces f es cerrada.

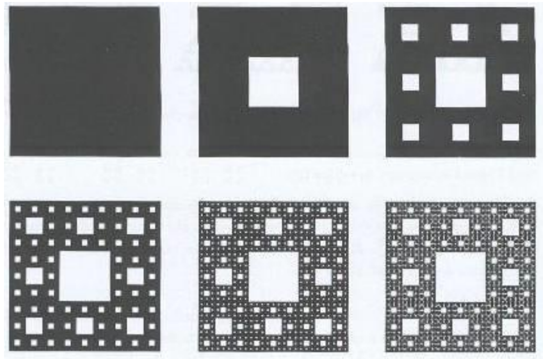

Figura 1.3: Gráfica de los primeros pasos para construir la Carpeta de Sierpinski mediante continuos.

Enseguida citaremos el Teorema del valor intermedio, dicho teorema es muy conocido en cálculo diferencial y nos será de utilidad en las demostraciones de algunos resultados. Su demostración puede consultarse en [3, pág. 177].

Teorema 1.5.24. Sean A un intervalo en $\mathbb{R}$ y $f : A \to A$ una función continua en A. Sean a, b dos puntos en A tales que $a < b$, y sea $M \in \mathbb{R}$. Si alguna de las siguientes dos condiciones se cumple:

1. $f(a) < M < f(b)$,
2. $f(a) > M > f(b)$,

entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = M$.

Teorema 1.5.25. Sean X y Y dos continuos y $f : X \to Y$ una función continua. Si f es biyectiva, entonces f es un homeomorfismo.

Ejemplo 1.5.26. La función $h : [0, 1] \to [0, 1]$ dada por $h(x) = \text{sen}^2(\frac{\pi x}{2})$ es un homeomorfismo. En efecto, notemos que h es continua y $[0, 1]$ es un continuo. Para mostrar que h es un homeomorfismo, basta probar que h es biyectiva.
Veamos que h es inyectiva. Observemos que $h'(x) = 2\text{sen}(\frac{\pi x}{2}) \cos(\frac{\pi x}{2}) \frac{\pi}{2}$. Dado que $\text{sen}(2\theta) = 2\text{sen}(\theta) \cos(\theta)$, se tiene que $h'(x) = \frac{\pi}{2}\text{sen}(\pi x) \geq 0$, así, $h(x)$ es creciente en el intervalo $[0, 1]$. Sean $x, y \in [0, 1]$ tales que $x \neq y$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x < y$. Luego, $h(x) < h(y)$, es decir, $h(x) \neq h(y)$. Por lo tanto, h es inyectiva.
Por otro lado, veamos que h es sobreyectiva. Observemos que $h(0) = 0$ y $h(1) = 1$. Sea $x \in (0, 1)$. De aquí, $h(0) < x < h(1)$. Por el Teorema 1.5.24, existe $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = x$. En consecuencia, h es sobreyectiva. Por lo tanto, h es biyectiva. Por el Teorema 1.5.25, se sabe que h es un homeomorfismo.

1.6. Los Hiperespacios y el producto simétrico.

Las demostraciones de los resultados estudiados en esta sección pueden consultarse en [6] y [9].

Definición 1.6.1. Sean (X, d) un espacio métrico y $n \in \mathbb{N}$. Definimos las siguientes familias de conjuntos de X:

1. $\mathcal{CB}(X) = \{A \subseteq X : A \neq \emptyset, A \text{ es acotado y cerrado en } X\}$;
2. $2^X = \{A \subseteq X : A \neq \emptyset \text{ y } A \text{ es compacto}\}$;
3. $C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo }\}$;

4. $\mathcal{F}_n(X) = \{A \subset X : A \neq \emptyset$ y A tiene a lo más n puntos$\}$;
5. $\mathcal{C}_n(X) = \{A \in 2^X : A$ tiene a lo más n componentes$\}$.

Obsérvese que $\mathcal{F}_n(X) \subset \mathcal{C}_n(X) \subset 2^X$. Si $n = 1$, en lugar de escribir $\mathcal{C}_1(X)$, se escribe $\mathcal{C}(X)$. En este caso $\mathcal{C}(X) = \{A \in 2^X : A$ es conexo $\}$. Recordemos que dado un espacio métrico X y $A \subset X$ con A no vacío en X, para todo $z \in X$, se tiene que $d(z, A) = \inf\{d(z, a) : a \in A\}$.

Definición 1.6.2. Sean (X, d) un espacio métrico y $A, B \subset X$ con A y B no vacíos y acotados. Entonces definimos y denotamos: $\rho(A, B) = \sup\{d(a, B) : a \in A\}$.

La demostración del siguiente resultado puede consultarse en [6, pág. 63].

Teorema 1.6.3. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces la función $\mathcal{H} : \mathcal{CB}(X) \times \mathcal{CB}(X) \to [0, \infty)$, definida por $\mathcal{H}(A, B) = \max\{\rho(A, B), \rho(B, A)\}$ para todo $A, B \in \mathcal{CB}(X)$, es una métrica sobre $\mathcal{CB}(X)$. Tal métrica se conoce como *la métrica de Hausdorff.*

Las bolas abiertas en $\mathcal{CB}(X)$ se denotarán como $\mathbf{B}(\delta, A)$, donde $A \in \mathcal{CB}(X)$ y $\delta > 0$. De ahora en adelante, al espacio $\mathcal{CB}(X)$ será considerado con la métrica de Hausdorff. Además, cualquier subconjunto de $\mathcal{CB}(X)$ será considerado con la métrica de Hausdorff de $\mathcal{CB}(X)$ restringida. La métrica de Hausdorff nos permite trabajar con un tipo de conjuntos. Para ello, damos la siguiente definición.

Definición 1.6.4. Sea X un continuo. Un *hiperespacio* de un continuo X es una colección de subconjuntos de X que satisface algunas propiedades particulares.

Todas las familias dadas en la Definición 1.6.1 son hiperespacios y son considerados con la métrica de Hausdorff $\mathcal{H}$.

Proposición 1.6.5. Sean (X, d) un espacio métrico y $A, B \in \mathcal{CB}(X)$ tales que $A = \{a\}$ y $B = \{b\}$. Se sigue que $\mathcal{H}(A, B) = d(a, b)$.

La demostración del siguiente resultado puede consultarse en [6, pág. 65].

Teorema 1.6.6. Sean (X, d) un espacio métrico, y $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathcal{CB}(X)$. Luego $\mathcal{H}(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \leq \max\{\mathcal{H}(A_1, B_1), \mathcal{H}(A_2, B_2)\}$

Para conocer una equivalencia que tiene la métrica de Hausdorff, conviene ver la siguiente definición.

Definición 1.6.7. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$ con A no vacío. *La nube alrededor de A y radio $r > 0$* se define y denota como:

$$N(r, A) = \{x \in X : d(x, A) < r\}.$$

La demostración del siguiente resultado puede consultarse en [6, pág. 61].

Teorema 1.6.8. Sean (X, d) un espacio métrico, $\epsilon > 0$ y $A \in \mathcal{CB}(X)$. Se tiene que $N(\epsilon, A) = \bigcup\{B(\epsilon, a) : a \in A\}$.

Las demostraciones de los siguientes tres resultados pueden consultarse en [6, pág. 65].

Teorema 1.6.9. Sean (X, d) un espacio métrico, $A, B \in 2^X$ y $\epsilon > 0$. Se sigue que:

$$\mathcal{H}(A, B) < \epsilon \text{ si y sólo si } A \subset N(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N(\epsilon, A).$$

Teorema 1.6.10. Sean (X, d) un espacio métrico, y $A, B \in \mathcal{CB}(X)$. Entonces $\mathcal{H}(A, B) = \inf\{r > 0 : A \subset N(r, B), B \subset N(r, A)\}$

Teorema 1.6.11. Sean (X,d) un espacio métrico, $A,B \in \mathcal{CB}(X)$ y $\epsilon > 0$. Entonces se cumplen:

1. $\mathcal{H}(A,B) < \epsilon$, entonces $A \subset N(\epsilon, B)$ y $B \subset N(\epsilon, A)$.
2. Si $A \subset N(\epsilon, B)$ y $B \subset N(\epsilon, A)$, entonces $\mathcal{H}(A,B) \leq \epsilon$.

Definición 1.6.12. Sean (X,d) un espacio métrico, y $A,B \in \mathcal{CB}(X)$. La *distancia Pompeiu-Hausdorff entre A y B* está dado por: $\mathbb{D}_\infty(A,B) = \sup\{|d(x,A) - d(x,B)| : x \in X\}$.

La demostración del siguiente resultado puede consultarse en [6, pág. 64].

Teorema 1.6.13. Sean (X,d) un espacio métrico, y $A,B \in \mathcal{CB}(X)$. Entonces $\mathcal{H}(A,B) = \mathbb{D}_\infty(A,B)$.

Definición 1.6.14. Sea X un continuo, $m \in \mathbb{N}$ y $U_1, U_2, \ldots, U_m$ subconjuntos de X. Definimos la siguiente subcolección de 2^X:

$$\langle U_1, \ldots, U_m \rangle = \left\{ A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, m\} \right\}.$$

Definimos $\langle U_1, \ldots, U_m \rangle_n = \langle U_1, \ldots, U_m \rangle \cap \mathcal{F}_n(X)$.

La demostración del siguiente resultado puede consultarse en [9, pág. 47].

Teorema 1.6.15. Sean X un continuo y $\mathcal{B} = \{\langle U_1, U_2, \ldots, U_m \rangle : m \in \mathbb{N}\}$, donde U_i es abierto en X, para cada $i \in \mathbb{N}$. Entonces $\mathcal{B}$ es una base para una topología del hiperespacio 2^X (la topología generada por $\mathcal{B}$), denotada por T_V y conocida como *topología de Vietoris*.

T_H denota la topología inducida por la métrica de Hausdorff. Note que una base para T_H está dada por $\gamma_H = \{\mathbf{B}(\delta, S) : S \in 2^X \text{ y } \delta > 0\}$. La demostración del siguiente resultado puede consultarse en [9, pág. 47].

Teorema 1.6.16. Sea X un continuo. Se tiene que la topología de Vietoris T_V y la topología inducida por la métrica de Hausdorff, T_H, en 2^X son iguales.

De aquí en adelante τ_n denotará la topología T_V restringida a $\mathcal{F}_n(X)$.

Observación 1.6.17. Dado $n \in \mathbb{N}$ y X un continuo. Notemos que $\mathcal{F}_n(X) \subset 2^X$. Así, dado que $\mathcal{B}$ es una base para una topología T_V en 2^X, se sigue que $\mathcal{B}_n = \{\langle U_1, \ldots, U_m \rangle_n : m \in \mathbb{N}\}$ es una base para la topología τ_n en $\mathcal{F}_n(X)$.

Teorema 1.6.18. Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. La familia $\{\langle U_1, \ldots, U_n \rangle_n : U_1, \ldots, U_n \text{ son abiertos en } X\}$ es una base para la topología de $\mathcal{F}_n(X)$.

Demostración.
Sabemos que $\mathcal{B} = \{\langle U_1, \ldots, U_m \rangle_n : m \in \mathbb{N} \text{ y } U_1, \ldots, U_m \text{ abiertos en } X\}$ es una base para la topología τ_n de $\mathcal{F}_n(X)$. Veamos que $\mathcal{C} = \{\langle U_1, \ldots, U_n \rangle_n : U_1, \ldots, U_n \text{ son abiertos en } X\}$ es una base para la topología τ_n de $\mathcal{F}_n(X)$. Sean $\mathcal{U} \in \tau_n$ y $A \in \mathcal{F}_n(X)$ tal que $A \in \mathcal{U}$. Dado que $\mathcal{B}_n$ es una base para τ_n, existen m subconjuntos abiertos $U_1, \ldots, U_m$ de X tales que $A \in \langle U_1, \ldots, U_m \rangle_n \subset \mathcal{U}$. Para probar que $\mathcal{C}$ es una base para la topología τ_n, basta verificar que existen n abiertos $V_1, \ldots, V_n$ de X tales que $A \in \langle V_1, \ldots, V_n \rangle_n \subset \langle U_1, \ldots, U_m \rangle_n \subset \mathcal{U}$. Consideremos los dos posibles casos:
Caso 1, $m \leq n$. En este caso, tomaremos $V_i = U_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ y $V_i = U_m$ para cada $i \in \{m+1, \ldots, n\}$. Entonces, $\langle V_1, \ldots, V_n \rangle_n = \langle U_1, \ldots, U_m \rangle_n$.
Caso 2, $m > n$. Sea $A = \{x_1, \ldots, x_k\}$, con $k \leq n$. Para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, pongamos $W_i = \cap\{U_j : x_i \in U_j\}$. Claramente $x_i \in W_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. Así, $A \in \langle W_1, \ldots, W_k \rangle_n$. Note que $A \in \langle W_1, \ldots, W_k \rangle_n \subset \langle U_1, \ldots, U_m \rangle_n$. Dado que $k \leq n$, se sigue por el Caso 1, que existen n subconjuntos de X abiertos $V_1, \ldots, V_n$ tales que $A \in \langle V_1, \ldots, V_n \rangle_n \subset \langle W_1, \ldots, W_k \rangle_n \subset \langle U_1, \ldots, U_m \rangle_n$. $\square$

Observación 1.6.19. Note que dado $\mathcal{U} \in \tau_n$ y $x \in \mathcal{U}$, se sigue por el Teorema 1.6.18 que existen n abiertos en X, $U_1, U_2, \ldots, U_n$, tales que $x \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle_n \subset \mathcal{U}$.

Teorema 1.6.20. Sea (X,d) un espacio métrico. Entonces $\mathcal{F}_1(X) = \{\{x\} : x \in X\}$ considerado con la métrica de Hausdorff es isométrico a X.

Demostración.
Basta mostrar que existe una isometría entre $\mathcal{F}_1(X) = \{\{x\} : x \in X\}$ y X. Considere la función $h : X \to \mathcal{F}_1(X)$ dada por $h(x) = \{x\}$, para cada $x \in X$. Por la manera en que está definida la función es biyectiva. Además, por la Proposición 1.6.5, $d(a,b) = \mathcal{H}(\{a\},\{b\}) = \mathcal{H}(h(a),h(b))$, con lo cual h es una isometría entre $\mathcal{F}_1(X) = \{\{x\} : x \in X\}$ y X. Por lo tanto, $\mathcal{F}_1(X) = \{\{x\} : x \in X\}$ es isométrico al espacio X. $\square$

Teorema 1.6.21. Sea (X,d) un espacio métrico. Se cumple que $\mathcal{F}_1(X) = \{\{x\} : x \in X\}$ es homeomorfo a X.

Demostración.
Por el Teorema 1.6.20, $\mathcal{F}_1(X) = \{\{x\} : x \in X\}$ es isométrico a X. Luego, por el Teorema 1.4.9, $\mathcal{F}_1(X) = \{\{x\} : x \in X\}$ y X son homeomorfos. $\square$

Obsérvese que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple la siguiente contención, $\mathcal{F}_1(X) \subset \mathcal{F}_n(X)$.

Teorema 1.6.22. Sea (X,d) un espacio métrico. Entonces $\mathcal{F}_1(X)$ es cerrado en $\mathcal{CB}(X)$.

Demostración.
Probemos que $\mathcal{F}_1(X)$ es cerrado en $\mathcal{CB}(X)$. Para probar lo deseado, basta verificar que $\overline{\mathcal{F}_1(X)} \subset \mathcal{F}_1(X)$. Sea $A \in \overline{\mathcal{F}_1(X)}$. Luego, por el Teorema 1.3.7, existe $\{A_n\} \subset \mathcal{F}_1(X)$ tal que $\lim A_n = A$. Veamos que $A \in \mathcal{F}_1(X)$. Supóngase que $A \notin \mathcal{F}_1(X)$. Sean $x \in A$ y $y \in A \setminus \{x\}$. Así, $d(x,y) = r > 0$. Como $\lim A_n = A$, para $\frac{r}{2} > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, $\mathcal{H}(A_n, A) < \frac{r}{2}$. Fijemos $n \geq N$. Luego, por el Teorema 1.6.11,(1), $A \subset N(\frac{r}{2}, A_n)$. Supóngase que $A_n = \{z\}$. Así, $A \subset N(\frac{r}{2}, \{z\})$. Entonces $d(x,z) < \frac{r}{2}$ y $d(y,z) < \frac{r}{2}$. Luego por desigualdad triangular, $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < r$. Así, $d(x,y) < r$, lo cual es una contradicción. De manera que, $A \in \mathcal{F}_1(X)$. Así, $\overline{\mathcal{F}_1(X)} \subset \mathcal{F}_1(X)$. Por lo tanto, por el Teorema 1.2.17, $\mathcal{F}_1(X)$ es cerrado en $\mathcal{CB}(X)$. $\square$

Teorema 1.6.23. Sea (X,d) un espacio métrico y X^n el producto topológico de X por sí mismo n veces. Sea $f_n : (X^n, d_\pi) \to (\mathcal{F}_n(X), \mathcal{H})$ la función definida por $f_n((x_1, x_2, ..., x_n)) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, para cada $(x_1, x_2, ..., x_n) \in X^n$. Entonces f_n es continua y suprayectiva.

Demostración.
Por la manera en que está definida f_n, esta función es suprayectiva, resta probar que f_n es continua. Sean $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X^n$ y $\epsilon > 0$. Pongamos $\delta = \epsilon$. Ahora, supóngase que $d_\pi((x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n)) < \delta$. Entonces, se sigue que $\max\{d(x_1, y_1), d(x_2, y_2), \ldots, d(x_n, y_n)\} < \epsilon$. Con lo cual $d(x_i, y_i) < \epsilon$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Veamos que $\{x_1, x_2, \ldots x_n\} \subset N(\epsilon, \{y_1, y_2, \ldots y_n\})$. Sea $x_j \in \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$. Como $d(x_j, y_j) < \epsilon$ y $d(x_j, \{y_1, y_2, \ldots y_n\}) = \inf\{d(x_j, y_i) : i \in \{1, 2, \ldots, n\}\} \leq d(x_j, y_j)$, $d(x_j, \{y_1, y_2, \ldots y_n\}) < \epsilon$, se tiene que $x_j \in N(\epsilon, \{y_1, y_2, \ldots y_n\})$. Luego $\{x_1, x_2, \ldots x_n\} \subset N(\epsilon, \{y_1, y_2, \ldots y_n\})$. Similarmente, tenemos que $\{y_1, y_2, \ldots y_n\} \subset N(\epsilon, \{x_1, x_2, \ldots x_n\})$. Por lo tanto, por el Teorema 1.6.11 (2), $\mathcal{H}(\{x_1, x_2, \ldots x_n\}, \{y_1, y_2, \ldots y_n\}) < \epsilon$. Con lo cual $\mathcal{H}(f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)) < \epsilon$. En consecuencia, f_n es continua en $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. De manera que f_n es continua en X^n. $\square$

Teorema 1.6.24. Si (X,d) es un espacio métrico conexo, entonces $\mathcal{F}_n(X)$ es conexo.

Demostración.
Sea $f_n : (X^n, d_\pi) \to (\mathcal{F}_n(X), \mathcal{H})$. Dado que X es conexo, por el Teorema 1.5.10, se sigue que X^n es conexo. El Teorema 1.6.23 nos dice que esta función es continua y suprayectiva, por lo cual al ser X^n conexo y por el Teorema 1.5.12, se sigue que $\mathcal{F}_n(X)$ es conexo. $\square$

Teorema 1.6.25. Si (X, d) es un espacio métrico compacto, entonces $\mathcal{F}_n(X)$ es compacto.

Demostración.
Sea $f_n : (X^n, d_\pi) \to (\mathcal{F}_n(X), \mathcal{H})$. Dado que X es compacto, por el Teorema 1.2.30, se sigue que X^n es compacto. El Teorema 1.6.23 nos dice que esta función es continua y suprayectiva, por lo cual al ser X^n compacto y por el Teorema 1.4.5, se sigue que $\mathcal{F}_n(X)$ es compacto. $\square$

Por los Teoremas 1.6.24 y 1.6.25, se tiene el siguiente resultado.

Corolario 1.6.26. Si (X, d) es un continuo, entonces $\mathcal{F}_n(X)$ es un continuo.

Capítulo 2

Breve introducción a los sistemas dinámicos discretos

En la naturaleza es frecuente encontrar fenómenos naturales en donde el tiempo juega un papel importante, por ejemplo la migración de las mariposas monarcas, el crecimiento poblacional de cierto tipo de aves en verano, el número de infectados por el dengue en cierto país, etc. Estos tipos de fenónemos naturales han sido de grán interés para los matemáticos pues se han encontrado algunas nociones matemáticas que describen dentro de lo posible estos tipos de fenómenos.

2.1. Sistemas dinámicos discretos.

La importancia de entender estos procesos naturales resulta útil para modelar, predecir y en algunos casos evitar eventos no deseados, por lo cual en las matemáticas ha surgido el área de sistemas dinámicos discretos.

De forma general, la dinámica de sistemas es el estudio de cómo ciertas cantidades cambian en función de otras variables, que por lo general suele ser el tiempo. De manera formal tenemos la siguiente definición:

Definición 2.1.1. Sean $(G, *)$ un grupo (o un semigrupo con neutro) y (X, τ) un espacio topológico. Un *sistema dinámico* es una función $\varphi : G \times X \to X$ continua que cumple las siguientes propiedades:

1. $\varphi(0, x) = x$, para todo $x \in X$,
2. $\varphi(t, \varphi(s, x)) = \varphi(t * s, x)$, para todo $t, s \in G$ y para todo $x \in X$.

Esta definición es probablemente la más formal que se tiene hasta el momento de un sistema dinámico, más adelante daremos otra que será más comprensible y la que usaremos en todo este trabajo. Pero de momento conviene hacer unas observaciones. En este trabajo, I_X denota la función identidad en el espacio X.

Observación 2.1.2. Para todo $t \in G$, sea $\varphi_t : X \to X$ tal que $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$. En este caso, los puntos 1 y 2 de la Definición 2.1.1 , se pueden escribir como:

1. $\varphi_0(x) = I_X$, para todo $x \in X$,
2. $(\varphi_t \circ \varphi_s)(x) = \varphi_{t*s}(x)$, para todo $x \in X$.

Notemos que si para todo $t \in G$, existe una función $\varphi_t : X \to X$ que cumple con las propiedades 1 y 2 de la Observación 2.1.2, entonces existe una función $\varphi : G \times X \to X$ con las propiedades 1 y 2 de la Definición 2.1.1. Esto es, las funciones de la Observación 2.1.2, definen sistemas dinámicos.

Dependiendo del campo en el cual se trabaje, un sistema dinámico puede clasificarse en dos clases:

Observación 2.1.3. Un sistema dinámico se clasifica en dos grupos:

1. Si $(G, *) = (\mathbb{Z}, +)$ o bien $(G, *) = (\mathbb{N}, +)$, se dice que tal sistema es un sistema dinámico discreto.
2. Si $(G, *) = (\mathbb{R}, +)$ o bien $(G, *) = (\mathbb{R}^+ \cup \{0\}, +)$, se dice que el sistema es un sistema dinámico continuo o flujo.

A continuación mencionamos un caso particular de la definición original de un sistema dinámico.

Definición 2.1.4. Sea X un espacio métrico. Un sistema dinámico discreto es una función continua $F : \mathbb{Z} \times X \to X$ que cumple con las siguientes propiedades:

1. $F(0, x) = x$, para todo $x \in X$, esto es $F(0, x) = I_X$,
2. $F(n, F(m, x)) = F(n + m, x)$, para todo $m, n \in \mathbb{Z}$ y para todo $x \in X$.

En la Definición 2.1.4, podemos hacer algunas observaciones.

Observación 2.1.5. Si para todo $n \in \mathbb{N}$, definimos $F_n : X \to X$ tal que $F_n(x) = F(n, x)$. Entonces, en la Definición 2.1.4, los puntos 1 y 2 se pueden escribir como:

1. $F_0(x) = x$, para todo $x \in X$, esto es, $F_0 = I_X$,
2. $F_n \circ F_m = F_{n+m}$.

En particular, sea $F_1 = f$, donde $f : X \to X$ es una función continua en X. Así $F_2 = F_1 \circ F_1 = f \circ f$. En general, $F_n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f \circ f}_{n \text{ veces}}$. En este caso $(f, X, \mathbb{Z})$, determina completamente un sistema dinámico. La parte de la dinámica que estudia este tipo de sistemas discretos, se le llama *dinámica topológica*. En este trabajo analizaremos este tipo de sistemas dinámicos y la definición que usaremos es la siguiente:

Definición 2.1.6. Sean X un espacio métrico y $f : X \to X$ una función continua que cumple con las siguientes propiedades:

1. $f^0(x) = x$, para todo $x \in X$, esto es $f^0(x) = I_X$,
2. $f^n(f^m(x)) = f^{n+m}(x)$, para todo $m, n \in \mathbb{Z}$ y para todo $x \in X$.

Al par (X, f), constituido por el espacio métrico X y la función continua $f : X \to X$, se denomina *sistema dinámico discreto*.

Observación 2.1.7. De aquí en adelante, $f^{-n}(A)$ denota a $(f^n)^{-1}(A)$, es decir, la preimagen de conjunto $A \subset X$.

Definición 2.1.8. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$.

1. La órbita futura de x bajo f se denota y define como $\mathcal{O}^+ = \{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\} = \mathcal{O}^+(x, f)$,
2. La órbita pasada de x bajo f se denota y define como $\mathcal{O}^- = \{f^{-n}(x) : n \in \mathbb{N}\} = \mathcal{O}^-(x, f)$,
3. En general, la órbita de un punto x bajo f se denota y define como $\mathcal{O} = \mathcal{O}(x, f) = \mathcal{O}^+(x, f) \cup \mathcal{O}^-(x, f)$.

Observación 2.1.9. Con los elementos de la órbita, $\mathcal{O}(x, f)$, podemos definir la siguiente sucesión: $x_0 = x$, $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1) = f^2(x_0)$,..., $x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0)$. Entonces analizar el comportamiento de la órbita es equivalente a estudiar el límite de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Es importante aclarar que en varias referencias la sucesión de recurrencias $x_{n+1} = f(x_n) = f^{n+1}(x_0)$ se le llama sistema dinámico discreto.

Dado un espacio métrico X y una función $f : X \to X$, nos resulta interesante estudiar los $x \in X$ tales que $f(x) = x$. Por ello, es necesario dar la siguiente definición.

Definición 2.1.10. Sean X un espacio métrico, $x \in X$ y $f : X \to X$ una función continua. Decimos que x es *un punto fijo* de f o *punto de equilibrio* si $f(x) = x$; decimos que x es un *punto periódico* de f si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = x$. Al conjunto de todos los puntos periódicos de f lo denotaremos con $Per(f)$. Si $x \in Per(f)$, entonces

$$n_0 = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : f^n(x) = x\}$$

se le llama periodo de x.

Despues de la Definición 2.1.10, podemos concluir las siguientes observaciones.

Observación 2.1.11. Podemos observar que:

1. Si x es un punto fijo de f, entonces $x \in Per(f)$ y x tiene periodo 1.
2. Si x es un punto fijo de f, entonces $\mathcal{O}(x, f) = \{x\}$.

Observación 2.1.12. Se dice que x es un punto periódico de f de periodo n si y sólo si $f^n(x) = x$ y para cada $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ se tiene que $f^i(x) \neq x$.

Definición 2.1.13. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Se dice que $\mathcal{O}(x, f)$ es *asintóticamente periódica* o que x es *asintóticamente periódico* si existe $y \in Per(f)$ tal que $\text{lím}_{k\to\infty} d(f^k(x), f^k(y)) = 0$.

Observación 2.1.14. Sean (X, d) un espacio métrico, $f : X \to X$ continua y $x \in X$.

1. Si x es un punto periódico de periodo k, entonces $\mathcal{O}^+(x, f) = \{x, f(x), \ldots, f^{k-1}(x)\}$.
2. Sean $k, m \in \mathbb{N}$, entonces $f^{k+m}(x) = f^k(f^m(x))$ y $(f^k)^m(x) = f^{km}(x)$.

Con motivo de seguir estudiando los sistemas dinámicos enunciamos la siguiente definición.

Definición 2.1.15. Sean (X, d) un espacio métrico, $f : X \to X$ continua y $x \in X$. Se dice que x es un punto *preperiódico* si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(x) \in Per(f)$ y $x \notin Per(f)$.

Ejemplo 2.1.16. Para ver un ejemplo de un punto preperiódico, consideremos la función $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Notemos que si $x = -1$, se sigue que $f(x) = 0$, $f^2(x) = f(f(x)) = f(0) = 1$, $f^3(x) = f(f^2(x)) = f(1) = 0$, $f^4(x) = f(f^3(x)) = f(0) = 1$, así, en general:

$$f^m(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } m \text{ es impar;} \\ 1, & \text{si } m \text{ es par.} \end{cases}$$

De aquí, para todo $m \in \mathbb{N}$, $f^m(-1) \neq -1$. Luego, $\{-1\} \notin Per(f)$. Observemos que $f(-1) \in Per(f)$. En efecto, $f(f(-1)) = f(0) = 1$, así, $f^2(f(-1)) = f(f(f(-1))) = f(1) = 0$. En consecuencia, $f^2(f(-1)) = f(-1)$. Por lo tanto, $x = -1$ es un punto preperiódico de f.

Observación 2.1.17. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $n < m$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(f^n(x)) = f^m(x)$.

Observación 2.1.18. Note que si $x \in Per(f)$ y n es el periodo de x. Entonces se tiene que $f^{\alpha n}(x) = \underbrace{f^n \circ \ldots \circ f^n(x)}_{\alpha \text{ veces}} = x$, para $\alpha \in \mathbb{N}$.

Con el objetivo de seguir estudiando la dinámica que tiene una función f, enunciamos las siguientes definiciones y resultados.

Definición 2.1.19. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Se dice que $\mathcal{O}(x, f)$ es *asintóticamente fija* o *asintóticamente fijo*, si existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = x_0$ y $\text{lím}_{n\to\infty} f^n(x) = x_0$.

Teorema 2.1.20. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x_0, y_0 \in X$. Si $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = y_0$, entonces $f(y_0) = y_0$.

Demostración.
Supongamos que $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = y_0$. Luego, por el Teorema 1.3.9, se sigue que $\{f^n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy. Notemos que $\{f^{n+1}(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{f^n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$. Así, por el Teorema 1.3.10, $\lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x_0) = y_0$. Por otro lado, dada la continuidad de f se sigue que $f(y_0) = f(\lim_{n\to\infty} f^n(x_0)) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x_0) = y_0$. $\square$

Definición 2.1.21. Sean (X, d) un sistema dinámico y x_0 un punto fijo de f. Se dice que x_0 es un *punto fijo atractor* si existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X$ y $d(x, x_0) < \delta$, entonces $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_0$.

De forma intuitiva, si x_0 es un punto fijo atractor, todos los puntos que pertenezcan a la δ-vecindad del punto fijo x_0 se acercarán eventualmente a ella.

Observación 2.1.22. Sean (X, d) un sistema dinámico y x_0 un punto fijo de f. La definición de punto fijo atractor x_0 es equivalente a:

1. Si $x \in B(\delta, x_0)$, entonces $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_0$.
2. Si existe un abierto U en X con $x_0 \in U$ tal que $x \in U$, entonces $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_0$.

Definición 2.1.23. Sean (X, d) un sistema dinámico y x_0 un punto fijo de f. Se dice que x_0 es un *punto fijo repulsor* si existe $\delta > 0$ tal que si $x \in B(\delta, x_0) \setminus \{x_0\}$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \notin B(\delta, x_0)$.

Observación 2.1.24. Notemos que un punto fijo repulsor no es necesariamente lo contrario a un punto fijo atractor. La definición dice que todos los puntos que pertenezcan a la δ-vecindad del punto fijo repulsor, excepto él mismo, se alejarán eventualmente de ella. Observemos que la definición no niega que los puntos de la δ-vecindad, en algún momento pueden retornar.

La importancia de conocer al punto fijo x_0 ya sea atractor o repulsor de una función f es que nos brinda información sobre la vecindad de x_0. Si x_0 es un punto atractor, entonces las órbitas de todos los puntos cercanos a x_0 convergen a x_0. Por otro lado, si x_0 es un punto repulsor, entonces las órbitas de los puntos cercanos a x_0 escapan en un tiempo finito que depende de cada punto. A los puntos que no son atractores ni repulsores se les llama *puntos indiferentes* o *puntos fijos neutros*.

2.2. Sistemas dinámicos discretos unidimensionales

Antes de continuar con la teoría, conviene ver algunos ejemplos para ilustrar los conceptos previamente definidos. Por lo tanto, nuestro primer ejemplo será una de las funciones más sencillas.

Ejemplo 2.2.1. Consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -x^3$. Observemos que el único punto fijo de f es $x = 0$ y f tiene dos puntos periódicos de periodo 2, los cuales son 1 y -1. En efecto, $f(1) = -1$ y $f(-1) = 1$. De aquí, $f^2(1) = f(f(1)) = f(-1) = 1$ y $f^2(-1) = f(f(-1)) = f(1) = -1$.

Ejemplo 2.2.2. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $f(x) = ax + b$.
Observemos que para cada pareja de valores a, b se obtiene una función lineal. Por esto, la dinámica de dicha función dependerá de estos valores y es conveniente analizar los posibles valores de a y b.

(I) Si $a = 0$.
En este caso, nuestra función se reduce a $f(x) = b$. Sea $x \in \mathbb{R}$. Notemos que si $x = b$ se tiene que $f^0(x) = I_x$, $f^1(x) = f(x) = b$, $f^2(x) = f(f(x)) = b$, así, en general se tiene que $f^n(x) = b$ para $n \geq 1$. Observemos que $\mathcal{O}^+(b, f) = \{b\}$ y $\mathcal{O}^-(b, f) = \{f^{-n}(b) : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{R}$. Por otro lado, si $x \neq b$, se tiene que $\mathcal{O}^+(x, f) = \{x, b\}$ y $\mathcal{O}^-(x, f) = \emptyset$.

(II) Si $b = 0$.
En este caso, nuestra función se reduce a $f(x) = ax$. Sea $x \in \mathbb{R}$. Observemos que $f^2(x) = f(f(x)) = f(ax) = a^2x$ y en general se tiene que $f^n(x) = a^nx$, para $n \in \mathbb{N}$. Notemos que el único punto fijo de f es $x = 0$, así, $\mathcal{O}(0, f) = \{0\}$ y $\mathcal{O}^+(x, f) = \{a^nx : n \in \mathbb{N}\}$. Por otro lado, para toda pareja de puntos x y y se tiene que $|f(x) - f(y)| = |a||x - y|$. Así, en general $|f^n(x) - f^n(y)| = |a^nx - a^ny| = |a^n(x-y)| = |a|^n|x-y|$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Observemos que $|a| > 0$ y $|f(x)-f(y)| \leq |a||x-y|$, luego, f es una función de Lipschitz. Si consideramos una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, como en la Observación 2.1.9, tenemos que:

- Si $|a| < 1$, entonces f es una contracción y $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.
- Si $|a| > 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.
- Si $a = 1$, entonces $\mathcal{O}^+(x, f) = \{x\}$.
- Si $a = -1$, entonces $\mathcal{O}^+(x, f) = \{x, -x\}$.

(III) Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$.
En este caso, nuestra función es $f(x) = ax + b$. Sea $x \in \mathbb{R}$. Notemos que

$$f^0(x) = I_X$$

$$f^1(x) = f(x) = ax + b$$

$$f^2(x) = f(f(x)) = f(ax + b) = a^2x + ab + b$$

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = f(a^2x + ab + b) = a^3x + a^2b + ab + b$$

$$\vdots$$

$$f^n(x) = a^nx + b\sum_{k=1}^{n} a^{n-k} = a^nx + b\left(\frac{1-a^n}{1-a}\right).$$

Así, se sigue que $\mathcal{O}^+(x, f) = \{x\} \cup \{a^nx + b\left(\frac{1-a^n}{1-a}\right) : n \in \mathbb{N}\}$.

Ejemplo 2.2.3. Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ tal que $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ (Vea Figura 2.1). Primero analicemos los puntos fijos de f. Para ello buscamos los puntos $x \in [0, 1]$ tales que $f(x) = x$, es decir, aquellos que cumplen que $\sqrt{1-x^2} = x$. Usando álgebra se tiene que $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ó $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Dado que el dominio de nuestra función es $[0, 1]$, el único punto fijo que tiene f es $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Por otro lado,

$$f^0(x) = I_X$$

$$f^1(x) = f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$f^2(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{1-x^2}) = \sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2} = x$$

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\vdots$$

$$f^n(x) = \begin{cases} x, & \text{si } n \text{ es par;} \\ \sqrt{1-x^2}, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Así, se sigue que $\mathcal{O}^+(x,f) = \{x, \sqrt{1-x^2}\}$.

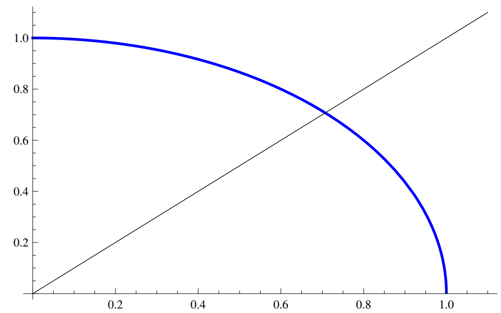

Figura 2.1: Gráfica de la función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ y de la función $f(x) = x$.

Ejemplo 2.2.4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]; \\ \frac{3}{2} - x, & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

En la Figura 2.2 se puede ver la gráfica de la función f. Observemos que por la naturaleza de la función f es conveniente estudiar sus puntos fijos en dos casos. Si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, para que x sea un punto fijo se debe cumplir que $2x = x$, es decir, $x = 0$. Por otro lado, si $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, para que x sea un punto fijo se debe cumplir que $\frac{3}{2} - x = x$, es decir, $x = \frac{3}{4}$. En consecuencia, f tiene dos puntos fijos. Para continuar con el estudio de f, analicemos el comportamiento de $f^2(x)$.

1. Si $x \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$, se sigue que $f(x) = 2x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Por lo cual $f^2(x) = f(2x) = 4x$.
2. Si $x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$, se sigue que $f(x) = 2x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Por lo cual $f^2(x) = f(2x) = \frac{3}{2} - 2x$.
3. Si $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$, se sigue que $f(x) = \frac{3}{2} - x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]$. Por lo cual $f^2(x) = f\left(\frac{3}{2} - x\right) = x$.
4. Si $x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]$, se sigue que $f(x) = \frac{3}{2} - x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$. Por lo cual $f^2(x) = f\left(\frac{3}{2} - x\right) = x$.

Notemos que los puntos fijos de f^2 son $x = 0$ y $x = \frac{3}{4}$.

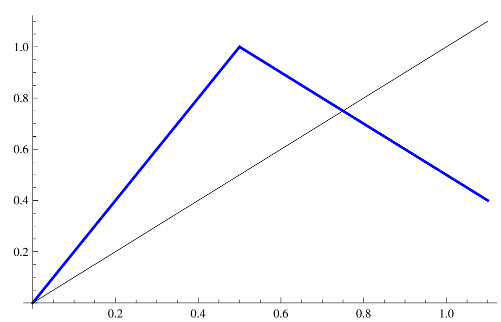

Figura 2.2: Gráfica de la función f definida en el Ejemplo 2.2.4 y de la función $f(x) = x$.

Como podemos observar en estos ejemplos, existen funciones en las cuales estudiar sus puntos fijos resulta un trabajo arduo. Para facilitar dicha tarea, veremos algunos resultados que nos serán útiles para identificar a los puntos fijos atractores o repulsores.

Teorema 2.2.5. Sean A un intervalo en $\mathbb{R}$, $f : A \to A$ una función continua en A y $x_0 \in A$ tal que $f(x_0) = x_0$. Supongamos que f es derivable en x_0.

1. Si $|f'(x_0)| < 1$, entonces x_0 es un punto fijo atractor.
2. Si $|f'(x_0)| > 1$, entonces x_0 es un punto fijo repulsor.

Demostración.
1) Supongamos que $|f'(x_0)| < 1$. Veamos que x_0 es un punto fijo atractor, es decir, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X$ y $d(x, x_0) < \delta$, entonces $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_0$. Recordemos que una forma de definir a la derivada de una función f en cualquier punto a de su dominio es de la siguiente manera: $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. De aquí, se sigue que $\left|\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| = |f'(x_0)| < 1$. Dado que $f(x_0) = x_0$, se tiene que $\left|\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-x_0}{x-x_0}\right| < 1$. Como la función valor absoluto es continua, se sigue que $\lim_{x\to x_0} \left|\frac{f(x)-x_0}{x-x_0}\right| < 1$. Por otro lado, sea α un número real fijo tal que $\lim_{x\to x_0} \left|\frac{f(x)-x_0}{x-x_0}\right| < \alpha < 1$. Así, existe un $\delta_1 > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta_1$, entonces $\left|\frac{f(x)-x_0}{x-x_0}\right| < \alpha$, es decir, $|f(x) - x_0| < \alpha|x - x_0|$. Observemos que si aplicamos f al punto $f(x)$ obtenemos que $|f^2(x) - x_0| < \alpha|f(x) - x_0| < \alpha^2|x - x_0|$. De forma general se tiene que $|f^n(x) - x_0| < \alpha^n|x - x_0|$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $0 < \alpha < 1$, así, $\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0$. En conclusión, si $|x - x_0| < \delta_1$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_0$. Sea $\delta = \delta_1$. Con esta elección del δ, se tiene que x_0 es un punto fijo atractor.
2) Supongamos que $|f'(x_0)| > 1$. Veamos que x_0 es un punto fijo repulsor, es decir, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in B(\delta, x_0) \setminus \{x_0\}$ se tiene que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^N(x) \notin B(\delta, x_0)$. Procediendo de forma similar a 1), existe $\delta_1 > 0$ y α un número real fijo tal que si $|x - x_0| < \delta_1$ y $x \neq x_0$ se tiene que $\left|\frac{f(x)-x_0}{x-x_0}\right| > \alpha > 1$, es decir, $|f(x) - x_0| > \alpha|x - x_0|$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Observemos que si para cada $0 \leq i \leq n$ se tiene que $f^i(x) \in B(\delta_1, x_0)$, entonces $|f^n(x) - x_0| > \alpha^n|x - x_0|$. Dado que $\alpha > 1$, $\lim_{n\to\infty} \alpha^n = \infty$. Es decir, existe $N \in \mathbb{N}$ que depende de x para el cual $f^N(x) \notin B(\delta_1, x_0)$. Sea $\delta = \delta_1$. Con esta elección del δ, se tiene que x_0 es un punto fijo repulsor. $\square$

Observación 2.2.6. En el Teorema 2.2.5, si x_0 es un punto fijo de f y se tiene que $|f'(x_0)| = 1$, entonces no se puede afirmar nada sobre el punto x_0.

Si $f(x_0) = x_0$ y la derivada de f en x_0 es cero, decimos que x_0 es un *punto fijo súper atractor de f*. El siguiente teorema nos será de utilidad para saber si una función f tiene al menos un punto fijo. Cabe mencionar que por $f([a, b])$ nos referimos a la imagen de $[a, b]$ bajo f, es decir, $f([a, b]) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x), \text{ para algún } x \in [a, b]\}$.

Teorema 2.2.7. Sean A un intervalo en $\mathbb{R}$ y $f : A \to A$ una función continua en A. Sean $[a, b]$ un intervalo contenido en A.

1. Si $f([a, b]) \subset [a, b]$, entonces f tiene un punto fijo en $[a, b]$.
2. Si $[a, b] \subset f([a, b])$, entonces f tiene un punto fijo en $[a, b]$.

Demostración.
1) Supongamos que $f([a, b]) \subset [a, b]$. Veamos que f tiene un punto fijo en $[a, b]$, es decir, existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = x_0$. Dado que $f([a, b]) \subset [a, b]$, se tiene que $a \leq f(a)$ y $f(b) \leq b$. Sea $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = f(x) - x$. Observemos que la función h es continua en $[a, b]$. Por otro lado, $h(a) = f(a) - a \geq 0$ y $h(b) = f(b) - b \leq 0$. En consecuencia, $h(b) \leq 0 \leq h(a)$. Por el Teorema del valor intermedio (Teorema 1.5.24), existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $h(x_0) = 0$. Por lo tanto $f(x_0) = x_0$.
2) Supongamos que $[a, b] \subset f([a, b])$. Veamos que f tiene un punto fijo en $[a, b]$, es decir, existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = x_0$. Dado que $[a, b] \subset f([a, b])$, existen α y β en $[a, b]$ tales que $f(\alpha) = a$ y $f(\beta) = b$. Notemos que $a \leq \alpha \leq b$ y $a \leq \beta \leq b$. En consecuencia, se tiene que $f(\alpha) \leq \alpha$ y $f(\beta) \geq \beta$. Sea

$h : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = f(x) - x$. Observemos que la función h es continua en $[a, b]$. Por otro lado, $h(\alpha) = f(\alpha) - \alpha \leq 0$ y $h(\beta) = f(\beta) - \beta \geq 0$. De donde se sigue que $h(\alpha) \leq 0 \leq h(\beta)$. Por el Teorema del valor intermedio (Teorema 1.5.24), existe $x_0 \in [\alpha, \beta]$ o $x_0 \in [\beta, \alpha]$ tal que $h(x_0) = 0$. Por lo tanto, $f(x_0) = x_0$. □

El siguiente teorema no nos garantiza la existencia de puntos periódicos de f de periodo 1, sólo nos brinda un herramienta para descartar en funciones crecientes a puntos periódicos de f de periodo mayor a 1.

Teorema 2.2.8. Sean A un intervalo en $\mathbb{R}$ y $f : A \to A$ una función continua en A. Si f es estrictamente creciente, entonces f sólo puede tener puntos de periodo a lo más 1.

Demostración.
Supongamos que x es un punto periódico de f de periodo 2, es decir, $f(x) \neq x$ y $f^2(x) = x$. Notemos que sólo existen dos posibles casos; $x < f(x)$ o $x > f(x)$. Si $x < f(x)$, dado que la función f es creciente se sigue que $f(x) < f^2(x)$. Es decir, $x < f(x) < f^2(x)$. Así, $x < x$. Por otro lado, si $x > f(x)$ y puesto que la función f es creciente se sigue que $f(x) > f^2(x)$. Es decir, $x > f(x) > f^2(x)$. De donde se tiene que $x > x$. Por lo tanto f no tiene puntos de periodo 2. Ahora supongamos que x es un punto periódico de f de periodo m, es decir, $f(x) \neq x$, $f(x)^2 \neq x$, $\ldots$, $f(x)^{m-1} \neq x$ y $f^m(x) = x$, donde $m \geq 2$. Procediendo de forma similar en el caso anterior sólo existen dos posibles casos; $x < f(x)$ o $x > f(x)$. Si $x < f(x)$, dado que la función f es creciente se sigue que $x < f^m(x)$. Es decir, $x < x$. Por otro lado, si $x > f(x)$, y puesto que la función f es creciente se sigue que $x > f^m(x)$. De donde se sigue que $x > x$. Por lo tanto f no tiene puntos de periodo m, donde $m \geq 2$. □

En los siguientes teoremas veremos condiciones para saber si una función continua f tiene un punto fijo de periodo 1.

Teorema 2.2.9. Sean I un intervalo en $\mathbb{R}$ y $f : I \to I$ una función continua en I. Si f tiene un punto de periodo 2, entonces f tiene un punto de periodo 1.

Demostración.
Supongamos que $x_1 \in Per(f)$ y es de periodo 2. Así, $\mathcal{O}(x_1, f) = \{x_1, x_2\}$, donde $f(x_1) = x_2$ y $f^2(x_1) = f(f(x_1)) = f(x_2) = x_1$. Veamos que f tiene un punto de periodo 1, esto es, que existe $x_0 \in I$ tal que $\mathcal{O}(x_0, f) = \{x_0\}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x_1 < x_2$. De aquí, $f(x_2) < x_2$ y $x_1 < f(x_1)$. Luego, $f(x_2) - x_2 < 0$ y $0 < f(x_1) - x_1$. Es decir, $f(x_2) - x_2 < 0 < f(x_1) - x_1$. Sea $h : I \to I$ dada por $h(x) = f(x) - x$. Observemos que la función h es continua en I. Por otro lado, $h(x_2) = f(x_2) - x_2 < 0$ y $h(x_1) = f(x_1) - x_1 > 0$. De donde se sigue que $h(x_2) < 0 < h(x_1)$. Por el Teorema del valor intermedio (Teorema 1.5.24), existe $x_0 \in (x_1, x_2) \subset I$ tal que $h(x_0) = 0$. En consecuencia $f(x_0) = x_0$. Por lo tanto, $\mathcal{O}(x_0, f) = \{x_0\}$, es decir, x_0 es de periodo 1. □

El siguiente teorema es la generalización del Teorema 2.2.9, por lo cual no resulta extraño que sus demostraciones sean similares.

Teorema 2.2.10. Sean I un intervalo en $\mathbb{R}$, $f : I \to I$ una función continua en I y $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 1$. Si f tiene un punto de periodo n, entonces f tiene un punto de periodo 1.

Demostración.
Supongamos que $x \in Per(f)$ y es de periodo $n \geq 2$. Veamos que f tiene un punto de periodo 1, esto es, que existe $x_0 \in I$ tal que $\mathcal{O}(x_0, f) = \{x_0\}$. Notemos que $\mathcal{O}(x, f)$ tiene n elementos. Si ordenamos estos n elementos de $\mathcal{O}(x, f)$ en forma creciente tenemos que $x_1 < x_2 <, \ldots, < x_n$. Observemos que x_1 es el menor de los elementos de $\mathcal{O}(x, f)$ y x_n es el mayor de los elementos de $\mathcal{O}(x, f)$. Así, $f(x_1) > x_1$ y $f(x_n) < x_n$. De donde se tiene que $f(x_1) - x_1 > 0$ y $f(x_n) - x_n < 0$. Sea $h : I \to I$ dada por $h(x) = f(x) - x$. Observemos que la función h es continua en I. Por otro lado, $h(x_n) = f(x_n) - x_n < 0$ y $h(x_1) = f(x_1) - x_1 > 0$. De donde se sigue que $h(x_n) < 0 < h(x_1)$. Por el Teorema del valor intermedio

(Teorema 1.5.24), existe $x_0 \in (x_1, x_n) \subset I$ tal que $h(x_0) = 0$. En consecuencia, $f(x_0) = x_0$. Por lo tanto, $\mathcal{O}(x_0, f) = \{x_0\}$, es decir, x_0 es de periodo 1. $\square$

Notemos que el teorema anterior sólo nos garantiza la existencia del punto de periodo 1, pero no nos brinda una forma de encontrar dicho punto. El siguiente resultado nos será de utilidad en varias demostraciones, por tal motivo es conveniente analizar su demostración.

Teorema 2.2.11. Sean I un intervalo en $\mathbb{R}$ y $f : I \to I$ una función continua en I. Sean $[a, b]$ y $[c, d]$ intervalos contenidos en I. Si $[c, d] \subseteq f([a, b])$, entonces existe un subintervalo cerrado $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ tal que $f([\alpha, \beta]) = [c, d]$.

Demostración.
Supongamos que $[c, d] \subseteq f([a, b])$. Veamos que existe un subintervalo cerrado $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ tal que $f([\alpha, \beta]) = [c, d]$. Dado que $[c, d] \subseteq f([a, b])$, existen dos puntos s y t en $[a, b]$ tales que $f(s) = c$ y $f(t) = d$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $s < t$. Puesto que f es continua, existe un punto $x \in [s, t]$ tal que $f(x) = c$. Consideremos $\alpha = \sup\{x \in [s, t] : f(x) = c\}$. Por la forma en que construimos a α tenemos que $[c, d] \subseteq f([\alpha, t])$. Por otro lado, notemos que dado que f es continua, existen puntos $x \in [\alpha, t]$ tales que $f(x) = d$. Consideremos $\beta = \text{ínf}\{x \in [\alpha, t] : f(x) = d\}$. Claramente $\alpha < \beta$. Por la forma en que escogimos a α y β tenemos que $f([\alpha, \beta]) = [c, d]$. $\square$

Los siguientes dos teoremas nos dan herramientas que nos ayudarán a encontrar puntos periódicos.

Teorema 2.2.12. Sean A un intervalo en $\mathbb{R}$ y $f : A \to A$ una función continua en A. Si f tiene una órbita de periodo 3, entonces tiene una órbita de periodo 2.

Demostración.
Supongamos que f tiene una órbita de periodo 3, es decir, $\mathcal{O}(a, f) = \{a, b, c\}$ con $a < b < c$ y $a, b, c \in \mathbb{R}$. Veamos que f tiene una órbita de periodo 2, es decir, existe $x_0 \in A$ tal que $\mathcal{O}(x_0, f) = \{x_0, f(x_0)\}$ donde $f(x_0) \neq x_0$. Observemos que la órbita de a tiene dos opciones de recorrido. En el primer caso, $b = f(a)$, $c = f(b)$ y $f(c) = a$. En el segundo caso, $c = f(a)$, $b = f(c)$ y $f(b) = a$. Procederemos a demostrar para el primer caso, con la idea de que para el segundo caso es similar. Por simplicidad, pongamos $I = [a, b]$ y $J = [b, c]$. Notemos que dada la continuidad de f y el hecho de que $a < b < c$, se tiene que $J \subseteq f(I)$ y $I \cup J \subseteq f(J)$. Dado que $I \subseteq f(J)$ y por el Teorema 2.2.11, se sigue que existe $A_1 \subset J$ subintervalo tal que $f(A_1) = I$. Por otro lado, puesto que $J \subseteq f(I)$ y $A_1 \subset J$, tenemos que $A_1 \subset f(I)$. Luego, por el Teorema 2.2.11, se sigue que existe $A_2 \subset I$ subintervalo tal que $f(A_2) = A_1$. De donde, $f^2(A_2) = f(A_1) = I$. En consecuencia, $A_2 \subseteq f^2(A_2)$. Así, por el Teorema 2.2.7, existe $x_0 \in A_2$ tal que $f^2(x_0) = x_0$. Notemos que $f(x_0) \neq x_0$. En efecto, supongamos que $f(x_0) = x_0$. Observemos que $x_0 \in A_2 \subset I$. Luego, $f(x_0) \in f(A_2) = A_1 \subset J$. Así, $f(x_0) \in I \cap J$. De manera que $f(x_0) = b$. Por tal motivo, $f(b) = b$. Lo cual es una contradicción pues $f(b) = c$. Por lo tanto, $\mathcal{O}(x_0, f) = \{x_0, f(x_0)\}$. En conclusión, f tiene una órbita de periodo 2. $\square$

Observación 2.2.13. Observemos que por los Teoremas 2.2.10 y 2.2.12, si f tiene una órbita de periodo 3, entonces f tiene órbitas de periodo 2 y 1.

El siguiente teorema es la generalización del Teorema 2.2.12, conocido como el Teorema de *Li-Yorke*.

Teorema 2.2.14. Sean A un intervalo en $\mathbb{R}$ y $f : A \to A$ una función continua en A. Si f tiene una órbita de periodo 3, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, f tiene una órbita de periodo n.

Demostración.
Supongamos que f tiene una órbita de periodo 3, es decir, $\mathcal{O}(a, f) = \{a, b, c\}$ con $a < b < c$ y $a, b, c \in \mathbb{R}$. Veamos que f tiene una órbita de periodo n, en otras palabras, existe $x_0 \in A$ tal que $\mathcal{O}(x_0, f) = \{x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\}$ donde $f^i(x_0) \neq x_0$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Observemos que la órbita

de a tiene dos opciones de recorrido. Procediendo de forma similar a la demostración del Teorema 2.2.12, sólo analizaremos el caso donde $b = f(a)$, $c = f(b)$ y $f(c) = a$. Pongamos $I = [a, b]$ y $J = [b, c]$. Notemos que dada la continuidad de f y el hecho de que $a < b < c$, se tiene que $J \subseteq f(I)$ y $I \cup J \subseteq f(J)$. Dado que $I \subseteq f(J)$ y por el Teorema 2.2.11, se sigue que existe $A_1 \subset J$ subintervalo tal que $f(A_1) = I$. Por otro lado, puesto que $A_1 \subset J \subset I \cup J \subseteq f(J)$ por el Teorema 2.2.11, se sigue que existe $A_2 \subset J$ subintervalo tal que $f(A_2) = A_1$. De forma similar, dado que $A_2 \subset J \subset I \cup J \subseteq f(J)$ por el Teorema 2.2.11, se sigue que existe $A_3 \subset J$ subintervalo tal que $f(A_3) = A_2$. Procediendo de esta forma definimos los intervalos $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, todos ellos contenidos en J, y tales que $f(A_i) = A_{i-1}$, donde $2 \leq i \leq n-1$. Dado que $A_{n-1} \subset J \subset f(I)$, por el Teorema 2.2.11, se sigue que existe $A_n \subset I$ subintervalo tal que $f(A_n) = A_{n-1}$. Notemos que $A_n \subseteq I$ y $f^n(A_n) = I$. Así, $A_n \subseteq f^n(A_n)$. Luego, por el Teorema 2.2.7, existe $x_0 \in A_n$ tal que $f^n(x_0) = x_0$. Veamos que x_0 es de periodo n, para esto, basta verificar que $f^i(x_0) \neq x_0$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Supongamos que existe $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ tal que $f^k(x_0) = x_0$. Dado que $x_0 \in I$, tenemos que $f^k(x_0) = x_0 \in I$. Por otro lado, dada la forma en que definimos los intervalos $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ y el hecho de que $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ se tiene que $f^k(x_0) = x_0 \in J$. Así, $f^k(x_0) \in I \cap J$. De manera que $f^k(x_0) = b$. Por tal motivo, $f^k(b) = b$. Lo cual es una contradicción pues $f(b) = c$. Por lo tanto, $f^i(x_0) \neq x_0$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. En conclusión, f tiene una órbita $\mathcal{O}(x_0, f)$ de periodo n. □

Para entender mejor la dinámica que tienen algunas funciones respecto a la órbita de un punto x es conveniente estudiar sus gráficas.

2.3. Diagramas de Cobweb o red de araña

En esta sección veremos una forma de analizar la órbita de un punto x_0 bajo una función f continua. Sean A un intervalo en $\mathbb{R}$ y $f : A \to A$ una función continua en A. Para graficar el comportamiento de un punto x_0 bajo la función f seguimos los siguientes pasos:

1. Graficar las curvas de las funciones $f(x)$ y $y = x$ para todo $x \in A$.
2. Encontrar el valor de $f(x_0)$. Así, tendremos el punto $(x_0, f(x_0))$.
3. Trazar una línea recta horizontal de este punto a la función identidad. Al cruzar con la recta identidad encontramos el punto $(f(x_0), f(x_0))$.
4. Trazar una línea recta vertical del punto previamente encontrado a la gráfica de la función f. Al cruzar con la gráfica de f encontramos el punto $(f(x_0), f^2(x_0))$. Repetir desde el Paso 3 las veces deseadas.

Al diagrama generado por el método mencionado previamente se le conoce como *Diagrama de Cobweb de f*. Para facilitar el desarrollo de este diagrama podemos hacer uso de la programación con Mathematica. Enseguida se muestra el código implementado para llevar dicha tarea a cabo.

```
cobweb[funcion_, x0_, numpasos_, iniciox_, finx_, inicioy_, finy_] :=
 Module[{k},
  (*Programa para realizar el diagrama de Cobweb en Mathematica por Victor Manuel G.
  Altamirano*)

  (*iteraciones es la lista con las funciones iteradas*)
  iteraciones = NestList[funcion, x0, numpasos + 1];

  (*Listaxy es la lista de las parejas (x,y) a graficar *)
  Listaxy = {{x0, 0}, {x0, funcion[x0]}};

  (*Aqui simulamos los pasos 3 y 4 descritos en el metodo para \
```

```
realizar el diagrama de Cobweb*)
  For[k = 1, k <= numpasos, k++,
   AppendTo[
    Listaxy, { iteraciones[[k + 1]], iteraciones[[k + 1]] } ] ;
   AppendTo[Listaxy, {iteraciones[[k + 1]], iteraciones[[k + 2]]}]];

  (*g1 es la grafica de la funcion identidad y la funcion dada*)
  g1 = Plot[{funcion[x], x}, {x, iniciox, finx},
    PlotRange -> {inicioy, finy},
    PlotStyle -> { {Thick, RGBColor[0, 0, 1]}, {Black}}];

  (*g2 es la grafica de las parejas (x,y) en la Listaxy*)
  g2 = ListPlot[Listaxy, Joined -> True,
    PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0]];

  (*Muestra las graficas g1 y g2 simultaneamente*)
  Show[g1, g2]
  ]
```

Los nombres de las variables usadas en el código anterior son muy intuitivas. La variable $funcion$, es la función la cual nos interesa estudiar, cabe aclarar que dicha función debe ser definida previamente (Vea Ejemplo 2.3.1). Por otro lado, las variables *iniciox* y $finx$ forman al intervalo $[iniciox, finx]$, el cual representa el dominio de f que nos interesa estudiar. De forma similar, las variables *inicioy* y $finy$ forman al intervalo $[inicioy, finy]$, el cual representa la imagen de f que nos interesa analizar. La variable *numpasos* es el número de repeticiones de los pasos 3 y 4 descritos en el método para realizar el diagrama Cobweb, esta variable debe ser ajustada en relación a los intervalos $[iniciox, finx]$ y $[inicioy, finy]$. Por último, x_0 es el punto a partir del cual se empezará el diagrama Cobweb, este punto debe estar en el intervalo $[iniciox, finx]$. El uso incorrecto de estas variables puede causar resultados no deseados.

Enseguida mostramos el modo correcto para usar el código.

Ejemplo 2.3.1.

```
(*Definimos previamente las funciones que nos interesan*)
T[x_] := Piecewise[{{2 x, x <= 1/2}, {2 - 2 x, x > 1/2}}];
cob1[x_] := 2 x;
cob2[x_] := -x + 1;
cob3[x_] := x*x*x;
cob4[x_] := (-5/4)*x + (5/2);


(*su grafica es la Figura 2.3*)
cobweb[cob1, 0.1, 6, 0, 0.9, 0, 1.7]

(*su grafica es la Figura 2.4*)
cobweb[cob4, 0.9, 7, 0, 2.2, 0, 2.5]

(*su grafica es la Figura 2.5*)
cobweb[cob2, 0.1, 6, 0, 1, 0, 1]

(*su grafica es la Figura 2.6*)
cobweb[cob3, 0.9, 5, -1, 1, -1, 1]

(*su grafica se encuentra en la Figura 2.7*)
cobweb[T, 0.7, 9, 0, 1, 0, 1]
```

A continuación mostramos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.3.2. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x$. Observemos que el único punto fijo de f es $x = 0$. El diagrama de Cobweb de f con $x_0 = 0.1$ se muestra en la Figura 2.3.

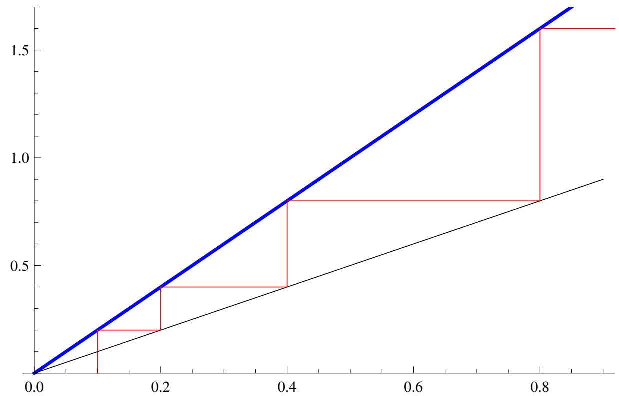

Figura 2.3: Diagrama Cobweb de la función $f(x) = 2x$, donde $x_0 = 0.1$.

Ejemplo 2.3.3. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -\frac{5}{4}x + \frac{5}{2}$. Observemos que el único punto fijo de f es $x = \frac{10}{9}$. El diagrama de Cobweb de f con $x_0 = 0.9$ se muestra en la Figura 2.4.

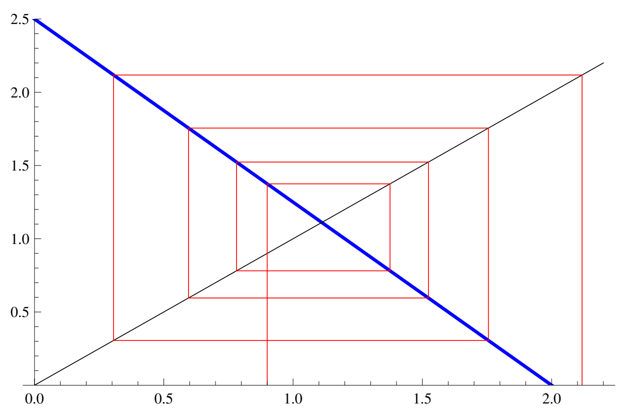

Figura 2.4: Diagrama Cobweb de la función $f(x) = -\frac{5}{4}x + \frac{5}{2}$, donde $x_0 = 0.9$.

Ejemplo 2.3.4. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -x + 1$. Observemos que el único punto fijo de f es $x = \frac{1}{2}$. El diagrama de Cobweb de f con $x_0 = 0.1$ se muestra en la Figura 2.5.

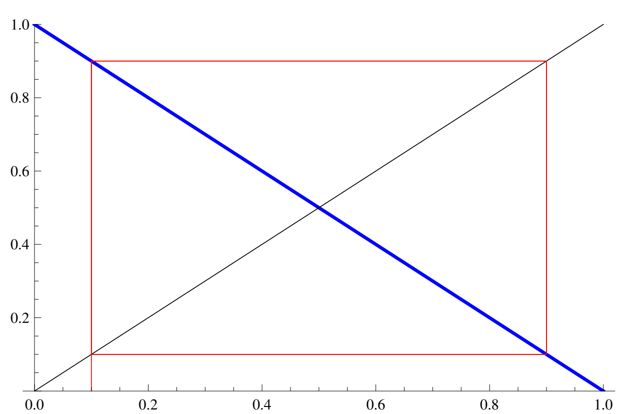

Figura 2.5: Diagrama Cobweb de la función $f(x) = -x + 1$, donde $x_0 = 0.1$.

Ejemplo 2.3.5. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3$. Observemos que los puntos fijos de f son $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$. El diagrama de Cobweb de f con $x_0 = 0.9$ se muestra en la Figura 2.6.

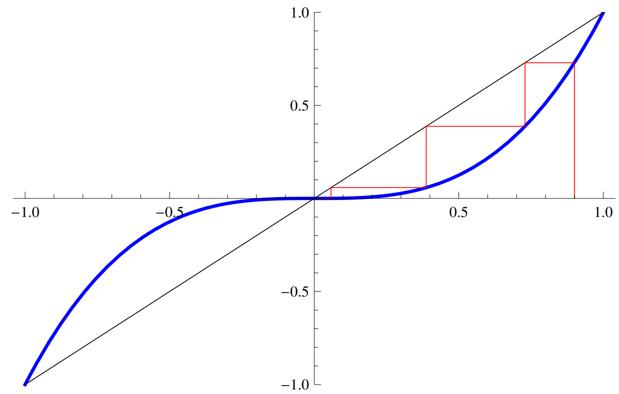

Figura 2.6: Diagrama Cobweb de la función $f(x) = x^3$, donde $x_0 = 0.9$.

En los Ejemplos 2.3.2, 2.3.3 y 2.3.4, podemos observar que sus respectivas funciones son una recta. En cada uno de estos 3 ejemplos la recta tiene diferentes pendientes e intersecta al eje y en diferentes puntos. Observemos que dependiendo del punto x_0 y de las cualidades de nuestra recta, sus correspondientes diagramas de Cobweb tienen comportamientos diferentes. Notemos que en los Ejemplos 2.3.2 y 2.3.3, el diagrama de Cobweb tiende a alejarse del punto fijo de f. Mientras en el Ejemplo 2.3.4, el diagrama de Cobweb llega a ciclarse. Por último, en el Ejemplo 2.3.5, el diagrama de Cobweb tiende a acercarse al punto fijo de f, $x = 0$.

A continuación veremos algunos ejemplos donde podemos ver la utilidad que tiene el Teorema 2.2.5.

Ejemplo 2.3.6. Consideremos la función $f(x) = 2x$ estudiada en el Ejemplo 2.3.2. Notemos que $|f'(0)| > 1$, luego, por el Teorema 2.2.5, se tiene que $x = 0$ es un punto fijo repulsor. En la Figura 2.3, podemos observar que el diagrama de Cobweb escapa del punto fijo.

Ejemplo 2.3.7. Consideremos la función $f(x) = -\frac{5}{4}x + \frac{5}{2}$ estudiada en el Ejemplo 2.3.3. Notemos que $|f'(\frac{10}{9})| > 1$, luego, por el Teorema 2.2.5, se tiene que $x = \frac{10}{9}$ es un punto fijo repulsor. En la Figura 2.4, podemos observar que el diagrama de Cobweb escapa del punto fijo.

Ejemplo 2.3.8. Consideremos la función $f(x) = -x + 1$ estudiada en el Ejemplo 2.3.4. Notemos que $|f'(\frac{1}{2})| = 1$, en este caso el Teorema 2.2.5, no nos brinda información. Pero podemos observar en la Figura 2.5, que el diagrama de Cobweb se cicla alrededor del punto fijo.

Ejemplo 2.3.9. Consideremos la función $f(x) = x^3$ estudiada en el Ejemplo 2.3.5. Notemos que $|f'(0)| < 1$, luego, por el Teorema 2.2.5, se tiene que $x = 0$ es un punto fijo atractor. En la Figura 2.6, podemos observar que el diagrama de Cobweb se acerca al punto fijo y queda atrapado por este.

Observación 2.3.10. Notemos que todos los puntos fijos de una función f son aquellos puntos que intersectan a la función $y = x$.

2.3.1. La función Tienda

Una de las funciones que nos servirá para mostrar muchos de los conceptos que estudiaremos en este trabajo es la función Tienda. La cual está definida de la siguiente manera: Sea $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \le \frac{1}{2}; \\ 2 - 2x, & \text{si } x \ge \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Notemos que la Tienda es una función continua en todo $\mathbb{R}$ (Vea la Figura 2.7). De la gráfica de la función Tienda se puede deducir el porqué de su nombre. De aquí en adelante denotaremos a la función Tienda como T.

Observación 2.3.11. A continuación mostramos algunas propiedades de T que se siguen de forma inmediata.

1. Si $x < 0$, notemos que $T(x) = 2x < x$. Así para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $T^n(x) = 2^n x$. En consecuencia, $\lim_{n\to\infty} T^n(x) = -\infty$.
2. Si $x > 1$, observemos que $T(x) < 0$. En consecuencia, $\lim_{n\to\infty} T^n(x) = -\infty$.
3. Si $x \in [0,1]$, entonces $T(x) \in [0,1]$. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, $T^n(x) \in [0,1]$.
4. T es continua en $[0,1]$.
5. Para toda $x \in [0,1]$, $|T'(x)| = 2$.
6. T es diferenciable para toda $x \in [0,1]$, tal que $x \neq \frac{1}{2}$.
7. $T([0,1]) = [0,1]$.

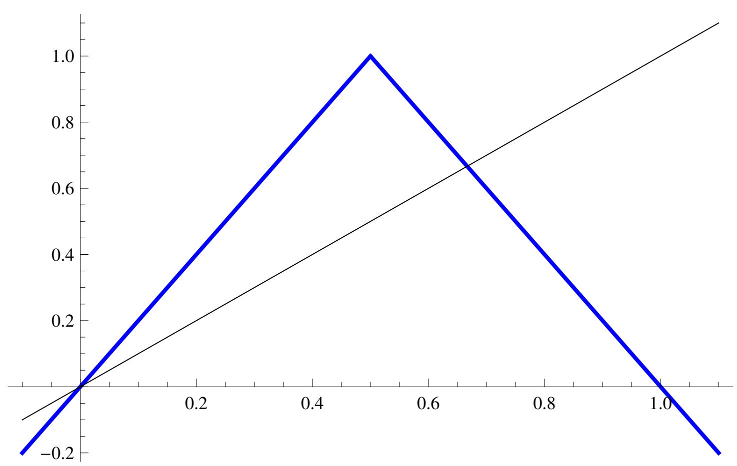

Figura 2.7: Gráfica de la función Tienda y de la función $f(x) = x$.

Estas observaciones nos indican que los puntos que pueden tener una órbita interesante se encuentran en el intervalo $[0,1]$. Por dicha razón, nos dedicaremos al estudio de la restricción de T al intervalo $[0,1]$, $T : [0,1] \to [0,1]$. Observemos que T tiene un pico. Lo cual ocurre cuando $x = \frac{1}{2}$.

Analicemos los puntos fijos de T. Por la Observación 2.3.10 y por la Figura 2.7, podemos inferir que T tiene sólo dos puntos fijos, un punto fijo se encuentra en el intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ y el otro en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. En efecto, sea $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Si x es un punto fijo de T, entonces se debe cumplir que $T(x) = x$ y $T(x) = 2x$. Luego, $x = 2x$. De donde se sigue que $x = 0$. Por otro lado, sea $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Si x es un punto fijo de T, entonces se debe cumplir que $T(x) = x$ y $T(x) = 2 - 2x$. Así, $x = 2 - 2x$. Luego $x = \frac{2}{3}$. En consecuencia, los únicos puntos fijos de T son 0 y $\frac{2}{3}$.

Dado que 0 y $\frac{2}{3}$ son puntos fijos de T y por la Observación 2.1.11, se tiene que ambos son puntos periódicos de T con periodo 1. Así, $\{0\} \in Per(T)$ y $\{\frac{2}{3}\} \in Per(T)$. Es decir, $Per(T) \neq \emptyset$. Por otro lado, observemos que $T'(0) = 2$ y $T'(\frac{2}{3}) = -2$, luego, por el Teorema 2.2.5, se concluye que ambos puntos son periódicos repulsores (Vea Figura 2.8).

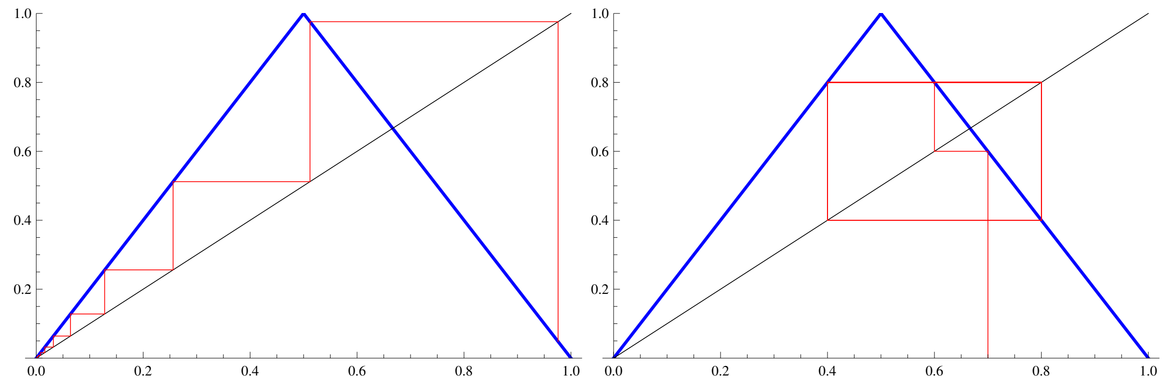

Figura 2.8: Diagrama Cobweb de la función Tienda. En el primer diagrama, se ha elegido como punto inicial a $x_0 = 0.001$ y en el segundo diagrama, el punto inicial es $x_0 = 0.7$. En ambos diagramas se observa que los puntos fijos de T son repulsores.

Con el objetivo de estudiar más a la función T, analizaremos ahora a la función T^2. Analicemos los puntos periódicos de T de periodo 2 (si es que los tiene). Notemos que $T^2 : [0,1] \to [0,1]$ viene dada por:

$$T^2(x) = \begin{cases} 4x, & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{4}\right]; \\ -4(x - \frac{1}{2}), & \text{si } x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right]; \\ 4(x - \frac{1}{2}), & \text{si } x \in \left[\frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right]; \\ -4(x-1), & \text{si } x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]. \end{cases}$$

Notemos que T^2 es una función continua en todo $\mathbb{R}$ (Vea la Figura 2.9).

Observación 2.3.12. A continuación mostramos algunas propiedades de T^2 que se siguen de forma inmediata.

1. Si $x \in [0,1]$, entonces $T^2(x) \in [0,1]$.
2. T^2 es continua en $[0,1]$.
3. Para toda $x \in [0,1]$, $|(T^2)'(x)| = 4$.
4. T^2 es diferenciable para toda $x \in [0,1]$, tal que $x \notin \{\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}\}$.
5. $T^2([0,1]) = [0,1]$.

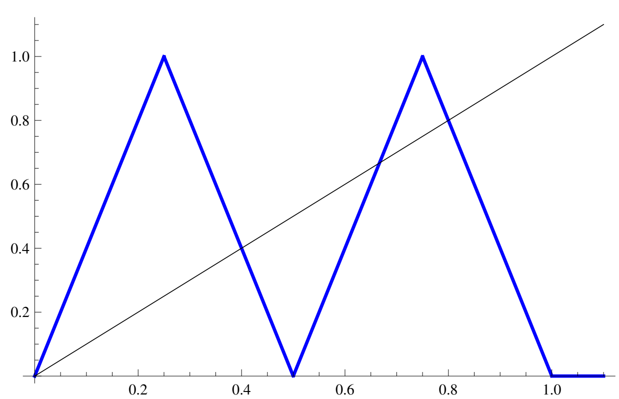

Figura 2.9: Gráfica de la función T^2 y de la función $f(x) = x$.

Notemos que T^2 hace en el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$ una tienda, lo cual hace T en $[0, 1]$, sólo que en esta ocasión la tienda es más angosta. De forma análoga, T^2 hace lo mismo en el intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$.

Observación 2.3.13. Observemos que T^2 tiene dos picos superiores. Los cuales ocurren cuando $x = \frac{1}{4}$ y $x = \frac{3}{4}$.

Ahora, analicemos los puntos periódicos de T con periodo 2. Por la Observación 2.3.10 y por la Figura 2.9, podemos inferir que T^2 tiene sólo cuatro puntos fijos, donde cada uno de ellos se encuentra distribuido en los intervalos $\left[0, \frac{1}{4}\right]$, $\left[\frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right]$, $\left[\frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right]$ y $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$. En efecto, si $x \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$ es un punto fijo de T^2, entonces se debe cumplir que $T^2(x) = x$ y $T^2(x) = 4x$. Luego, $x = 4x$. De donde se sigue que $x = 0$. Procediendo de forma similar para los intervalos $\left[\frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right]$, $\left[\frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right]$ y $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$, se sigue que los puntos fijos para T^2 son $x = \frac{2}{5}$, $x = \frac{2}{3}$ y $x = \frac{4}{5}$, respectivamente.

Por otro lado, notemos que $x = 0$ y $x = \frac{2}{3}$ son los dos puntos fijos de T. También observemos que $T(\frac{2}{5}) = \frac{4}{5}$ y $T(\frac{4}{5}) = \frac{2}{5}$, y por la forma en que se buscaron estos dos puntos es claro que $T^2(\frac{2}{5}) = \frac{2}{5}$ y $T^2(\frac{4}{5}) = \frac{4}{5}$. Luego, por la Observación 2.1.12, podemos concluir que $x = \frac{2}{5}$ y $x = \frac{4}{5}$ son los únicos puntos periódicos de T de periodo 2. Así, $\left\{\frac{2}{5}\right\} \in Per(T)$ y $\{\frac{4}{5}\} \in Per(T)$.

Para terminar de estudiar la dinámica de T^2, notemos que $\left|(T^2)'(\frac{2}{5})\right| = 4$ y $\left|(T^2)'(\frac{4}{5})\right| = 4$, luego, por el Teorema 2.2.5, se concluye que ambos puntos son periódicos repulsores (Vea Figura 2.10).

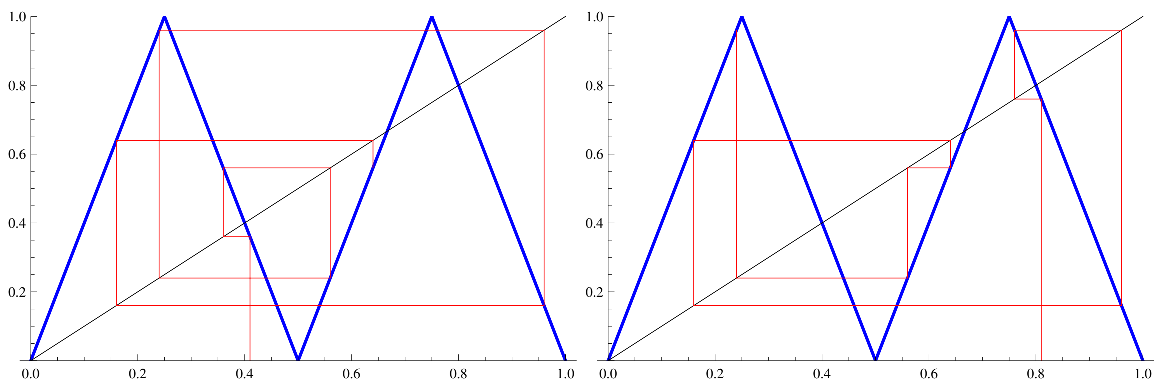

Figura 2.10: Diagrama Cobweb de la función T^2. En el primer diagrama, se ha elegido como punto inicial a $x_0 = 0.41$ y en el segundo diagrama, el punto inicial es $x_0 = 0.81$. En ambos diagramas se observa que los puntos fijos de T^2 son repulsores.

Antes de dar el salto al paso general, estudiemos a los puntos periódicos de T de periodo 3 (si es que los tiene). Notemos que $T^3 : [0, 1] \to [0, 1]$ está dado por:

$$T^3(x) = \begin{cases} 8x, & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{8}\right]; \\ -8(x - \frac{2}{8}), & \text{si } x \in \left[\frac{1}{8}, \frac{2}{8}\right]; \\ 8(x - \frac{1}{4}), & \text{si } x \in \left[\frac{2}{8}, \frac{3}{8}\right]; \\ -8(x - \frac{1}{2}), & \text{si } x \in \left[\frac{3}{8}, \frac{4}{8}\right]; \\ 8(x - \frac{1}{2}), & \text{si } x \in \left[\frac{4}{8}, \frac{5}{8}\right]; \\ -8(x - \frac{6}{8}), & \text{si } x \in \left[\frac{5}{8}, \frac{6}{8}\right]; \\ 8(x - \frac{6}{8}), & \text{si } x \in \left[\frac{6}{8}, \frac{7}{8}\right]; \\ -8(x - 1), & \text{si } x \in \left[\frac{7}{8}, 1\right]. \end{cases}$$

Notemos que la T^3 es una función continua en todo $\mathbb{R}$ (Vea la Figura 2.11).

Observación 2.3.14. A continuación mostramos algunas propiedades de T^3 que se siguen de forma inmediata.

1. Si $x \in [0,1]$, entonces $T^3(x) \in [0,1]$.

2. T^3 es continua en $[0,1]$.

3. Para toda $x \in [0,1]$, $|(T^3)'(x)| = 8$.

4. T^3 es diferenciable para toda $x \in [0,1]$, tal que $x \notin \left\{\frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}\right\}$.

5. $T^3([0,1]) = [0,1]$.

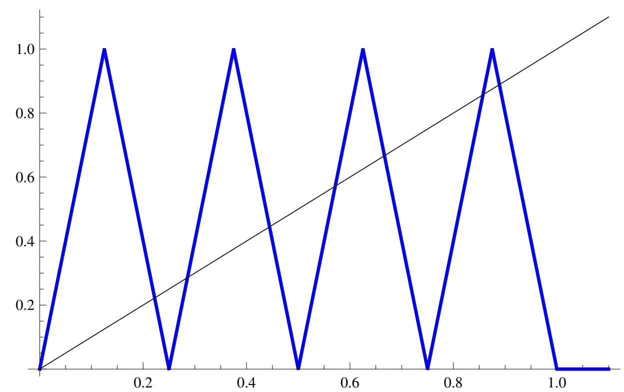

Figura 2.11: Gráfica de la función T^3 y de la función $f(x) = x$.

Observación 2.3.15. Observemos que T^3 tiene cuatro picos superiores. Los cuales ocurren cuando $x = \frac{1}{8}$, $x = \frac{3}{8}$, $x = \frac{5}{8}$ y $x = \frac{7}{8}$.

Estudiemos los puntos periódicos de T con periodo 3. Por la Observación 2.3.10 y por la Figura 2.11, podemos inferir que T^3 tiene sólo ocho puntos fijos. Procediendo de manera similar al método empleado previamente, se tiene que el conjunto de los puntos fijos T^3 es $\left\{0, \frac{2}{9}, \frac{2}{7}, \frac{4}{9}, \frac{4}{7}, \frac{2}{3}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}\right\}$.

Notemos que $T(0) = 0$ y $T(\frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$. Luego, como $T^j(x) \neq x$ para $x \in \left\{\frac{2}{9}, \frac{2}{7}, \frac{4}{9}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}\right\}$ y $j \in \{1,2\}$, se tiene que el conjunto de los puntos periódicos de T de periodo 3 es $\left\{\frac{2}{9}, \frac{2}{7}, \frac{4}{9}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}\right\}$. De donde, se sigue que $\left\{\frac{2}{9}, \frac{2}{7}, \frac{4}{9}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}\right\} \subset Per(T)$. Dado que $|(T^3)'(x)| = 8$ para $x \in [0,1]$ y por el Teorema 2.2.5, se concluye que los seis puntos son periódicos repulsores.

Para terminar esta sección estudiemos a T^k, para $k \in \mathbb{N}$.

Observación 2.3.16. Para todo $k \in \mathbb{N}$, T^k está definida por las siguientes fórmulas:

$$T^k(x) = \begin{cases} 2^k(x - \frac{r}{2^k}), & \text{si } x \in \left[\frac{r}{2^k}, \frac{r+1}{2^k}\right] \text{ y } r \in \{0,2,4,\ldots,2^k-2\}; \\ -2^k(x - \frac{r+1}{2^k}), & \text{si } x \in \left[\frac{r}{2^k}, \frac{r+1}{2^k}\right] \text{ y } r \in \{1,3,5,\ldots,2^k-1\}. \end{cases}$$

Observación 2.3.17. A continuación mostramos algunas propiedades de T^k, para cada $k \in \mathbb{N}$, que se siguen de forma inmediata.

1. Si $x \in [0,1]$, entonces $T^k(x) \in [0,1]$.

2. T^k es continua en $[0,1]$.

3. Para toda $x \in [0,1]$, $|(T^2)'(x)| = 2^k$.

4. $T^k([0,1]) = [0,1]$.

5. T^k tiene 2^{k-1} picos superiores.

6. T^k tiene 2^k puntos fijos y todos son puntos repulsores.

Notemos que la órbita del punto $x = \frac{2}{9}$ bajo la función T es $\mathcal{O}(\frac{2}{9}, T) = \left\{\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}\right\}$. De aquí, $\mathcal{O}(\frac{2}{9}, T)$ es de periodo 3, por el Teorema 2.2.14 se tiene la siguiente observación.

Observación 2.3.18. La función T tiene puntos periódicos de todos los periodos.

Teorema 2.3.19. Para todo $n \in \mathbb{N}$ y para cada $l \in \{0, 1, 2, \dots 2^n - 1\}$ se tiene lo siguiente:

1. La función T^n restringida al intervalo $\left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right]$, $T^n : \left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right] \to [0, 1]$ es un homeomorfismo.
2. La regla de correspondencia de T^n en $\left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right]$ es $T^n(x) = \mu + (-1)^l 2^n x$, donde μ es un número entero.

Demostración.
En esta prueba usaremos inducción matemática. Veamos el caso inicial, cuando $n = 1$. En este caso se tiene que $l \in \{0, 1\}$. Si $l = 0$, nuestro intervalo es $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ y por definición $T(x) = 2x = T^1(x) = 0 + (-1)^0 2x$. Es inmediato que $T : \left[0, \frac{1}{2}\right] \to [0, 1]$ es homeomorfismo. Por otro lado, si $l = 1$, nuestro intervalo es $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ y por definición $T(x) = 2 - 2x = T^1(x) = 2 + (-1)^1 2x$. De forma inmediata se tiene que $T : \left[\frac{1}{2}, 1\right] \to [0, 1]$ es un homeomorfismo. Ahora, supongamos que la afirmación es cierta cuando $n = k$. Así, para cada $l \in \{0, 1, 2, \dots 2^k - 1\}$ la función T^k restringida al intervalo $\left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right]$, $T^k : \left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right] \to [0, 1]$ es un homeomorfismo. Veamos que T^{k+1} es un homeomorfismo. Sean $n = k + 1$ y $l \in \{0, 1, 2, \dots, 2^{k+1} - 1\}$. Observemos que si $l \leq 2^k - 1$, se tiene que $\frac{l+1}{2^{k+1}} \leq \frac{1}{2}$. De donde se sigue que $\left[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}}\right] \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Por otro lado, si $2^k \leq l \leq 2^{k+1} - 1$, entonces $\left[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}}\right] \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Notemos que al conjunto $\{0, 1, 2, \dots, 2^{k+1} - 1\}$ lo hemos dividido en dos partes.
Caso 1, si $l \leq 2^k - 1$, entonces la función $T^n = T^k \circ T$, donde $T : \left[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}}\right] \to \left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right]$ y $T^k : \left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right] \to [0, 1]$. Por hipótesis de inducción tenemos que T^k es un homeomorfismo. Luego, como T^n es composición de funciones un homeomorfas, tenemos que T^n es un homeomorfismo. Notemos que $T^n(x) = T^k(T(x)) = T^k(2x) = \mu + (-1)^l 2^k 2x = \mu + (-1)^l 2^{k+1} x$, donde μ es un número entero.
Caso 2, si $2^k \leq l \leq 2^{k+1} - 1$, entonces la función $T^n = T^k \circ T$, donde $T : \left[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}}\right] \to \left[\frac{2^{k+1} - l - 1}{2^k}, \frac{2^{k+1} - l}{2^k}\right]$ y $T^k : \left[\frac{2^{k+1} - l - 1}{2^k}, \frac{2^{k+1} - l}{2^k}\right] \to [0, 1]$. Dado que $2^k \leq l \leq 2^{k+1} - 1$, se sigue que $0 \leq 2^{k+1} - l - 1 \leq 2^k - 1$. Así, $2^{k+1} - l - 1$ es un elemento de $\{0, 1, 2, \dots, 2^k - 1\}$. Luego, por hipótesis de inducción tenemos que T^k es un homeomorfismo. Luego, como T^n es composición homeomorfismos, tenemos que T^n es un homeomorfismo. □

Corolario 2.3.20. Sean (a, b), $a < b$, un subintervalo de $(0, 1)$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $T^N((a, b)) = [0, 1]$.

Demostración.
Notemos que $0 < b - a$. Dado que $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} = 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande tal que $\frac{1}{2^N} < \frac{b-a}{2}$. Dividamos el intervalo $(0, 1)$ en subintervalos de longitud $\frac{1}{2^N}$. Como $\frac{1}{2^N} < \frac{b-a}{2}$, se sigue que existe un $l \in \{0, 1, 2, \dots 2^N - 1\}$ tal que $\left[\frac{l}{2^N}, \frac{l+1}{2^N}\right] \subset (a, b)$. Por el Teorema 2.3.19, se tiene que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $T^N(\left[\frac{l}{2^N}, \frac{l+1}{2^N}\right]) = [0, 1]$. Teniendo en cuenta que $T^N(\left[\frac{l}{2^N}, \frac{l+1}{2^N}\right]) \subset T^N((a, b))$, podemos observar que $[0, 1] \subset T^N((a, b))$. Por otro lado, como $(a, b) \subset (0, 1)$, se concluye que $T^N((a, b)) \subset [0, 1]$. Por lo tanto, $T^N((a, b)) = [0, 1]$. □

Corolario 2.3.21. El conjunto $Per(T)$ es denso en $[0, 1]$.

Demostración.
Sea U un abierto no vacío en $[0, 1]$. Veamos que $Per(T)$ es denso en $[0, 1]$, es decir, $U \cap Per(T) \neq \emptyset$. Sean $(a, b) \subset [0, 1]$, con $a < b$. Dado que $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} = 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande tal que $\frac{1}{2^N} < \frac{b-a}{2}$. Dividamos el intervalo $[0, 1]$ en subintervalos de longitud $\frac{1}{2^N}$. Como $\frac{1}{2^N} < \frac{b-a}{2}$, se sigue que

existe un $l \in \{0, 1, 2, \ldots 2^N - 1\}$ tal que $\left[\frac{l}{2^N}, \frac{l+1}{2^N}\right] \subset (a, b)$. Por el Teorema 2.3.19, se tiene que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $T^N(\left[\frac{l}{2^N}, \frac{l+1}{2^N}\right]) = [0, 1]$. Dado que $\left[\frac{l}{2^N}, \frac{l+1}{2^N}\right] \subset T^N(\left[\frac{l}{2^N}, \frac{l+1}{2^N}\right])$, por el Teorema 2.2.7, se sigue que existe $x_0 \in \left[\frac{l}{2^N}, \frac{l+1}{2^N}\right] \subset (a, b) \subset U$ tal que $T^N(x_0) = x_0$. Así, $x_0 \in Per(T)$. En consecuencia, $U \cap Per(T) \neq \emptyset$. Por lo tanto el conjunto $Per(T)$ es denso en $[0, 1]$. $\square$

2.3.2. La familia Cuadrática

Consideremos la familia de sistemas dinámicos:

$$g_c(x) = x^2 + c, \ x \in \mathbb{R}$$

Observemos que $g_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua. Para estudiar la dinámica que tiene la función g_c, encontremos sus puntos fijos. Notemos que los puntos fijos de g_c son aquellos que satisfacen la ecuación $x^2 - x + c = 0$. Así, $x_1 = \frac{1-\sqrt{1-4c}}{2}$ y $x_2 = \frac{1+\sqrt{1-4c}}{2}$. De aquí, se sabe que x tiene solución en los $\mathbb{R}$ si $c \leq \frac{1}{4}$. Por este análisis, es conveniente realizar el estudio de la función g_c en tres casos.
Caso 1, cuando $c > \frac{1}{4}$. En este caso, g_c no tiene puntos fijos pues la ecuación $x^2 - x + c = 0$ no tiene solución en los $\mathbb{R}$. Para visualizar el comportamiento de g_c con $c > \frac{1}{4}$, vea la Figura 2.12, en ella se observa que g_c no intersecta a la función $f(x) = x$.

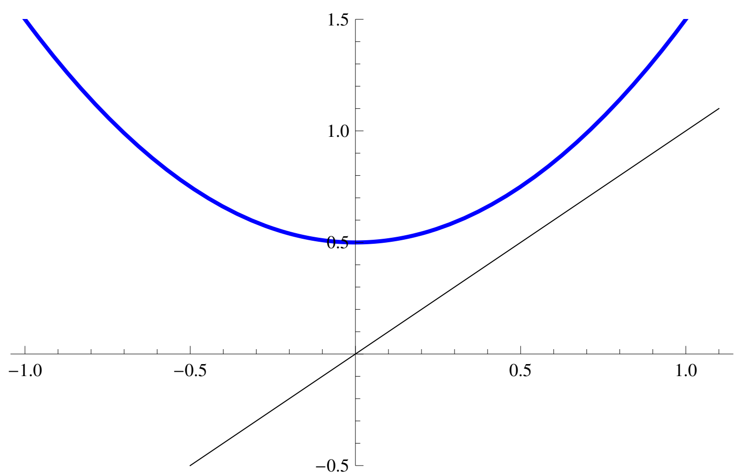

Figura 2.12: Gráfica de la función g_c con $c > \frac{1}{4}$.

Caso 2, cuando $c = \frac{1}{4}$. En este caso, el punto $x = \frac{1}{2}$ es el único punto fijo de g_c. Dado que $|(g_c)'(\frac{1}{2})| = 1$, no podemos afirmar sobre si $x = \frac{1}{2}$ es un punto fijo repulsor o atractor, pero en la Figura 2.13 se aprecia que $x = \frac{1}{2}$ es un punto fijo neutro.

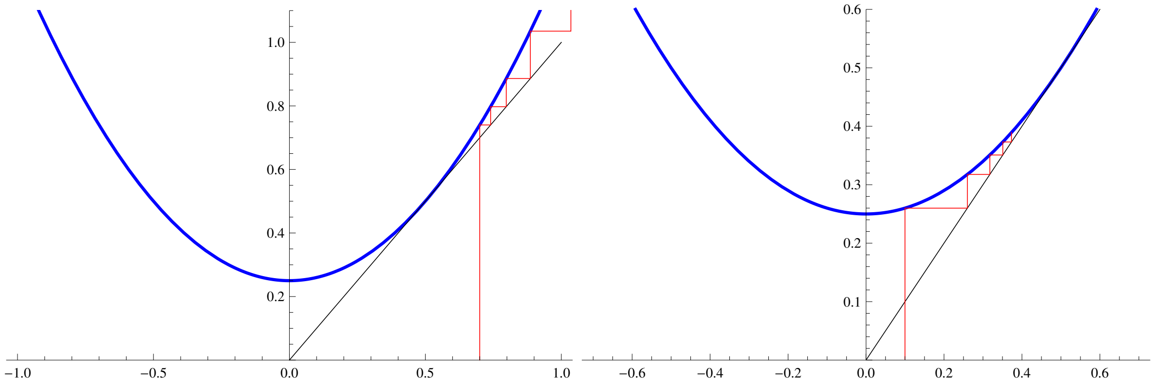

Figura 2.13: Gráfica de la función g_c con $c = \frac{1}{4}$. En el primer diagrama se ha seleccionado como punto inicial a $x_0 = 0.7$. Podemos observar que todos los $x > \frac{1}{2}$ son alejados del punto fijo $x = \frac{1}{2}$. En el segundo diagrama se ha seleccionado como punto inicial a $x_0 = 0.1$. Podemos observar que todos los $x \in (0, \frac{1}{2})$ tienden hacia el punto fijo $x = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, $x = \frac{1}{2}$ es un punto fijo neutro.

Caso 3, cuando $c < \frac{1}{4}$. En este caso, $x_1 = \frac{1-\sqrt{1-4c}}{2}$ y $x_2 = \frac{1+\sqrt{1-4c}}{2}$ son los dos puntos fijos de g_c. Observemos que $x_1 < \frac{1}{2}$ y $x_2 > \frac{1}{2}$. Dado que $|g_c'(x_1)| < 1$ y $|g_c'(x_2)| > 1$, por el Teorema 2.2.5, se sabe que x_1 es un punto fijo atractor y x_2 es un punto fijo repulsor. Para visualizar el comportamiento de g_c con $c < \frac{1}{4}$, vea la Figura 2.14.

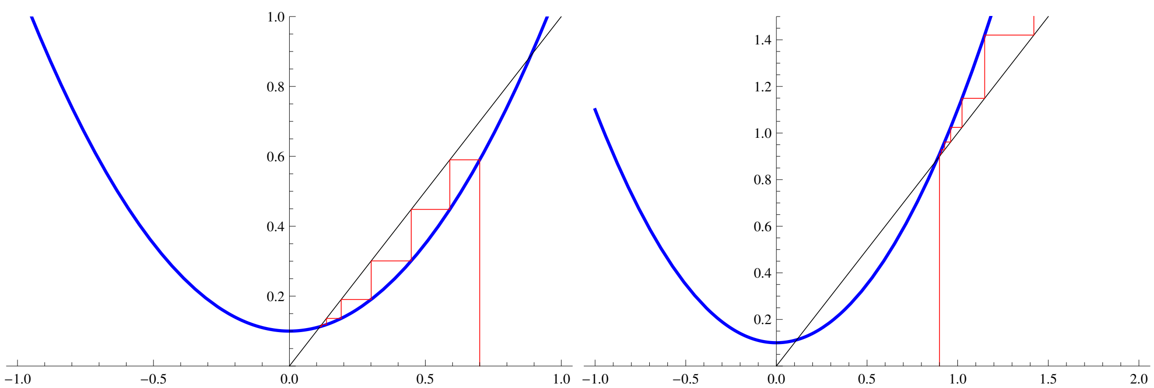

Figura 2.14: Gráfica de la función g_c con $c < \frac{1}{4}$. En el primer diagrama, podemos observar que todos los $x \in (0, x_2)$ tienden hacia el punto fijo atractor x_1. En el segundo diagrama, podemos observar que todos los $x > x_2$ son alejados del punto fijo repulsor x_2.

2.3.3. La función Logística

La ecuación logística en tiempo discreto está definida por:

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n), \ \lambda > 0$$

Observemos que dado un valor inicial x_0, generamos un nuevo valor x_1 a partir de la relación $x_1 = \lambda x_0(1 - x_0)$ y repetimos este proceso para generar x_2 a partir de x_1, y así sucesivamente.

Observación 2.3.22. Observemos que la recurrencia para obtener los puntos $x_1, x_2, \ldots,$ consiste en iterar la función de una sola variable $f_\lambda(x) = \lambda x(1 - x)$, la cual es llamada función logística. Para visualizar el comportamiento de f_λ, vea la Figura 2.15.

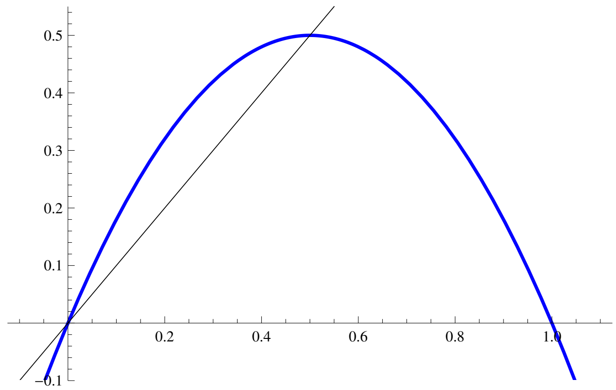

Figura 2.15: Gráfica de la función Logística f_λ.

Observación 2.3.23. A continuación mostramos algunas propiedades de f_λ que se siguen de forma inmediata.

1. Se tiene que f_λ es continua en los $\mathbb{R}$.

2. Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que $f_\lambda(0) = f_\lambda(1) = 0$.

3. f_λ es cóncava hacia abajo.

4. Se tiene que $f'_\lambda(x) = \lambda(1 - 2x)$.

5. La máxima altura de f_λ se alcanza en $x = \frac{1}{2}$.

6. Si $\lambda > 1$ y $x < 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} f^n_\lambda(x) = -\infty$.

7. Si $\lambda > 1$ y $x > 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} f^n_\lambda(x) = -\infty$.

8. Si $0 < \lambda < 1$ y $x \in (0, 1)$, entonces $\lim_{n\to\infty} f^n_\lambda(x) = 0$.

9. Si $1 < \lambda < 4$ y $x \in (0, 1)$, entonces $\lim_{n\to\infty} f^n_\lambda(x) = 0$.

Estas observaciones nos indican que los puntos que pueden tener una órbita interesante se encuentran en el intervalo $[0, 1]$. Por dicha razón, nos dedicaremos al estudio de f_λ en el intervalo $[0, 1]$ y con $0 < \lambda < 4$.

Analicemos los puntos fijos de f_λ. Notemos que los puntos fijos de f_λ son aquellos que satisfacen la ecuación $-\lambda x^2 + (\lambda - 1)x = 0$. De aquí, los puntos fijos de f_λ son $x_c = 0$ y $x_\lambda = 1 - \frac{1}{\lambda}$. Por otro lado, observemos que $f'_\lambda(x_c) = \lambda$ y $f'_\lambda(x_\lambda) = 2 - \lambda$. Con el objetivo de estudiar la órbita de f_λ, dividiremos su estudio en casos.
Caso 1, cuando $0 < \lambda < 1$. Notemos que $x_\lambda < 0$ y $x_c = 0$. Puesto que nos interesa estudiar el comportamiento de f_λ en el intervalo $[0, 1]$, sólo nos enfocaremos en el punto fijo x_c. Como $|f'_\lambda(x_c)| < 1$, por el Teorema 2.2.5, se concluye que $x_c = 0$ es un punto fijo atractor (Vea Figura 2.16).

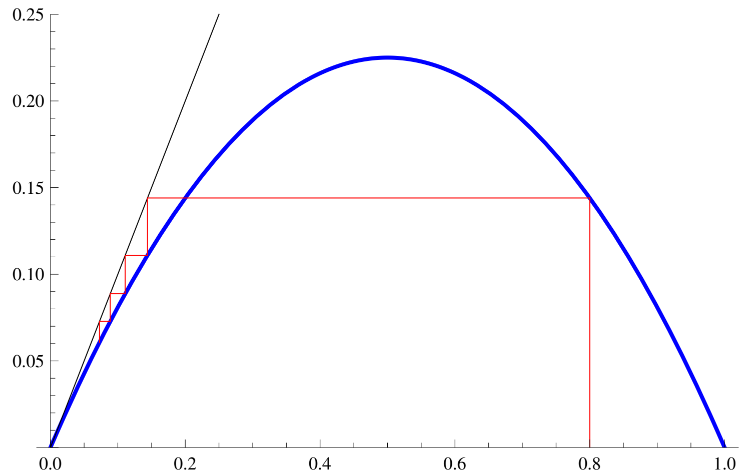

Figura 2.16: Diagrama Cobweb de la función f_λ, donde $0 < \lambda < 1$. En este ejemplo se ha seleccionado a $\lambda = 0.9$ y como punto inicial a $x_0 = 0.8$. Podemos observar que todos los $x \in [0, 1]$ tienden hacia el punto atractor $x_c = 0$.

Caso 2, cuando $\lambda = 1$. Notemos que $x_\lambda = x_c = 0$. Como $|f'_\lambda(x_c)| = 1$, no podemos afirmar sobre si x_c es un punto fijo repulsor o atractor, pero en la Figura 2.17 se aprecia que x_c es un punto fijo neutro.

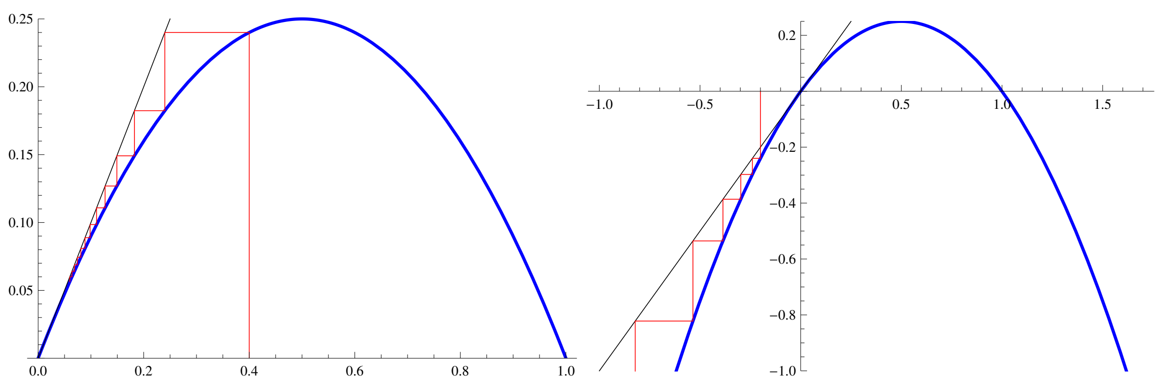

Figura 2.17: Diagrama Cobweb de la función f_λ, donde $\lambda = 1$. En el primer diagrama se ha seleccionado como punto inicial a $x_0 = 0.4$. Podemos observar que todos los $x \in (0, 1)$ tienden hacia el punto fijo $x_c = 0$. En el segundo diagrama se ha seleccionado como punto inicial a $x_0 = -0.2$. Podemos observar que todos los $x < 0$ son alejados del punto fijo $x_c = 0$. Por lo tanto, x_c es un punto fijo neutro.

Caso 3, cuando $1 < \lambda < 3$. Notemos que $x_\lambda \in (0, 1)$ y $x_c = 0$. Como $|f'_\lambda(x_c)| > 1$ y $|f'_\lambda(x_\lambda)| < 1$, por el Teorema 2.2.5, se concluye que $x_c = 0$ es un punto fijo repulsor y $x_\lambda = 1 - \frac{1}{\lambda}$ es un punto fijo atractor (Vea Figura 2.18).

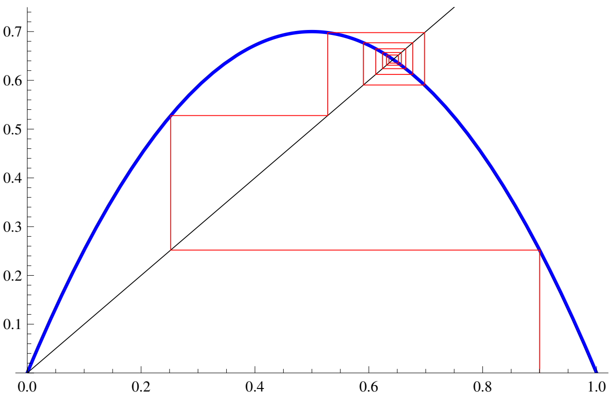

Figura 2.18: Diagrama Cobweb de la función f_λ, donde $1 < \lambda < 3$. En este ejemplo se ha seleccionado a $\lambda = 2.8$ y como punto inicial a $x_0 = 0.9$. Podemos observar que todos los $x \in (0,1)$ tienden hacia el punto atractor $x_\lambda = 0.64$.

Caso 4, cuando $\lambda = 3$. Notemos que $x_\lambda \in (0,1)$ y $x_c = 0$. Como $|f'_\lambda(x_c)| > 1$, por el Teorema 2.2.5, se concluye que $x_c = 0$ es un punto fijo repulsor. Por otro lado, dado que $|f'_\lambda(x_\lambda)| = 1$, no podemos afirmar sobre si x_λ es un punto fijo repulsor o atractor, pero en la Figura 2.19 se aprecia que x_c es un punto fijo atractor .

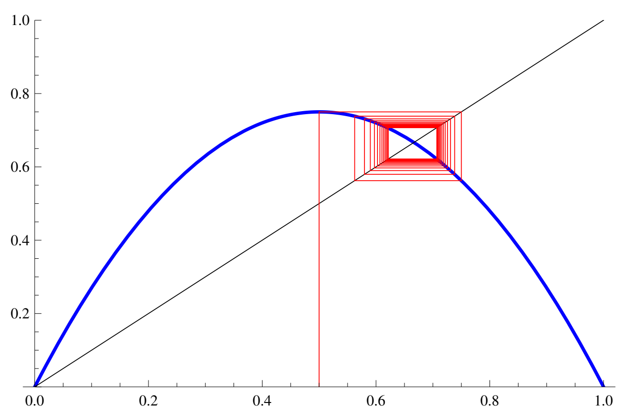

Figura 2.19: Diagrama Cobweb de la función f_λ, donde $\lambda = 3$. En este ejemplo se ha seleccionado como punto inicial a $x_0 = 0.5$. Podemos observar que todos los $x \in (0,1)$ se acercan de forma muy lenta al punto $x_\lambda = 0.66$.

Caso 5, cuando $3 < \lambda < 4$. Notemos que $x_\lambda \in (0,1)$ y $x_c = 0$. Como $|f'_\lambda(x_c)| > 1$ y $|f'_\lambda(x_\lambda)| > 1$, por el Teorema 2.2.5, se concluye que $x_c = 0$ y x_λ son puntos fijos repulsores (Vea Figura 2.20).

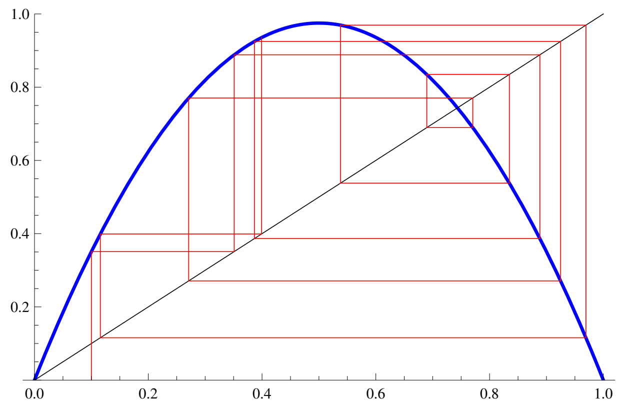

Figura 2.20: Diagrama Cobweb de la función f_λ, donde $3 < \lambda < 4$. En este ejemplo se ha seleccionado a $\lambda = 3.9$ y como punto inicial a $x_0 = 0.1$. Podemos observar que todos los $x \in (0,1)$ son alejados de los puntos $x_c = 0$ y $x_\lambda = 0.74$.

2.4. Transitividad topológica y caos

De aquí en adelante, la función f será de la forma $f : X \to X$, f será continua pero no necesariamente sobreyectiva. Además, X denotará siempre un continuo. Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos $f^k = f \circ f^{k-1}$ y $f^0 = I_X$.

Definición 2.4.1. Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Se dice que f es *transitiva* si para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

Teorema 2.4.2. La función $T : [0,1] \to [0,1]$ es transitiva en $[0,1]$.

Demostración.
Sean $(a,b) \subset [0,1]$ y $(c,d) \subset [0,1]$. Por el Corolario 2.3.20, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n((a,b)) = [0,1]$. Dado que $(c,d) \subset [0,1]$, se concluye que $T^n((a,b)) \cap (c,d) \neq \emptyset$. Por lo tanto T es transitiva en $[0,1]$. $\square$

Teorema 2.4.3. Sean X un espacio métrico y $f : X \to X$ una función continua. Si existe $x \in X$ tal que $\mathcal{O}(x,f)$ es denso en X, entonces f es transitiva.

Demostración.
Sean U y V dos abiertos no vacíos de X y sea $x \in X$ tal que $\mathcal{O}(x,f)$ es denso en X. Veamos que f es transitiva. Dado que $\mathcal{O}(x,f)$ es denso en X, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(x) \in U$. Por otro lado, como X es conexo, X no tiene puntos aislados y $\mathcal{O}(x,f) \setminus \{x, f(x), \ldots, f^m(x)\}$ es denso en X. Luego, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $f^{m+r}(x) \in V$. Observemos que $f^{m+r}(x) = f^r(f^m(x)) \in f^r(U)$. En consecuencia, $f^r(U) \cap V \neq \emptyset$, es decir, f es transitiva. $\square$

Proposición 2.4.4. Sea $f : X \to X$ una función continua. Observe que $f^n(X) \subset f(X)$, para todo natural $n \geq 1$.

Demostración.
Note que $f(X) \subset X$. De aquí, se tiene que $f(f(X)) \subset f(X) \subset X$. En general, $f^n(X) \subset f(X)$, para todo natural $n \geq 1$. $\square$

Teorema 2.4.5. Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Si f es una función transitiva, entonces f es sobreyectiva.

Demostración.
Supongamos que f es transitiva. Observemos que $f(X)$ es denso en X, es decir, $\overline{f(X)} = X$. En efecto, sea U un abierto en X. Dado que X es abierto en X y f es transitiva, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(X) \cap U \neq \emptyset$. Así, por la Proposición 2.4.4, $f(X) \cap U \neq \emptyset$. En consecuencia, $\overline{f(X)} = X$. Por otro lado, por el Teorema 1.5.23, $\overline{f(X)} = f(X)$. Así, $f(X) = X$, como se deseaba probar. □

Definición 2.4.6. Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Se dice que f es *caótica* si es transitiva y $Per(f)$ es denso en X.

De la definición de una función caótica, se tiene lo siguiente:

Observación 2.4.7. Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Si f es una función caótica, entonces es transitiva.

Del Corolario 2.3.21 y el Teorema 2.4.2, se tiene:

Teorema 2.4.8. La función $T : [0, 1] \to [0, 1]$ es caótica en $[0, 1]$.

Capítulo 3

Modelos Matemáticos mediante sistemas dinámicos discretos

Sea (X, f) un sistema dinámico. Consideremos un punto $x_0 \in X$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $x_n = f^n(x_0)$. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $x_{n+1} = f(x_n)$. Por lo tanto, un sistema dinámico discreto es una ecuación en diferencias de la forma:

$$x_{n+1} = f(x_n), \text{ para cada } n \in \mathbb{N},$$

donde f es una función continua en X. Notemos que la función f determina completamente el sistema dinámico.

El campo de aplicaciones de los sistemas dinámicos discretos es muy amplio, tanto en las matemáticas como en otras ciencias. En matemáticas los sistemas dinámicos discretos se pueden usar para:

1. La resolución numérica de ecuaciones.
2. Elaboración de modelos matemáticos.
3. Resolución numérica de ecuaciones diferenciales.

3.1. Modelos de Crecimiento Exponencial: Modelo Malthus discreto

Consideremos una población que se reproduce en cada cierto periodo de tiempo, es decir, no se considera la fluctuación continua entre cada intervalo de tiempo. El objetivo es modelar el tamaño de tal población que se reproduce. Supongamos que el tamaño de la población x_{n+1} en el periodo $n + 1$ puede ser calculado directamente desde el tamaño en el periodo anterior x_n. Sea b el número promedio de partos o reproducciones de un individuo entre dos pasos temporales (la llamada *producción o reproducción per cápita*). Sea d la probabilidad o porcentaje de defunción o muerte de cualquier individuo dado entre dos pasos temporales (la llamada *mortalidad per cápita*). Notemos que $b \geq 0$, $0 \leq d \leq 1$ y los estamos suponiendo constantes. Luego, dada una población de tamaño x durante un paso temporal, se tiene que bx es el número de nacimientos o reproducciones y dx es el número de defunciones o muertes de tal población en tal periodo. Así, el tamaño x_{n+1} de la población en el periodo $n + 1$, está dado por:

$$x_{n+1} = x_n + bx_n - dx_n = (1 + b - d)x_n.$$

Poniendo $r = 1 + b - d$ con $r > 0$, se sigue que:

$$x_{n+1} = rx_n, \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{3.1}$$

La ecuación (3.1) se le llama *Ecuación de Malthus Discreta* o bien *Modelo de Malthus Discreto*, fue descrito en 1798 por Thomas Malthus.

Así, la función f que determina el modelo, es la función lineal que está dada por:

$$f(x) = rx, \text{ para cada } x \in \mathbb{R}^+.$$

Si definimos la *razón de crecimiento* como el cociente $R = \frac{x_{n+1}}{x_n}$, obtenemos que la Ecuación de Malthus proporciona un modelo con *razón de crecimiento* constante $R = r$. En tal caso a R también se le llama *constante de proporcionalidad* que determina la razón del crecimiento.

Por otra parte, en términos de *tasa neta de crecimiento*: $\alpha = \frac{x_{n+1}-x_n}{x_n}$, tenemos que $\alpha = R - 1 = r - 1 = b - d$.

Suponiendo que x_0 es el tamaño de la población inicial y r es constante, en este caso, se obtiene la única solución a la Ecuación de Malthus (3.1), dada por:

$$x_{n+1} = x_0 R^n, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

La ecuación (3.2) se le llama *Ecuación de Crecimiento Exponencial Discreto* o *Modelo de Crecimiento Exponencial Discreto*.

La función f que determina o describe a la ecuación (3.2) está dada por:

$$f(x) = aR^x, \text{ para cada } x \in \mathbb{R}^+, \text{ donde } a, R > 0 \text{ y } R \neq 1.$$

la cual se le conoce como *función exponencial en base* R. En la Figura 3.1, se puede apreciar el comportamiento de la función exponencial en base R.

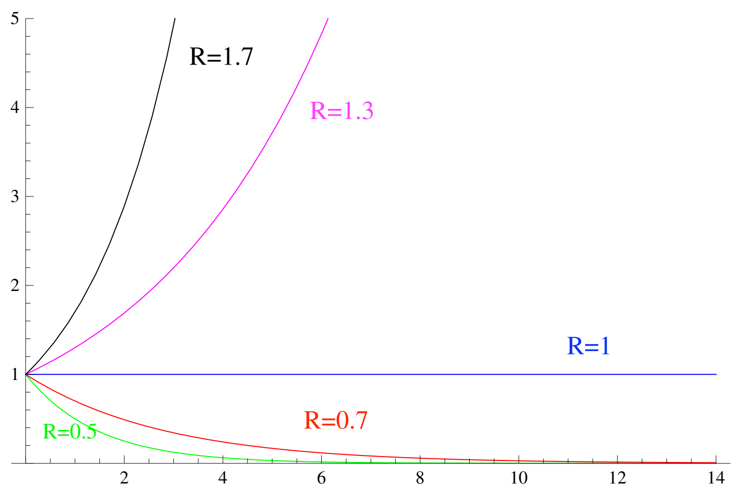

Figura 3.1: Gráfica de la función exponencial en base R. En esta gráfica se muestra el comportamiento de la función $f(x) = aR^x$ en relación con algunos valores de R y $a = 1$.

Analizando la ecuación (3.2) y teniendo en cuenta la gráfica de la función $f(x) = R^x$ (Vea la Figura 3.1), obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.1.1. Considerando los supuestos para la ecuación (3.2), tenemos lo siguiente:

a) Si $R = 1$ (es decir, $b = d$), entonces:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Lo cual indica que la población es constante, nunca cambia.

b) Si $R < 1$ (es decir, $b < d$), entonces:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Lo cual indica que la población se extingue, a largo plazo.

c) Si $R > 1$ (es decir, $b > d$), entonces:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Lo cual indica que existirá una sobrepoblación o bien que existirá un crecimiento ilimitado de la población, a largo plazo.

d) Sea $y > 0$. Se sigue que:

$$\begin{aligned} x_{n+1} \geq y \quad \Leftrightarrow \quad x_0 R^n &\geq y \\ \Leftrightarrow \quad \ln(x_0 R^n) &\geq \ln(y) \\ \Leftrightarrow \quad \ln(x_0) + n\ln(R) &\geq \ln(y) \\ \Leftrightarrow \quad n\ln(R) &\geq \ln(y) - \ln(x_0) \\ \Leftrightarrow \quad n &\geq \tfrac{\ln(y)-\ln(x_0)}{\ln(R)} \end{aligned}$$

Esto indica que para el periodo n con $n \geq \frac{\ln(y)-\ln(x_0)}{\ln(R)}$, se tendrá que el tamaño de la población, x_n, es más grande que y unidades.

Es importante observar que el Modelo de Malthus funciona muy bien en poblaciones inicialmente pequeñas y ambientes grandes, o bien, para predecir comportamientos a corto y mediano plazo. Por otro lado, no es tan aceptado por el crecimiento ilimitado de la población, pues tal situación no es común en la naturaleza.

Ejemplo 3.1.2. Supongamos que se cuenta con una población de bacterias en la cual cada bacteria se divide en dos cada 20 minutos. Suponga que al inicio del experimento, se tienen dos bacterias. Deseamos analizar cómo evoluciona el número de bacterias al paso del tiempo.

Notemos que en este caso, el periodo de tiempo es de 20 minutos, esto es: en periodo 1 han transcurrido 20 minutos, en periodo 2 han transcurrido 40 minutos, en periodo 3 han transcurrido 60 minutos, etc. Por otro lado, puesto que en cada periodo, cada bacteria se divide en dos, se tiene que $b = 1$ (la bacteria y otro más, es decir, un nacimiento). Además, como no mueren tales bacterias, $d = 0$. Así, la razón de crecimiento constante es $R = 1 + b - d = 1 + 1 = 2$. También, $x_0 = 2$. Luego, por la ecuación (3.2), se tiene que:

$$x_{n+1} = x_0 R^n = 2(2^n), \text{ para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

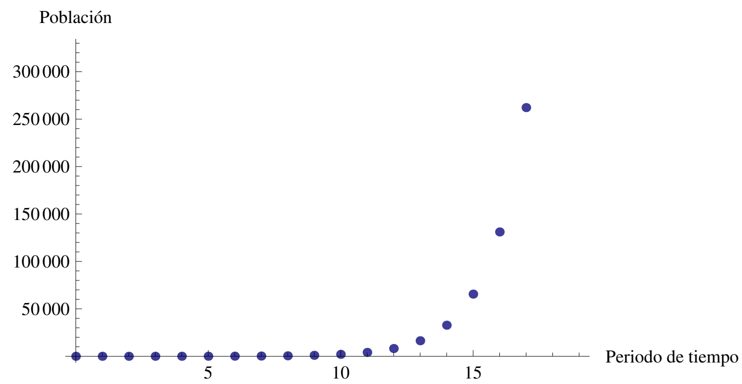

Figura 3.2: Gráfica de la ecuación $x_{n+1} = 2(2^n)$.

Por la Proposición 3.1.1 c) y d), se tiene que: la población de bacterias crece ilimitadamente a largo plazo (Vea la Figura 3.2). Además, si $y = 1000$, se tiene que $n \geq \frac{\ln(y)-\ln(x_0)}{\ln(R)} = \frac{\ln(1000)-\ln(2)}{\ln(2)} = 8.9$. Lo cual indica que para el periodo $n = 9$, se tienen más de 1000 bacterias, es decir, en 180 minutos se tienen más de 1000 bacterias. Podemos verificar directamente sustituyendo $n = 9$ en la ecuación (3.3) y obtenemos que $x_{10} = 2(2^9) = 1,024.0$.

Ejemplo 3.1.3. Consideremos una población de plantas que se reproducen anualmente, en la cual cada planta produce cinco nuevos ejemplares. Supongamos que el periodo de vida de cada planta es de a lo más un año. Además, supongamos que inicialmente contamos con 1000 plantas. Deseamos analizar cómo evoluciona el número de plantas a través de los periodos anuales.

En este caso, el periodo de tiempo es de 1 año, esto es: en periodo 1 ha transcurrido un año, en periodo 2 han transcurrido dos años, en periodo 3 han transcurrido tres años, etc. Por otro lado, puesto que en cada periodo, cada planta produce cinco ejemplares, se tiene que $b = 5$. Además, como mueren las plantas en cada periodo, $d = 1$. Así, la razón de crecimiento constante es $R = 1 + b - d = 1 + 5 - 1 = 5$. También, $x_0 = 1000$. Luego, por la ecuación (3.2), se tiene que:

$$x_{n+1} = x_0 R^n = 1000(5^n), \text{ para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

Por la Proposición 3.1.1 c), se tiene que: la población de plantas crece ilimitadamente a largo plazo (Vea la Figura 3.3).

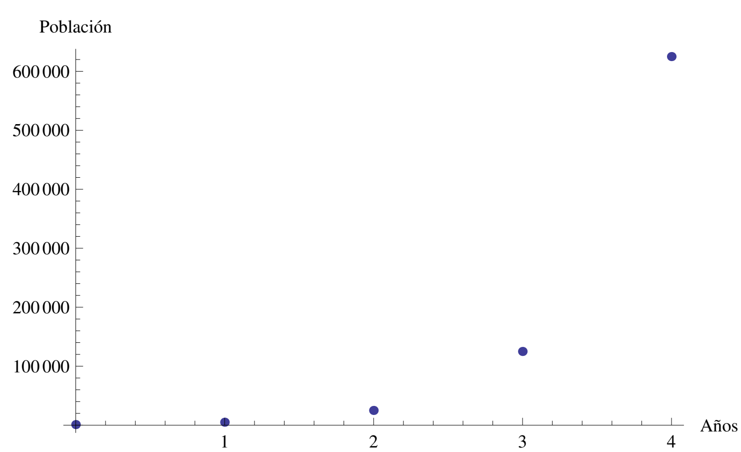

Figura 3.3: Gráfica de la ecuación $x_{n+1} = 1000(5^n)$.

Ejemplo 3.1.4. Consideremos una población de cierta clase de insectos que tiene periodo de vida de sólo un año, y en el año siguiente sólo viven los descendientes. Sea S el número de huevos puestos por cada insecto, y que dan origen a nuevos insectos.

Se sigue que, el periodo de tiempo es de 1 año, esto es: en periodo 1 ha transcurrido un año, en periodo 2 han transcurrido dos años, en periodo 3 han transcurrido tres años, etc. Por otro lado, puesto que en cada periodo, cada insecto produce S huevos que dan origen a nuevos insectos, se tiene que $b = S$. También, puesto que mueren los insectos en cada periodo, $d = 1$. Así, la razón de crecimiento constante es $R = 1 + b - d = 1 + S - 1 = S$. Luego, suponiendo que el tamaño de la población inicial es de x_0, por la ecuación (3.2), se tiene que:

$$x_{n+1} = x_0 R^n = x_0(S^n), \text{ para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{3.5}$$

3.2. Modelos con Crecimiento Restringido

Hasta ahora hemos estudiado el Modelo de Malthus, para analizar el crecimiento (crecimiento exponencial) de ciertas poblaciones, el cual está dado por:

$$x_{n+1} = Rx_n, \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{3.6}$$

donde $R > 0$. Para este modelo, se tiene que si $R > 1$, entonces a largo plazo el tamaño de la población crece indefinidamente e independientemente de la población inicial. Sin embargo, esto no es tan común que suceda en la naturaleza, pues en tal caso se necesitaría de una cantidad ilimitada de recursos y de espacio para albergar poblaciones muy grandes.

En lo que sigue analizaremos algunos modelos de crecimiento de poblaciones con ciertas restricciones, con el objetivo de abarcar más poblaciones existentes en la naturaleza. Entre otros factores, las poblaciones entre más grandes, necesitarán mayores recursos alimenticios y espacios suficientes para la supervivencia. Además, si la población rebasa tales limitaciones, lo más probable es que tal población se extinga. Por lo tanto, una de las principales restricciones que se debe de considerar en el modelado de una población, es la capacidad de alojamiento con la que se cuenta, y así evitar una sobrepoblación. De esta manera es importante considerar el nivel máximo de población. Para tal situación, dada una población de tamaño x, se introduce el factor $S(x)$ conocido como *capacidad de alojamiento, parámetro de aniquilación o cota de supervivencia*. Así, a partir del Modelo de Malthus (3.1), para el caso en que $R > 1$, obtenemos el modelo modificado:

$$x_{n+1} = S(x_n)Rx_n, \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{3.7}$$

Equivalentemente:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = S(x_n)R, \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{3.8}$$

Observemos que a diferencia del Modelo de Malthus, en este caso, la razón de crecimiento no sólo depende de la constante R, también depende de $S(x_n)$, que a su vez depende del tamaño de la población. Al modelo (3.7) se le conoce como *Modelo con Crecimiento Restringido* o *Modelo Dependiente de la Densidad*. Es importante aclarar que existen otros factores que pueden influir en el crecimiento de una población, tales como: poblaciones de depredador y presa, competencia intra, factores abióticos, etc., los cuales no son considerados. Además, recordar que estos modelos son determinísticos, es decir, no se consideran elementos estocásticos.

Para facilitar el estudio de los modelos con restricción, se introducen dos tipos de funciones F y f que ayudan a determinar tales modelos, las cuales deben de cumplir con lo siguiente, respectivamente:

$$F(x_n) = \frac{x_{n+1}}{x_n} \text{ y } f(x_n) = F(x_n)x_n, \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Equivalentemente:

$$x_{n+1} = F(x_n)x_n = f(x_n), \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

La función F se le llama la *producción per cápita*, esto es, la producción de descendientes por individuo de la población. La función f proporciona o representa el número de descendientes de la población.

De acuerdo a las funciones F y f, el Modelo de Crecimiento Restringido se convierte en:

$$x_{n+1} = F(x_n)x_n = f(x_n) = S(x_n)Rx_n, \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{3.9}$$

A través del tiempo se han creado varios modelos de crecimiento de población restringido, basta considerar diferente tipo de función f. Por lo general, estas funciones f se eligen de acuerdo a las necesidades y del problemas que se desea modelar. A continuación analizaremos las modelos de crecimiento de población restringido: logístico, de Beverton-Holt y de Ricker.

3.2.1. Modelo Logístico

Construyamos un modelo de crecimiento de población que incorpore una limitación de crecimiento cuando el tamaño de la población es grande. Para tal objetivo consideremos el Modelo de Malthus para el caso $R > 1$. Así, tenemos que la población tiene razón de crecimiento $R = \frac{x_{n+1}}{x_n}$. Ahora, para considerar la capacidad de alojamiento o sobrepoblación, supongamos que existe un nivel de población máximo $K > 0$. En tal caso la constante K se le llama capacidad de alojamiento o parámetro de aniquilación. Además, deseamos que el modelo cumpla con lo siguiente:

1. Si x_n es pequeño, entonces x_{n+1} es casi proporcional a x_n, esto es $x_{n+1} \approx Rx_n$, para valores pequeños de n (coincide con el modelo exponencial).

2. Si x_n es cercano a K, entonces $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ se aproxima a uno, es decir, $x_{n+1} \approx x_n$, esto es, la población crece muy lento.

3. Si x_n es mayor que K, entonces la próxima generación se extinguirá (por la falta de recurso y espacio).

Con el fin de obtener el modelo requerido comparamos $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ con x_n, pues deseamos obtener una función decreciente que represente a $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ en función de x_n, que involucre a los parámetros $R > 1$ y $K > 0$ y, que además, satisfaga las condiciones requeridas. Poniendo a $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ en el eje de las ordenadas y en el eje de las abscisas a x_n, una función (con propiedades conocidas) que modela a nuestro problema es la recta que pasa por los puntos $(0, R)$ y $(K, 1)$. Así, tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= -\left(\frac{R-1}{K}\right)x_n + R \\ &= \frac{RK - (R-1)x_n}{K} \\ &= R - \left(\frac{R-1}{K}\right)x_n. \end{aligned}$$

De donde:

$$x_{n+1} = x_n\left[R - \left(\frac{R-1}{K}\right)x_n\right], \text{ para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{3.10}$$

La ecuación (3.10) se le llama *Ecuación Logística Discreta* o *Modelo Logístico Discreto*, con los parámetros respectivos R y K dados. En la Figura 3.4, podemos apreciar el comportamiento del Modelo Logístico Discreto.

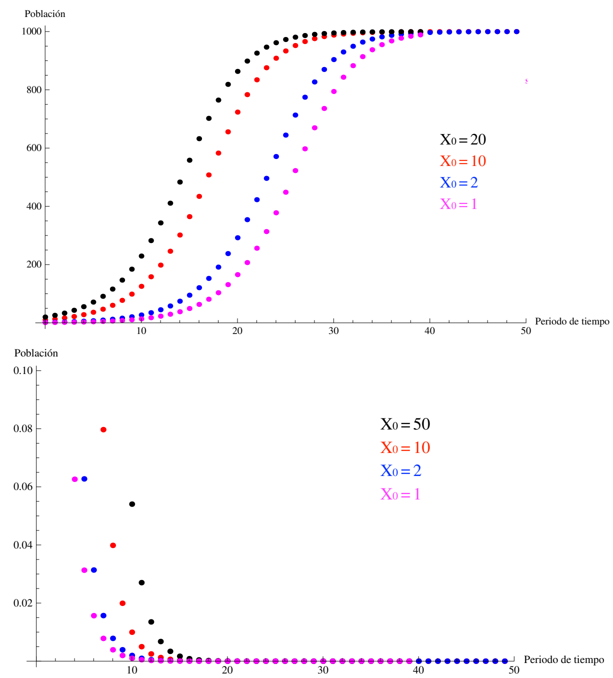

Figura 3.4: Gráfica del Modelo Logístico Discreto. En la primer gráfica se muestra el comportamiento del Modelo Logístico Discreto con $R = 1.3$ y $K = 1000$ y en la segunda gráfica se muestra el comportamiento del Modelo Logístico Discreto con $R = 0.5$ y $K = 1000$. En ambos casos, solo variamos la población inicial.

Poniendo $r = R - 1$, obtenemos una expresión alternativa :

$$x_{n+1} = x_n \left[1 + r\left(1 - \frac{x_n}{K}\right)\right], \text{ para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{3.11}$$

Ahora, multiplicando ambos miembros de la ecuación (3.10) por $\frac{(R-1)}{RK}$ y renombrando la población por $z_n = \frac{(R-1)}{RK} x_n$, obtenemos la clásica Ecuación Logística Discreta:

$$z_{n+1} = Rz_n(1 - z_n), \text{ para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{3.12}$$

Así, la función f que determina el modelo está dada por:

$$f(x) = Rx(1 - x), \text{ para cada } x \in \mathbb{R}^+,$$

la cual se le conoce como *función logística*.

Ejemplo 3.2.1. Supongamos que se cuenta con una población de bacterias en la cual cada bacteria se divide en dos cada 20 minutos. Suponga que al inicio del experimento, se tienen dos bacterias y que se cuenta con una capacidad de alojamiento de $K = 2000$. Deseamos analizar cómo evoluciona el número de bacterias al paso del tiempo.

Recordar que en este caso $R = 2$ (ver Ejemplo 3.1.2). Usando el Modelo Logístico, se tiene el siguiente modelo para este problema:

$$x_{n+1} = x_n \left[2 - \left(\frac{1}{2000} \right) x_n \right], \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

En la Figura 3.5, se muestra la evolución de la población de bacterias con el paso del tiempo, podemos observar que cuando la población es cercano a 2000, entonces la población crece muy lento. Por otro lado, si la población es pequeña, entonces la población crece de manera exponencial.

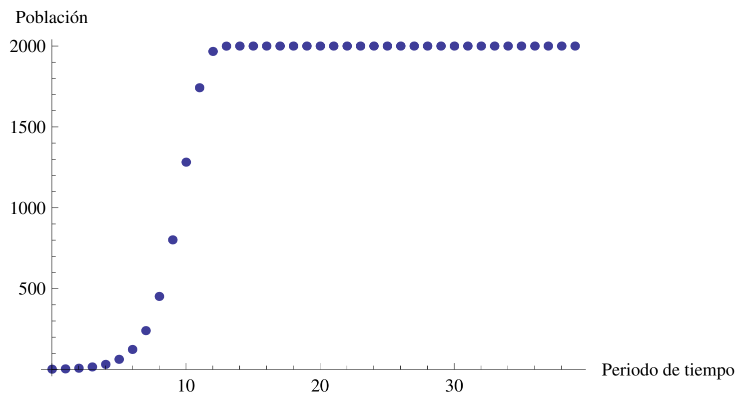

Figura 3.5: Gráfica de la ecuación $x_{n+1} = x_n \left[2 - \left(\frac{1}{2000} \right) x_n \right]$.

3.2.2. Modelo de Beverton-Holt

A continuación construiremos otro modelo que incorpora una limitación de crecimiento cuando el tamaño de la población es grande. Nuevamente consideremos el Modelo de Malthus para el caso $R > 1$. Así, tomemos una población con razón de crecimiento $R = \frac{x_{n+1}}{x_n}$ con $R > 1$. En este caso, para considerar la capacidad de alojamiento o sobrepoblación tomemos en cuenta lo siguiente:

1. Existe un nivel de población máximo $K > 0$.

2. Si x_n es pequeño, entonces x_{n+1} es casi proporcional a x_n, esto es, $x_{n+1} \approx Rx_n$ (equivalentemente, $\frac{x_n}{x_{n+1}} \approx \frac{1}{R}$, coincide con el modelo exponencial).

3. Si x_n es cercano a K, entonces $\frac{x_{n+1}}{x_n} \approx 1$ (equivalentemente, $\frac{x_n}{x_{n+1}} \approx 1$), es decir, $x_{n+1} \approx x_n$, esto es, la población crece muy lento.

4. Si x_n es mayor que K, entonces la próxima generación se extinguirá (por la falta de recurso y espacio).

Con el propósito de obtener el modelo requerido, comparamos $\frac{x_n}{x_{n+1}}$ con x_n, pues en este caso deseamos obtener una función creciente que represente a $\frac{x_n}{x_{n+1}}$ en función de x_n, que involucre a los parámetros $R > 1$ y $K > 0$ y, que además, satisfaga las condiciones requeridas. Poniendo a $\frac{x_n}{x_{n+1}}$ en el eje de las ordenadas y en el eje de las abscisas a x_n, la función que modela a nuestro problema es la recta que pasa por los puntos $(0, \frac{1}{R})$ y $(K, 1)$. Así, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\frac{x_n}{x_{n+1}} &= \left(\frac{1-\frac{1}{R}}{K}\right)x_n + \frac{1}{R} \\
&= \left(\frac{R-1}{RK}\right)x_n + \frac{1}{R} \\
&= \frac{1}{R}\left(1+\frac{R-1}{K}\right)x_n.
\end{aligned}
$$

Luego, obtenemos que:

$$x_{n+1} = \frac{x_n R}{1+\left(\dfrac{R-1}{K}\right)x_n}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{3.13}$$

La ecuación (3.13) se le llama *Curva de Reclutamiento de Beverton-Holt*, con los parámetros respectivos R y K. En la Figura 3.6, se muestra el comportamiento de la Curva de Reclutamiento de Beverton-Holt.

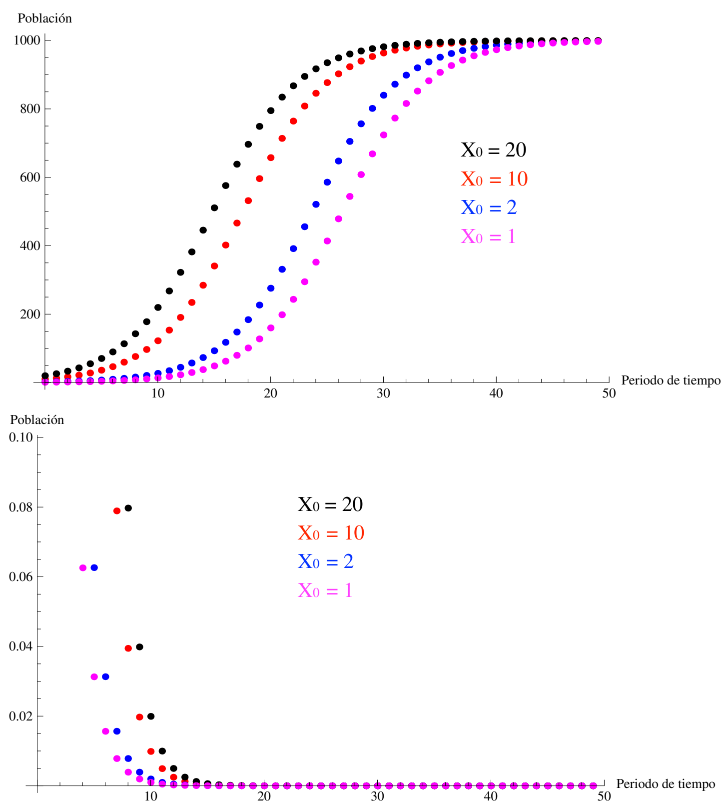

Figura 3.6: Gráfica de la Curva de Reclutamiento de Beverton-Holt. En la primer gráfica se muestra el comportamiento de la Curva de Reclutamiento de Beverton-Holt con $R = 1.3$ y $K = 1000$ y en la segunda gráfica se muestra el comportamiento de la Curva de Reclutamiento de Beverton-Holt con $R = 0.5$ y $K = 1000$. En ambos casos, solo variamos la población inicial.

Luego, la función f que determina el modelo está dada por:

$$f(x) = \frac{Rx}{1+\frac{(R-1)}{K}x}, \text{ para cada } x \in \mathbb{R}^+.$$

3.2.3. Modelo de Ricker

El Modelo Logístico que hemos estudiado tiene algunos valores menores que cero. Por ejemplo, si $x_0 = \frac{2RK}{R-1}$, se tiene que $x_1 = -\frac{2R^2K}{R-1} < 0$. Esta situación no puede suceder cuando se modelan ciertos problemas, que requieran sólo valores positivos. Para solucionar tal situación, consideramos el Modelo de Malthus con $R > 0$:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = R, \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

para el el caso en que $R > 1$. Luego, pongamos $R = e^r$, donde $r > 0$. De donde:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = e^r, \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Con el objetivo de acotar el crecimiento, ponemos:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = e^{r(1-\frac{x_n}{K})}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Por lo tanto, tenemos:

$$x_{n+1} = x_n e^{r(1-\frac{x_n}{K})}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{3.14}$$

Lo ecuación (3.14) se le conoce como *Curva de Ricker* o *Modelo de Ricker*. En la Figura 3.8, se muestra el comportamiento del Modelo de Ricker.

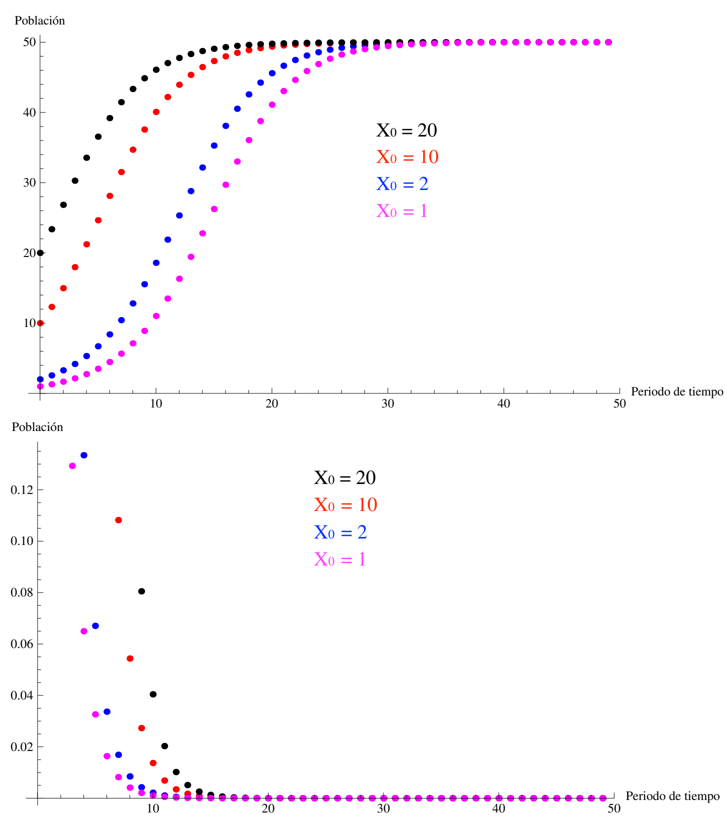

Figura 3.7: Gráfica del Modelo de Ricker. En la primer gráfica se muestra el comportamiento del Modelo de Ricker con $R = 1.3$ y $K = 50$ y en la segunda gráfica se muestra el comportamiento del Modelo de Ricker con $R = 0.5$ y $K = 50$. En ambos casos, solo variamos la población inicial.

Así, la función f que determina el Modelo de Ricker está dada por:

$$f(x) = xe^{r(1-\frac{x}{K})}, \text{ para cada } x \in \mathbb{R}^+.$$

3.3. Otra Versión del Modelo Logístico

Una de las desventajas del Modelo de Malthus, reside en el hecho de que las tasas de nacimientos y mortalidad se mantienen siempre constantes, independientemente qué tan grande llegue hacerse la población al paso del tiempo. Con el propósito de solucionar tal situación, las tasas de natalidad y mortalidad se tomarán como funciones, $h(x_n)$ y $g(x_n)$, que varían a través del tiempo y con el tamaño de la población. De este modo, la ecuación en diferencias que modela a tal población queda como sigue:

$$x_{n+1} = x_n + h(x_n)x_n - g(x_n)x_n. \tag{3.15}$$

Además, se consideran las siguientes restricciones:

1. h debe de ser una función decreciente (entre más seres vivos en la población, menos nacimiento).

2. g debe de ser una función creciente (entre más seres vivos en la población, más defunciones).

Las funciones menos complejas son los polinomios de primer grado. Así, pongamos:

$$h(x_n) = a - bx_n \text{ y } g(x_n) = c + dx_n, \text{ donde } a, b, c, d \in \mathbb{R}^+.$$

Luego, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + (a - bx_n)x_n - (c + dx_n)x_n \\ &= (1 + a - c)x_n - (b + d)x_n^2 \\ &= (1 + a - c)x_n \left(1 - \tfrac{b+d}{1+a-c}x_n\right). \end{aligned}$$

Finalmente, multiplicando ambos miembros por $\frac{b+d}{1+a-c}$ y renombrando la población por $z_n = \frac{b+d}{1+a-c}x_n$ y poniendo $A = 1 + a - c$ con $A > 0$, obtenemos que:

$$z_{n+1} = Ax_n(1 - z_n), \text{ para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{3.16}$$

Notemos que en (3.16) obtenemos la Ecuación Logística Discreta o Modelo Logístico Discreto.

En este caso, la razón de crecimiento está dado por $R = A(1 - z_n)$, la cual depende linealmene del tamaño de la población. Por otra parte, la tasa neta de crecimiento está dada por $\alpha = A - 1 - Ax_n = h(x_n) - g(x_n)$.

Nuevamente, la función f que determina el modelo (3.16) está dada por:

$$f(x) = Rx(1 - x), \text{ para cada } x \in \mathbb{R}^+,$$

la cual es *la función Logística*. En la Figura 3.8, se muestra el comportamiento de la función Logística.

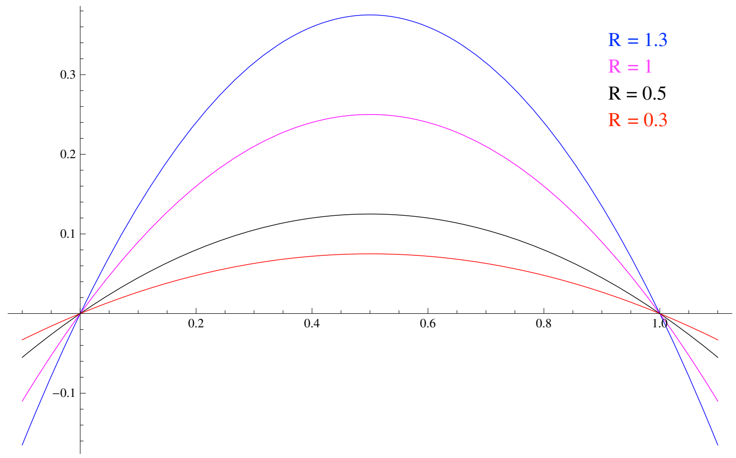

Figura 3.8: Gráfica de la función Logística. En esta gráfica se muestra el comportamiento de la función $f(x) = Rx(1-x)$ en relación con algunos valores de R.

En la Sección 2.3.3, se realizó un estudio mas detallado sobre la función Logística.

3.4. Un Modelo Lineal

Consideremos el Modelo de Malthus, con la condición adicional de que en cada periodo de tiempo se agregan C unidades a la población. En este caso el modelo que representa esta nueva situación está dado por:

$$x_{n+1} = Rx_n + C, \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{3.17}$$

En este caso la función f que determina el comportamiento del sistema dinámico, es la función lineal que está dada por:

$$f(x) = Rx + C, \text{ para cada } x \in \mathbb{R}^+.$$

El modelo (3.17), se le conoce como *Modelo Lineal*.

Suponiendo que se cuenta con una población inicial x_0, se obtiene una solución para el Modelo Lineal. Tal solución está dada por:

$$x_{n+1} = R^n x_0 + C\left(\frac{1-R^n}{1-R}\right), \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{3.18}$$

Además, el punto de equilibrio o punto fijo, se tiene cuando la población tiene un tamaño $\frac{C}{1-R}$.

Ejemplo 3.4.1. En cierto habitad se cuenta con una población de alguna especie la cual se encuentra en peligro de extinción, con una razón de crecimiento de $R = 0.8$. Además, en cada periodo de tiempo (cada año), se agregan cinco miembros a la población. Supongamos que se cuenta con una población inicial de $x_0 = 100$.

En este caso, el modelo que representa tal situación es:

$$x_{n+1} = 0.8x_n + 5, \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{3.19}$$

El cual está determinado por la función lineal f definida por:

$$f(x) = 0.8x + 5, \text{ para cada } x \in \mathbb{R}^+.$$

Observemos que el único punto fijo de $f(x)$ es $x = 25$ y $|(f)'(25)| = 0.8 < 1$, luego, por el Teorema 2.2.5, se concluye que $x = 25$ es un punto fijo atractor (Vea Figura 3.9).

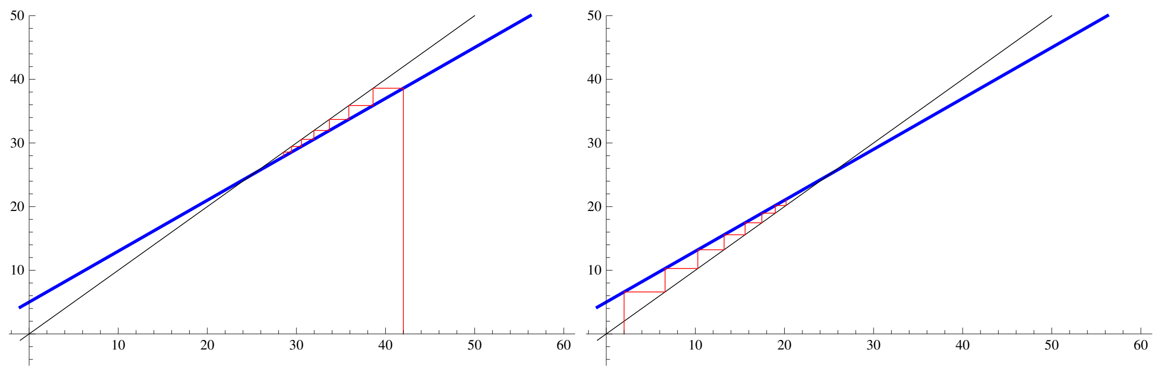

Figura 3.9: Diagrama Cobweb de la función $f(x) = 0.8x + 5$. En el primer diagrama, se ha elegido como población inicial a $x_0 = 42$ y en el segundo diagrama, la población inicial es $x_0 = 2$. En ambos diagramas se observa que el punto fijo $x = 25$ es atractor.

Para la población inicial $x_0 = 100$, la solución a tal modelo está dada por:

$$x_{n+1} = (0.8)^n 100 + 5\left(\frac{1-(0.8)^n}{0.2}\right), \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

La población obtiene el equilibrio, es decir, se mantiene fija, cuando se cuenta con $\frac{C}{1-R} = 25$ miembros en la población.

Capítulo 4

Funciones dinámicas

En este capítulo analizamos tipos especiales de funciones dinámicas que determinan clases de sistemas dinámicos discretos. Además, estudiaremos la relación que existe entre cada una de estas funciones. También se proporcionan ejemplos de tales funciones.

4.1. Funciones exactas, mezclantes y del tipo transitivas

Definición 4.1.1. Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Se dice que f es:

1. *mezcladora* si para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$, para cada $k \geq N$;

2. *débilmente mezcladora* si para cualesquiera subconjuntos abiertos no vacíos U_1, U_2, V_1 y V_2 de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2\}$.

Proposición 4.1.2. Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Si f es una función mezcladora, entonces f es débilmente mezcladora y transitiva.

Demostración.
Supongamos que f es mezcladora. Veamos que f es débilmente mezcladora. Sean U_1, U_2, V_1 y V_2 subconjuntos abiertos no vacíos de X. Dado que f es mezcladora existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que $f^m(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^l(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$, para cada $m \geq N_1$ y $l \geq N_2$. Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$. Así, $f^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2\}$ y para cada $k \geq N$. Por lo tanto, f es débilmente mezcladora. Por otro lado, de la definición de una función mezcladora se sigue que f es transitiva. $\square$

Directamente de las definiciones de función f débilmente mezcladora y transitiva, se tiene la siguiente observación.

Observación 4.1.3. Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Si f es una función débilmente mezcladora, entonces f es transitiva.

El siguiente teorema se conoce bien, para ver una prueba puede consultar [5].

Teorema 4.1.4. Sean X un continuo, $f : X \to X$ una función continua y $n \in \mathbb{N}$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. f es débilmente mezcladora.

2. Para cada $m \geq 2$ y para cualesquiera abiertos no vacíos $U_1, U_2, \ldots, U_m$, $V_1, V_2, \ldots, V_m$ de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

3. Para cada U, V_1, V_2 subconjuntos abiertos no vacíos de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2\}$.

Definición 4.1.5. Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Se dice que f es *exacta*, si para cada subconjunto abierto no vacío U de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) = X$.

Proposición 4.1.6. La función Tienda $T : [0, 1] \to [0, 1]$ es exacta.

Demostración.
Veamos que T es exacta, es decir, veamos que para todo abierto U no vacío de $[0, 1]$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(U) = [0, 1]$. En efecto, sea U un abierto en $[0, 1]$. Luego, existen $a, b \in [0, 1]$ tales que $(a, b) \subset U$. Así, por el Corolario 2.3.20, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n((a, b)) = [0, 1]$. De aquí, $[0, 1] \subset T^n(U)$. Por otro lado, observemos que $T^n(U) \subset [0, 1]$. Por lo tanto, $T^n(U) = [0, 1]$. $\square$

Proposición 4.1.7. Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Si f es una función exacta, entonces f es transitiva.

Demostración.
Sean U, V abiertos no vacíos en X. Dado que f es exacta, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^N(U) = X$. Así, $f^N(U) \cap V \neq \emptyset$. $\square$

De la Proposición 4.1.7 y por el Teorema 2.4.5, se sigue:

Observación 4.1.8. Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Si f es una función exacta, entonces f es sobreyectiva.

Proposición 4.1.9. Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Si f es una función exacta, entonces para cada abierto no vacío U en X existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) = X$, para cada $k \geq N$.

Demostración.
Supongamos que f es exacta. Sea U abierto no vacío en X. Dado que f es exacta, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^N(U) = X$. Por la Observación 4.1.8, se sabe que f es sobreyectiva. Así, $f^{N+1}(U) = f(f^N(U)) = f(X) = X$. Luego, $f^k(U) = X$, para todo $k \geq N$. $\square$

Teorema 4.1.10. Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Si f es una función exacta, entonces f es mezcladora.

Demostración.
Supongamos que f es exacta. Sean U, V abiertos no vacíos en X. Veamos que f es mezcladora. Por la Proposición 4.1.9, se sabe que existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) = X$, para cada $k \geq N$. Dado que $V \subset X$, se tiene que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$, para cada $k \geq N$. Por lo tanto, f es mezcladora. $\square$

Definición 4.1.11. Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Una función f es *totalmente transitiva*, si f^k es transitiva para cada $k \in \mathbb{N}$.

Se sigue de las definiciones la siguiente observación.

Observación 4.1.12. Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Si f es una función totalmente transitiva, entonces f es transitiva.

4.2. Funciones minimales, irreducibles y semi-abiertas.

Definición 4.2.1. Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Una función f es *fuertemente transitiva*, si para cada abierto U de X, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $X = \bigcup_{k=0}^{s} f^k(U)$.

Teorema 4.2.2. Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Si f es una función fuertemente transitiva, entonces f es transitiva.

Demostración.
Supongamos que f es fuertemente transitiva, veamos que f es transitiva. Sean U y V abiertos no vacíos en X. Veamos que existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $V \cap f^r(U) \neq \emptyset$. Dado que f es fuertemente transitiva, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $X = \bigcup_{k=0}^{s} f^k(U)$. Dado que $V \subset \bigcup_{k=0}^{s} f^k(U)$, existe un natural $r \in \{1, \ldots, s\}$ tal que $V \cap f^r(U) \neq \emptyset$. Por lo tanto, f es transitiva. $\square$

Definición 4.2.3. Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Una función f es *minimal*, si para cada cerrado no vacío A de X tal que $f(A) \subset A$, se tiene que $A = X$.

Teorema 4.2.4. Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Entonces f es minimal si y sólo si para cada $x \in X$, se tiene que $\overline{\mathcal{O}(x, f)} = X$.

Demostración.
Supongamos que f es minimal. Sea $x \in X$. Veamos que $\overline{\mathcal{O}(x, f)} = X$. Pongamos $A = \overline{\mathcal{O}(x, f)}$. Note que $A \neq \emptyset$ y A es cerrado en X. Veamos que $f(A) \subset A$, es decir, $f(\overline{\mathcal{O}(x, f)}) \subset \overline{\mathcal{O}(x, f)}$. En efecto, sea $a \in \overline{\mathcal{O}(x, f)}$. Veamos que $f(a) \in \overline{\mathcal{O}(x, f)}$. Sea U un abierto en X tal que $f(a) \in U$. Veamos que $U \cap \mathcal{O}(x, f) \neq \emptyset$. Note que $a \in f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(U)$ es abierto en X. Como $a \in \overline{\mathcal{O}(x, f)}$, se tiene que $f^{-1}(U) \cap \mathcal{O}(x, f) \neq \emptyset$. Así, existe $y \in f^{-1}(U) \cap \mathcal{O}(x, f)$. Como $y \in f^{-1}(U)$, $f(y) \in U$. Por otro lado, como $y \in \mathcal{O}(x, f)$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $y = f^k(x)$. Note que $f(y) = f(f^k(x)) = f^{k+1}(x)$. Así, $f^{k+1}(x) \in U$. Observe que $f^{k+1}(x) \in U \cap \mathcal{O}(x, f)$. En consecuencia, $U \cap \mathcal{O}(x, f) \neq \emptyset$. Así, por el Teorema 1.2.19, $f(a) \in \overline{\mathcal{O}(x, f)}$. Luego, $f(\overline{\mathcal{O}(x, f)}) \subset \overline{\mathcal{O}(x, f)}$. Dado que f es minimal, $\overline{\mathcal{O}(x, f)} = X$.
Recíprocamente, sean $A \subset X$ tal que $A \neq \emptyset$, A cerrado en X y $f(A) \subset A$. Veamos que $A = X$. Supongamos que $A \subsetneq X$. Luego, $X \setminus A$ es un abierto diferente del vacío. Sea $x \in A$. Dado que $\overline{\mathcal{O}(x, f)} = X$, $(X \setminus A) \cap \mathcal{O}(x, f) \neq \emptyset$. Sea $a \in (X \setminus A) \cap \mathcal{O}(x, f)$. Así, $a \in X \setminus A$ y $a = f^k(x)$, para algún $k \in \mathbb{N}$. Dado que $x \in A$ y $f(A) \subset A$, se tiene que $f^k(x) \in f^k(A) \subset f(A) \subset A$. Así, $a \in A$. Lo cual es una contradicción, que viene de suponer que $A \subsetneq X$. Por lo tanto, $A = X$. $\square$

Teorema 4.2.5. Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Si f es una función minimal, entonces f es transitiva.

Demostración.
Supongamos que f es minimal. Veamos que f es transitiva, es decir, para todo U y V abiertos en X existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$. Sean U y V abiertos en X y sea $x \in U$. Dado que f es minimal, $\overline{\mathcal{O}(x, f)} = X$. Note que $V \cap \mathcal{O}(x, f) \neq \emptyset$. Sea $z \in V \cap \mathcal{O}(x, f)$. Así, $z \in V$ y $z = f^m(x)$, para algún $m \in \mathbb{N}$. Luego, $f^m(x) \in V$. Como $x \in U$, se sigue que $f^m(x) \in f^m(U)$. Por lo tanto, $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$. $\square$

Por el Teorema 4.2.5 y la Observación 2.4.5, se tiene la siguiente observación.

Observación 4.2.6. Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Si f es una función minimal, entonces f es sobreyectiva.

Recordemos que en el Capítulo 2 comentamos que $f^{-n}(A)$ denota a $(f^n)^{-1}(A)$, es decir, la preimagen de $A \subset X$ bajo f. Con esta aclaración podemos estudiar lo siguiente:

Teorema 4.2.7. Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Se tiene que f es minimal si y sólo si para cada abierto U en X, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $X = \bigcup_{k=0}^{s} f^{-k}(U)$.

Demostración.
Supongamos que f es minimal. Sea U un abierto en X, tal que $U \neq \emptyset$. Veamos que existe $s \in \mathbb{N}$, tal que $X = \bigcup_{k=0}^{s} f^{-k}(U)$. Sea $x \in X$. Dado que f es minimal, por el Teorema 4.2.4, se sigue que $\overline{\mathcal{O}(x,f)} = X$. Note que $U \cap \mathcal{O}(x,f) \neq \emptyset$. Sea $y \in U \cap \mathcal{O}(x,f)$. Así, $y \in U$ y $y = f^{m(x)}(x)$, para algún $m(x) \in \mathbb{N}$. Observemos que $f^{m(x)}(x) \in U$. Luego, $x \in (f^{m(x)})^{-1}(U) = f^{-m(x)}(U)$. De esta manera, $X = \bigcup\{f^{-m(x)}(U) : x \in X\}$. Dado que X es compacto, existen $x_1, \ldots, x_r \in X$ tales que $X = \bigcup_{i=0}^{r} f^{-m(x_i)}(U)$. Tomando $s = \max\{m(x_1), \ldots, m(x_r)\}$. Concluimos que $X = \bigcup_{k=0}^{s} f^{-k}(U)$.
Recíprocamente, por el Teorema 4.2.4, basta verificar que para todo $x \in X$, se tiene que $\overline{\mathcal{O}(x,f)} = X$. Para esto último sea $x \in X$. Veamos que $\overline{\mathcal{O}(x,f)} = X$. Sea U un abierto no vacío en X. Por hipótesis, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $X = \bigcup_{k=0}^{s} f^{-k}(U)$. Así, $\mathcal{O}(x,f) \cap \left(\bigcup_{k=0}^{s} f^{-k}(U)\right) \neq \emptyset$. Sea $y \in \mathcal{O}(x,f) \cap \left(\bigcup_{k=0}^{s} f^{-k}(U)\right)$. De esta manera, $y = f^m(x)$, para algún $m \in \mathbb{N}$ y $y \in f^{-r}(U)$, para algún $r \in \{0, \ldots, s\}$. Observe que $f^r(y) = f^r(f^m(x)) = f^{r+m}(x)$ y $f^r(y) \in U$. Así, $f^r(y) \in \mathcal{O}(x,f)$ y $f^r(x) \in U$. En consecuencia, $U \cap \mathcal{O}(x,f) \neq \emptyset$. Por lo tanto, f es minimal. □

Corolario 4.2.8. Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Si f es una función minimal, entonces f es fuertemente transitiva.

Demostración.
Supongamos que f es una función minimal. Sea U un abierto en X. Mostremos que f es fuertemente transitiva, es decir, existe $\alpha \in \mathbb{N}$ tal que $X = \bigcup_{k=0}^{\alpha} f^k(U)$. Dado que f es minimal, por el Teorema 4.2.7, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $X = \bigcup_{k=0}^{s} f^{-k}(U)$. Sea $\alpha = s$. Notemos que por la Observación 4.2.6, se sigue que f es sobreyectiva. Así, $X = f^s(X) = f^s(\bigcup_{k=0}^{s} f^{-k}(U))$. Por otro lado, si desarrollamos la última expresión tendremos que $f^s(\bigcup_{k=0}^{s} f^{-k}(U)) = \bigcup_{k=0}^{s} f^k(U)$. En consecuencia, $X = \bigcup_{k=0}^{s} f^k(U)$. Por lo tanto, f es fuertemente transitiva. □

Definición 4.2.9. Sean X un continuo y $f : X \to Y$ una función continua. Se dice que f es *irreducible* si el único subconjunto cerrado $A \subset X$ tal que $f(A) = Y$ es $A = X$.

Observación 4.2.10. Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Si f es una función irreducible, entonces f es sobreyectiva.

Teorema 4.2.11. Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. Existe un cerrado en X, $A \neq X$ tal que $f(A) = f(X)$.
2. Existe un abierto en X, $B \neq \emptyset$ tal que $f(B) \subset f(X \setminus B)$.

Demostración.
1)⇒ 2) Sea A un cerrado no vacío en X tal que $A \neq X$ y $f(A) = f(X)$. Veamos que existe un abierto $B \neq \emptyset$ en X tal que $f(B) \subset f(X \setminus B)$. Sea $B = X \setminus A$. Note que B es un abierto en X. Dado que $A \neq X$, se sigue que $B \neq \emptyset$. Observe que $f(B) \subset f(X \setminus B)$. En efecto, sea $x \in B$. Así, $x \in X$ y $x \notin A$. Dado que $x \in X$, se tiene que $f(x) \in f(X) = f(A) = f(X \setminus B)$. En consecuencia, $f(B) \subset f(X \setminus B)$.
2)⇒ 1) Sea B un abierto no vacío en X tal que $f(B) \subset f(X \setminus B)$. Veamos que existe un cerrado A en X tal que $A \neq X$ y $f(A) = f(X)$. Sea $A = X \setminus B$. Note que A es un cerrado en X y $A \neq X$. Veamos que $f(A) = f(X)$. Es claro que $f(A) \subset f(X)$. Por otro lado, sea $x \in X$. Si $x \in B$, se tiene que $f(x) \in f(B) \subset f(X \setminus B) = f(A)$. Por otra parte, si $x \notin B$, se sigue que $x \in X \setminus B$. De aquí $x \in A$. Luego, $f(x) \in f(A)$. Así, considerando los dos únicos casos para x se tiene que $f(X) \subset f(A)$. En consecuencia, $f(X) = f(A)$. □

Teorema 4.2.12. Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Si existe un cerrado $A \neq X$ en X tal que $f(A) = f(X)$, entonces f no es minimal.

Demostración.
Supongamos que existe un cerrado $A \neq X$ en X tal que $f(A) = f(X)$. Veamos que f no es minimal. Observemos que si $f(X) \neq X$, se sigue que f no es minimal. Supongamos que $f(X) = X$. Denotaremos por g a $f\mid_A$. Consideremos $V = \bigcap_{k=0}^{\infty} f^{-k}(A) = \bigcap_{k=0}^{\infty} g^{-k}(A)$. Dado que f es continua y A es cerrado en X, se tiene que $g^{-k}(A)$ es un cerrado no vacío en X, para cada $k \in \mathbb{N}$. Como X es compacto y $g^{-k}(A) \subset X$, por el Teorema 1.2.28, se tiene que $g^{-k}(A)$ es un compacto no vacío, para cada $k \in \mathbb{N}$. Observemos que $g^{-1}(A) \subset A$, así, en general $g^{-k}(A) \subset g^{-(k-1)}(A)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego, por el Teorema 1.5.20, V es un compacto no vacío. Sea $v \in V$ y $U = X \setminus A$. Notemos que U es un abierto no vacío en X. Veamos que $\mathcal{O}(v, f) \cap U = \emptyset$. En efecto, supongamos que $\mathcal{O}(v, f) \cap U \neq \emptyset$. Así, sea $x \in \mathcal{O}(v, f) \cap U$. Luego, $x \in \mathcal{O}(v, f)$ y $x \in U$, es decir, $x = f^p(v)$, para algún $p \in \mathbb{N}$ y $x \notin A$. Por otro lado, como $v \in V$, se sigue que $v \in f^{-\alpha}(A)$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}$. En particular, $v \in f^{-p}(A)$. Así, $f^p(v) \in A$. De esto se sigue que $x \in A$. Lo cual es una contradicción. En consecuencia, $\mathcal{O}(v, f) \cap U = \emptyset$. Luego, por el Teorema 4.2.4, f no es minimal. $\square$

Como consecuencia de los Teoremas 4.2.11 y 4.2.12, se tiene el siguiente resultado.

Corolario 4.2.13. Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Si f es minimal, entonces f es irreducible.

Teorema 4.2.14. Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Se tiene que las siguientes condiciones son equivalentes:

1. f es un homeomorfismo,
2. f es irreducible y abierta.

Demostración.
1) $\Rightarrow$ 2) Así, por el Teorema 1.4.7, se sabe que f es abierta y biyectiva. Note que f es sobreyectiva, de donde $f(X) = X$. Veamos que f es irreducible. Supongamos que existe A un cerrado en X tal que $A \neq X$ y $f(A) = X$. Sea $y \in X \setminus A$. Esto es, $y \notin A$. Dado que $f(y) \in f(X) = X$ y $f(A) = X$, existe $a \in A$ tal que $f(a) = f(y)$. Como f es biyectiva, en particular f es inyectiva. En consecuencia, se tiene que $a = y$. Así, $y \in A$. Lo cual es una contradicción.
2)$\Rightarrow$ 1) Recíprocamente, supongamos que f es irreducible y abierta. Veamos que f es un homeomorfismo. Dado que f es abierta y continua, por el Teorema 1.4.7, basta probar que f es biyectiva. En efecto, dado que f es irreducible, se sigue que f es sobreyectiva. Por otro lado, notemos que f es inyectiva. En efecto, supongamos que existen $a \in X$ y $b \in X$ tales que $a \neq b$ y $f(a) = f(b) = c$. Por el Teorema 1.2.26, sea U_a una vecindad abierta de a y U_b una vecindad abierta de b tales que $U_a \cap U_b = \emptyset$. Dado que f es abierta, se tiene que $f(U_a)$ es un abierto en X y $c \in f(U_a)$. Como f es continua, existe una vecindad V_b abierta de b tal que $V_b \subset U_b$ y $f(V_b) \subset f(U_a)$. Observemos que $U_a \subset X \setminus U_b$, así $f(U_a) \subset f(X \setminus U_b)$. También, notemos que $X \setminus U_b \subset X \setminus V_b$, de donde $f(X \setminus U_b) \subset f(X \setminus V_b)$. En consecuencia, se concluye que $f(V_b) \subset f(X \setminus V_b)$. Luego, por los Teoremas 4.2.11 y 4.2.12 y el Corolario 4.2.13, se sigue que f no es irreducible. Lo cual es una contradicción, así f es inyectiva. Por lo tanto f es biyectiva. $\square$

Definición 4.2.15. Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Una función f es *semi-abierta*, si para cada abierto U en X tal que $U \neq \emptyset$, existe un abierto V no vacío en X tal que $V \subset f(U)$.

El siguiente teorema nos brindará una caracterización de las funciones semi-abiertas.

Teorema 4.2.16. Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Se tiene que f es semi-abierta si y sólo si para cada $D \subset X$ denso en X, se tiene que $f^{-1}(D)$ denso en X.

Demostración.
Supongamos que f es semi-abierta. Veamos que para cada $D \subset X$ denso en X, se tiene que $f^{-1}(D)$ denso

en X. Sean $D \subset X$ denso en X y U un abierto en X. Dado que f es semi-abierta, existe V abierto en X tal que $V \subset f(U)$. Por otro lado, como D es denso en X, se tiene que $D \cap V \neq \emptyset$. Así, $f(U) \cap D \neq \emptyset$. Sea $x \in f(U) \cap D$. De esta manera, se tiene $x \in D$ y existe $y \in U$ tal que $f(y) = x$. Observe que $f(y) \in D$ y $y \in f^{-1}(D)$. En consecuencia, se sigue que $f^{-1}(D) \cap U \neq \emptyset$. Dada la arbitrariedad de U, se concluye que $f^{-1}(D)$ denso en X.
Recíprocamente, supongamos que para cada $D \subset X$ denso en X, se tiene que $f^{-1}(D)$ denso en X. Veamos que f es semi-abierta. Sea U abierto en X. Supongamos que para todo abierto V en X, se tiene que $V \cap (X \setminus f(U)) \neq \emptyset$. De esta manera, se tiene que $D = X \setminus f(U)$ es denso en X. Así, $f^{-1}(X \setminus f(U))$ es denso en X. Es decir, $\overline{f^{-1}(X \setminus f(U))} = \overline{f^{-1}(X) \setminus f^{-1}(f(U))} = \overline{X \setminus f^{-1}(f(U))} = X$. De donde, $U \cap (X \setminus f^{-1}(f(U))) \neq \emptyset$. Sea $x \in U \cap (X \setminus f^{-1}(f(U)))$. De esta forma se tiene que $x \in U$ y $x \in X \setminus f^{-1}(f(U))$. Observemos que $U \subset f^{-1}(f(U))$. En consecuencia, $x \in f^{-1}(f(U))$ y $x \in X \setminus f^{-1}(f(U))$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, f es semi-abierta. $\square$

Teorema 4.2.17. Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Se tiene que f es semi-abierta si y sólo si para cada $U \subset X$ abierto no vacío en X, se tiene que $\text{int}(f(U)) \neq \emptyset$.

Demostración.
Supongamos que f es semi-abierta. Sea $U \subset X$ abierto no vacío en X. Veamos que $\text{int}(f(U)) \neq \emptyset$. Dado que f es semi-abierta, existe un abierto V no vacío en X tal que $V \subset f(U)$. De donde $\text{int}(V) \subset \text{int}(f(U))$. Dado que V es abierto en X, se tiene que $V = \text{int}(V)$ y también que $\text{int}(V) \neq \emptyset$. De este modo $\text{int}(f(U)) \neq \emptyset$.
Recíprocamente, supongamos que para cada $U \subset X$ abierto no vacío en X, se tiene que $\text{int}(f(U)) \neq \emptyset$. Veamos que f es semi-abierta, es decir, para cada U abierto en X tal que $U \neq \emptyset$, existe un abierto V no vacío en X tal que $V \subset f(U)$. Sea $U \subset X$ abierto no vacío en X. Luego, por nuestra hipótesis se sigue que $\text{int}(f(U)) \neq \emptyset$. Sea $x \in \text{int}(f(U))$, de esta manera existe un $\epsilon_x > 0$ tal que $B(\epsilon_x, x) \subset f(U)$. Consideremos $V = \bigcup\{B(\epsilon_x, x) : x \in \text{int}(f(U))$ y sea ϵ_x tal que $B(\epsilon_x, x) \subset f(U)\}$. De aquí, por el Teorema 1.2.9, se sabe que V es abierto en X. Notemos que $V \subset f(U)$. Por lo tanto, f es semi-abierta. $\square$

Teorema 4.2.18. Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Si f es irreducible, entonces f es semi-abierta.

Demostración.
Supongamos que f es irreducible. Veamos que f es semi-abierta. Notemos que dada la compacidad de X, para todo $A \subset X$ se tiene que $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$. En efecto, dado que f es continua, para todo $A \subset X$ se tiene que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. Por otro lado, como X es un continuo y por el Teorema 1.5.23, se tiene que f es cerrada. Así, dado que para todo $A \subset X$ se tiene que $A \subset \overline{A}$ y como f es cerrada se concluye que $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$. En consecuencia, para todo $A \subset X$ se tiene que $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$. Sea $D \subset X$ denso en X. Para ver que f es semi-abierta, por el Teorema 4.2.16, basta ver que $f^{-1}(D)$ es denso en X. Como f es irreducible se sigue que f es sobreyectiva. De este modo, $f(f^{-1}(D)) = D$. Luego, $f(\overline{f^{-1}(D)}) = \overline{f(f^{-1}(D))} = \overline{D} = X$. Como f es irreducible, se sigue que $\overline{f^{-1}(D)} = X$. Es decir, $f^{-1}(D)$ denso en X. $\square$

El siguiente corolario se sigue por los Teoremas 4.2.13 y 4.2.18.

Corolario 4.2.19. Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Si f es minimal, entonces f es semi-abierta.

El siguiente corolario se sigue por los Teoremas 4.2.13 y 4.2.14.

Corolario 4.2.20. Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Si f es minimal y abierta, entonces f es un homeomorfismo.

El diagrama de la Figura 4.1, resume los resultados referente a las relaciones que existen entre las funciones dinámicas estudias en las Secciones 4.1 y 4.2.

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{Exacta} \arrow[d] & & \\
 & \text{Mezcladora} \arrow[d] & \text{Minimal} \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\text{Totalmente transitiva} \arrow[dr] & \text{Débilmente mezcladora} \arrow[d] & \text{Fuertemente transitiva} \arrow[dl] & \text{Irreducible} \arrow[d] \arrow[ddll] \\
\text{Caótica} \arrow[r] & \text{Transitiva} \arrow[d] & & \text{Semi-abierta} \\
 & \text{Sobreyectiva} & &
\end{tikzcd}
$$

Figura 4.1: Diagrama que muestra las relaciones entre las funciones estudiadas en éste capítulo.

Por la Proposición 4.1.6 y el Diagrama de la Figura 4.1, concluimos que:

Corolario 4.2.21. La función $T : [0,1] \to [0,1]$ es mezcladora y débilmente mezcladora en $[0,1]$.

Con el objetivo de brindar un ejemplo de una función minimal estudiamos lo siguiente:

Definición 4.2.22. Fijemos $\alpha \in \mathbb{I}$. Consideremos $\mathbb{S}^1$ como un subconjunto de $\mathbb{C}$, esto es, $\mathbb{S}^1 = \{e^{2\pi i\theta} : \theta \in [0,1]\}$. Tomamos la función $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ definida por $f(z) = e^{2\pi i\alpha}z$, para todo $z \in \mathbb{S}^1$. La función f se le conoce como *función rotación irracional*.

Observación 4.2.23. Si $z = e^{2\pi i\theta}$, entonces $f(z) = e^{2\pi i\alpha}e^{2\pi i\theta} = e^{2\pi i(\alpha+\theta)}$.

Dado $z \in \mathbb{C}$, $\|z\|$ denota el módulo de z.

Proposición 4.2.24. Sea $\alpha \in \mathbb{I}$. La función rotación irracional, $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ tal que $f(z) = e^{2\pi i\alpha}z$, para todo $z \in \mathbb{S}^1$, es una isometría.

Demostración.
Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{S}^1$. Veamos que f es una isometría, es decir, $\|z_1 - z_2\| = \|f(z_1) - f(z_2)\|$. En efecto, $\|f(z_1) - f(z_2)\| = \|e^{2\pi i\alpha}z_1 - e^{2\pi i\alpha}z_2\| = \|e^{2\pi i\alpha}\|\|z_1 - z_2\| = \|z_1 - z_2\|$. $\square$

Es conocido que la función rotación irracional es totalmente transitiva y minimal (Vea [2] y [4]). Así, por la Observación 4.1.12 y el Corolario 4.2.8, la función rotación irracional es transitiva y fuertemente transitiva. Así, tenemos la siguiente proposición:

Proposición 4.2.25. Sea $\alpha \in \mathbb{I}$. La función rotación irracional, $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ tal que $f(z) = e^{2\pi i\alpha}z$, para todo $z \in \mathbb{S}^1$, es totalmente transitiva, minimal, transitiva y fuertemente transitiva.

Por la Proposición 4.2.25 y el Diagrama de la Figura 4.1, concluimos que:

Corolario 4.2.26. Sea $\alpha \in \mathbb{I}$. La función rotación irracional, $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ tal que $f(z) = e^{2\pi i\alpha}z$, para todo $z \in \mathbb{S}^1$, es irreducible y semi-abierta.

4.3. Conjugación topológica

En esta sección estudiaremos a la conjugación topológica y aquí h^{-1} denota a la función inversa de la función h.

Definición 4.3.1. Sean X y Y espacios métricos. Dadas dos funciones continuas $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ decimos que *son conjugadas* si existe un homeomorfismo $h : X \to Y$ tal que para todo $x \in X$, se tiene que $h(f(x)) = g(h(x))$. En tal caso se dice que h conjuga a g con f.

Ejemplo 4.3.2. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones dadas por $f(x) = x + 1$ y $g(x) = x + 2$. Se tiene que f y g son conjugadas.
En efecto, propongamos a la familia de homeomorfismos $h(x) = \alpha x + \beta$ con α y β constantes, donde $\alpha \neq 0$. Encontremos las condiciones que deben de cumplir α y β para que f y g sean conjugadas mediante el homeomorfismo h. Sean $x \in \mathbb{R}$ y $h(x) = \alpha x + \beta$. Notemos que $h(f(x)) = \alpha(x + 1) + \beta = x\alpha + \alpha + \beta$. Por otro lado, observemos que $g(h(x)) = x\alpha + \beta + 2$. De aquí $\alpha = 2$ y β puede ser cualquier valor. Por lo tanto, las funciones f y g son conjugadas mediante el homeomorfismo $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $h(x) = 2x + \beta$, donde $\beta \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 4.3.3. La función Logística $f_4 = 4x(1 - x)$ y la función Tienda T son conjugadas.
En efecto, propongamos la función $h : [0, 1] \to [0, 1]$ dada por $h(x) = \text{sen}^2(\frac{\pi x}{2})$. Observemos que h es un homeomorfismo (Vea Ejemplo 1.5.26).

Recordemos que:

Propiedad 1. $\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

Propiedad 2. $\text{sen}(2\theta) = 2\text{sen}(\theta)\cos(\theta)$.

Propiedad 3. $\text{sen}(a - b) = \text{sen}(a)\cos(b) - \text{sen}(b)\cos(a)$.

Observemos que:

$$\begin{aligned} f_4(h(x)) &= 4\text{sen}^2(\frac{\pi x}{2})(1 - \text{sen}^2(\frac{\pi x}{2})), \\ &= 4\text{sen}^2(\frac{\pi x}{2})\cos^2(\frac{\pi x}{2}), \text{ usamos la Propiedad 1}, \\ &= (2\text{sen}(\frac{\pi x}{2})\cos(\frac{\pi x}{2}))^2, \\ &= (\text{sen}(\pi x))^2, \text{usamos la Propiedad 2}, \\ &= \text{sen}^2(\pi x). \end{aligned}$$

Ahora analicemos a $h(T(x))$. Por la naturaleza de la función T, el análisis de $h(T(x))$ se divide en 2 casos. Si $x \in [0, \frac{1}{2}]$, entonces $h(T(x)) = h(2x) = \text{sen}^2(\frac{2\pi x}{2}) = \text{sen}^2(\pi x)$. Si $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, entonces $h(T(x)) = h(2 - 2x) = \text{sen}^2(\frac{(2-2x)\pi}{2}) = \text{sen}^2(\pi - \pi x) = (\text{sen}(\pi)\cos(\pi x) - \text{sen}(\pi x)\cos(\pi))^2 = \text{sen}^2(\pi x)$. Así, $f_4(h(x)) = h(T(x))$.
Por lo tanto, las funciones f_4 y T son conjugadas mediante el homeomorfismo $h(x) = \text{sen}^2(\frac{\pi x}{2})$.

Sean f y g funciones continuas. Diremos que $f \sim g$ si f y g son conjugadas.

Proposición 4.3.4. La relación $\sim$ es una relación de equivalencia.

Demostración.
La relación es reflexiva. Sea $f : X \to X$ una función continua y $I : X \to X$ tal que $I(x) = x$. Notemos que I es un homeomorfismo. Dado que $f \circ I = I \circ f$, se tiene que f es conjugada consigo mismo, es decir $f \sim f$.
La relación es simétrica. Si $f \sim g$, entonces existe un homeomorfismo $h : X \to Y$ tal que $h(f(x)) = g(h(x))$. Dado que $h^{-1} : Y \to X$ es un homeomorfismo se tiene que $h^{-1}(g(x)) = f(h^{-1}(x))$. Por lo tanto, $g \sim f$.
La relación es transitiva. Sean $f : X \to X$, $g : Y \to Y$ y $r : Z \to Z$ funciones continuas tales que $f \sim g$ y

$g \sim r$. De aquí se sigue que existen los homeomorfismos h y H tales que:

$$h(f(x)) = g(h(x)), \tag{4.1}$$
$$H(g(x)) = r(H(x)). \tag{4.2}$$

De la igualdad (4.1) se sigue que $H(h(f(x))) = H(g(h(x)))$, y de la igualdad (4.2) se tiene que $H(g(h(x))) = r(H(h(x)))$. Así, $H(h(f(x))) = r(H(h(x)))$. Dado que $H \circ h$ es un homeomorfismo se concluye que $f \sim r$. Por lo tanto, $f \sim g$ es una relación de equivalencia. $\square$

Teorema 4.3.5. Sean X y Y espacios métricos y $n \in \mathbb{N}$. Si $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ son dos funciones continuas tales que f y g son conjugadas mediante el homeomorfismo $h : X \to Y$, entonces $h(f^n(x)) = g^n(h(x))$.

Demostración.
Procederemos a una demostración por inducción matemática. Dado que f y g son conjugadas mediante el homeomorfismo h, se sigue que $h(f(x)) = g(h(x))$. Así, la afirmación es cierta cuando $n = 1$. Sea $k \in \mathbb{N}$. Supongamos que se cumple $h(f^k(x)) = g^k(h(x))$, probemos que la afirmación se cumple para $k+1$. En efecto, $h(f^{k+1}(x)) = h(f^k(f(x))) = g^k(h(f(x))) = g^k(g(h(x))) = g^{k+1}(h(x))$. Por el principio de inducción matemática, se sigue que $h(f^n(x)) = g^n(h(x))$, para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Teorema 4.3.6. Sean X y Y espacios métricos. Si $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ son dos funciones continuas tales que f y g son conjugadas mediante el homeomorfismo $h : X \to Y$, entonces g y f también son conjugadas mediante el homeomorfismo h^{-1}.

Demostración.
Sea $y \in Y$. Veamos que g y f son conjugadas mediante el homeomorfismo h^{-1}, es decir, $h^{-1}(g(y)) = f(h^{-1}(y))$. En efecto, $g(y) = g(h(h^{-1}(y))) = h(f(h^{-1}(y)))$. Aplicando el homeomorfismo h^{-1} a los extremos de la igualdad anterior obtenemos que $h^{-1}(g(y)) = f(h^{-1}(y))$. $\square$

De los Teoremas 4.3.6 y 4.3.5, se sigue que:

Corolario 4.3.7. Sean X y Y espacios métricos y $n \in \mathbb{N}$. Si $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ son dos funciones continuas tales que f y g son conjugadas mediante el homeomorfismo h, entonces $h^{-1}(g^n(y)) = f^n(h^{-1}(y))$, para cada $y \in Y$.

Teorema 4.3.8. Sean X y Y espacios métricos. Dadas dos funciones continuas $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ tales que f y g son conjugadas mediante el homeomorfismo $h : X \to Y$. Si $x_0 \in X$ es un punto fijo de f, entonces $h(x_0)$ es un punto fijo de g.

Demostración.
Sea $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = x_0$. Notemos que $g(h(x_0)) = h(f(x_0)) = h(x_0)$. $\square$

Teorema 4.3.9. Sean X y Y espacios métricos y $n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$. Dadas dos funciones continuas $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ tales que f y g son conjugadas mediante el homeomorfismo $h : X \to Y$. Si $x_0 \in X$ es un punto periódico para f de periodo n, entonces $h(x_0)$ es un punto periódico para g de periodo n.

Demostración.
Sea $x_0 \in X$ tal que $f^n(x_0) = x_0$ y $f^j(x_0) \neq x_0$ para $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Notemos que por el Teorema 4.3.5, se tiene que $g^n(h(x_0)) = h(f^n(x_0)) = h(x_0)$. Veamos que $g^j(h(x_0)) \neq h(x_0)$ para $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. En efecto, sea $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Procederemos por contradicción, supongamos que $g^j(h(x_0)) = h(x_0)$. De esta igualdad y por el Teorema 4.3.5, se tiene que $h(f^j(x_0)) = h(x_0)$. Dado que h es un homeomorfismo,

en particular es inyectiva, por lo cual podemos concluir que $f^j(x_0) = x_0$. Lo cual es una contradicción. En consecuencia, $g^n(h(x_0)) = h(x_0)$ y $g^j(h(x_0)) \neq h(x_0)$ para $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Por lo tanto, $h(x_0)$ es un punto periódico para g de periodo n. □

Teorema 4.3.10. Sean X y Y espacios métricos. Dadas dos funciones continuas $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ tales que f y g son conjugadas mediante el homeomorfismo $h : X \to Y$. Si $y \in Per(g)$, entonces $x = h^{-1}(y) \in Per(f)$.

Demostración.
Sea $y \in Per(g)$. Luego, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g^n(y) = y$ y $g^j(y) = y$ para $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Veamos que $x = h^{-1}(y) \in Per(f)$. Observemos que $f^n(x) = f^n(h^{-1}(y))$. Luego, por el Teorema 4.3.6, se tiene que $f^n(x) = h^{-1}(g^n(y)) = h^{-1}(y) = x$. Veamos que $f^j(x) \neq x$ para $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. En efecto, sea $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Procederemos por contradicción, supongamos que $f^j(x) = x$. Por el Teorema 4.3.5, $f^j(x) = f^j(h^{-1}(y)) = h^{-1}(g^j(y)) = x = h^{-1}(y)$. Dado que h^{-1} es un homeomorfismo en particular es inyectiva, así, $g^j(y) = y$. Lo cual es una contradicción. En consecuencia, $f^n(x) = x$ y $f^j(x) \neq x$ para $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Por lo tanto, $x = h^{-1}(y) \in Per(f)$. □

De los Teoremas 4.3.9 y 4.3.10 se sigue que:

Corolario 4.3.11. Sean X y Y espacios métricos. Si $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ son dos funciones continuas tales que f y g son conjugadas mediante el homeomorfismo $h : X \to Y$, entonces $h(Per(f)) = Per(g)$.

Teorema 4.3.12. Sean X y Y espacios métricos. Dadas dos funciones continuas $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ tales que f y g son conjugadas mediante el homeomorfismo $h : X \to Y$. El conjunto $Per(f)$ es denso en X si y sólo si el conjunto $Per(g)$ es denso en Y.

Demostración.
Supongamos que el conjunto $Per(f)$ es denso en X. Veamos que el conjunto $Per(g)$ es denso en Y, es decir, para todo U abierto en Y se tiene que $Per(g) \cap U \neq \emptyset$. Sea U abierto en Y. Dado que h es un homeomorfismo se tiene que $h^{-1}(U)$ es abierto y no vacío en X. Como $Per(f)$ es denso en X, se sabe que $Per(f) \cap h^{-1}(U) \neq \emptyset$. Sean $x_0 \in Per(f) \cap h^{-1}(U)$ y $y_0 = h(x_0)$. Puesto que $x_0 \in Per(f)$, por el Teorema 4.3.9, se tiene que $y_0 \in Per(g)$. Notemos que $y_0 \in U$. En consecuencia, $Per(g) \cap U \neq \emptyset$.
Recíprocamente, supongamos que el conjunto $Per(g)$ es denso en Y. Veamos que el conjunto $Per(f)$ es denso en X, es decir, para cada U abierto en X se tiene que $Per(f) \cap U \neq \emptyset$. Sea U un abierto en X. Dado que h es un homeomorfismo se tiene que $h(U)$ es abierto y no vacío en Y. Como $Per(g)$ es denso en Y, se sabe que $Per(g) \cap h(U) \neq \emptyset$. Sean $y_0 \in Per(g) \cap h(U)$ y $x_0 = h^{-1}(y_0)$. Puesto que $y_0 \in Per(g)$, por el Teorema 4.3.10, $x_0 \in Per(f)$. Notemos que $x_0 \in U$. En consecuencia, $Per(f) \cap U \neq \emptyset$. □

Teorema 4.3.13. Sean X y Y espacios métricos. Sean $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ dos funciones continuas tales que f y g son conjugadas mediante el homeomorfismo $h : X \to Y$. La función f es transitiva en X si y sólo si la función g es transitiva en Y.

Demostración.
Supongamos que la función f es transitiva en X. Veamos que la función g es transitiva en Y, es decir, para todo U y V abiertos en Y existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Sean U y V abiertos no vacíos en Y. Dado que h es un homeomorfismo se tiene que $h^{-1}(U)$ y $h^{-1}(V)$ son abiertos y no vacíos en X. Como f es transitiva en X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(h^{-1}(U)) \cap h^{-1}(V) \neq \emptyset$. De aquí, se sigue que existe un $n \in \mathbb{N}$ y un $x_0 \in h^{-1}(U)$ tal que $f^n(x_0) \in h^{-1}(V)$. Como f y g son conjugadas mediante el homeomorfismo h, por el Teorema 4.3.5, se sabe que $g^n(h(x_0)) = h(f^n(x_0))$. De donde, $g^n(h(x_0)) \in V$. Por otro lado, notemos que $h(x_0) \in U$, así, se tiene que $g^n(h(x_0)) \in g^n(U)$. En consecuencia, $g^n(U) \cap V \neq \emptyset$.
Recíprocamente, supongamos que la función g es transitiva en Y. Veamos que la función f es transitiva en X, es decir, para todo U y V abiertos en X existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Sean U y V abiertos

no vacíos en X. Dado que h es un homeomorfismo se tiene que $h(U)$ y $h(V)$ son abiertos y no vacíos en Y. Como g es transitiva en Y, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g^n(h(U)) \cap h(V) \neq \emptyset$. Se sigue que existe un $x_0 \in h(U)$ tal que $g^n(x_0) \in h(V)$. Como f y g son conjugadas mediante el homeomorfismo h, por el Corolario 4.3.7, se sabe que $f^n(h^{-1}(x_0)) = h^{-1}(g^n(x_0))$. De donde, $f^n(h^{-1}(x_0)) \in V$. Por otro lado, notemos que $h^{-1}(x_0) \in U$, así, se tiene que $f^n(h^{-1}(x_0)) \in f^n(U)$. En consecuencia, $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. $\square$

Con los Teoremas 4.3.13 y 2.4.2, y el Ejemplo 4.3.3, se sigue que:

Teorema 4.3.14. La función Logística $f_4 = 4x(1-x)$ es transitiva en $[0,1]$.

De los Teoremas 4.3.12 y 4.3.13 se sigue que:

Teorema 4.3.15. Sean X y Y espacios métricos. Sean $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ dos funciones continuas tales que f y g son conjugadas mediante el homeomorfismo $h : X \to Y$. La función f es caótica en X si y sólo si la función g es caótica en Y.

Con los Teoremas 4.3.15 y 2.4.8, y el Ejemplo 4.3.3, se sigue que:

Teorema 4.3.16. La función Logística $f_4 = 4x(1-x)$ es caótica en $[0,1]$.

Teorema 4.3.17. Sean X y Y espacios métricos. Sean $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ dos funciones continuas tales que f y g son conjugadas mediante el homeomorfismo $h : X \to Y$. La función f es exacta en X si y sólo si la función g es exacta en Y.

Demostración.
Supongamos que f es exacta en X. Veamos que g es exacta en Y, es decir, para todo abierto no vacío U en Y, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g^n(U) = Y$. Sea U un abierto no vacío en Y. Dado que h es un homeomorfismo, se sabe que $h^{-1}(U)$ es un abierto no vacío en X. Como f es exacta, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(h^{-1}(U)) = X$. Observemos que $g^n(U) \subset Y$. Para probar que g es exacta en Y, basta probar que $Y \subset g^n(U)$. En efecto, sea $y \in Y$. Dado que h es un homeomorfismo, se tiene que $h(X) = Y$. De aquí, $y \in h(X)$. Luego, existe $x \in X$ tal que $h(x) = y$. Teniendo en cuenta que $f^n(h^{-1}(U)) = X$, se sigue que $x \in f^n(h^{-1}(U))$. Así, existe $x_0 \in h^{-1}(U)$ tal que $f^n(x_0) = x$. Por el Teorema 4.3.5, se sabe que $g^n(h(x_0)) = h(f^n(x_0)) = h(x) = y$. Notemos que $h(x_0) \in U$. Así, $y \in g^n(U)$. En consecuencia, $Y \subset g^n(U)$. Por lo tanto, g es exacta en Y.
Recíprocamente, supongamos que g es exacta en Y. Veamos que f es exacta en X, es decir, para todo abierto no vacío U en X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) = X$. Sea U un abierto no vacío en X. Dado que h es un homeomorfismo, se sabe que $h(U)$ es un abierto no vacío en Y. Como g es exacta, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g^n(h(U)) = Y$. Observemos que $f^n(U) \subset X$. Para probar que f es exacta en X, basta probar que $X \subset f^n(U)$. En efecto, sea $x \in X$. Dado que h es un homeomorfismo, se tiene que $h^{-1}(Y) = X$. De aquí, $x \in h^{-1}(Y)$. Luego, existe $y \in Y$ tal que $h(x) = y$. Teniendo en cuenta que $g^n(h(U)) = Y$, se sigue que $y \in g^n(h(U))$. Así, existe $x_0 \in h(U)$ tal que $g^n(x_0) = y$. Por el Corolario 4.3.7, se sabe que $f^n(h^{-1}(x_0)) = h^{-1}(g^n(x_0)) = h^{-1}(y) = x$. Notemos que $h^{-1}(x_0) \in U$. Así, $x \in f^n(U)$. En consecuencia, $X \subset f^n(U)$. Por lo tanto, f es exacta en X. $\square$

Con la Proposición 4.1.6, el Ejemplo 4.3.3 y el Teorema 4.3.17, se sigue que:

Proposición 4.3.18. La función Logística $f_4 = 4x(1-x)$ es exacta en $[0,1]$.

Por la Proposición 4.3.18 y el Diagrama de la Figura 4.1, concluimos que:

Corolario 4.3.19. La función Logística $f_4 = 4x(1-x)$ es mezcladora y débilmente mezcladora en $[0,1]$.

Teorema 4.3.20. Sean X y Y espacios métricos. Sean $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ dos funciones continuas tales que f y g son conjugadas mediante el homeomorfismo $h : X \to Y$. La función f es minimal en X si y sólo si la función g es minimal en Y.

Demostración.
Supongamos que f es minimal en X. Veamos que g es minimal en Y, es decir, para todo $y \in Y$ se tiene que $\overline{\mathcal{O}(y,g)} = Y$. Sea $y \in Y$ y U un abierto no vacío en Y. Basta probar que $\mathcal{O}(y,g) \cap U \neq \emptyset$. Dado que h es un homeomorfismo, se tiene que $h^{-1}(U)$ es un abierto no vacío en X. Notemos que $h^{-1}(y) \in X$. Como f es minimal en X, se sabe que $\mathcal{O}(h^{-1}(y), f) \cap h^{-1}(U) \neq \emptyset$. Sea $x_0 \in \mathcal{O}(h^{-1}(y), f) \cap h^{-1}(U)$. Observemos que $h(x_0) \in U$. Pongamos $y_0 = h(x_0)$, así, $y_0 \in U$. Por otro lado, como $x_0 \in \mathcal{O}(h^{-1}(y), f)$, se cumple que $x_0 = f^m(h^{-1}(y))$, para algún $m \in \mathbb{N}$. Notemos que $y_0 \in \mathcal{O}(y,g)$. En efecto, por el Corolario 4.3.7, $h^{-1}(g^m(y)) = f^m(h^{-1}(y)) = x_0$, de aquí, $g^m(y) = h(x_0) = y_0$. En conclusión, $y_0 \in \mathcal{O}(y,g)$. Por lo tanto, $\mathcal{O}(y,g) \cap U \neq \emptyset$.
Recíprocamente, supongamos que g es minimal en Y. Veamos que f es minimal en X, es decir, para todo $x \in X$, se tiene que $\overline{\mathcal{O}(x,f)} = X$. Sean $x \in X$ y U un abierto no vacío en X. Basta probar que $\mathcal{O}(x,f) \cap U \neq \emptyset$. Dado que h es un homeomorfismo, se tiene que $h(U)$ es un abierto no vacío en Y. Notemos que $h(x) \in Y$. Como g es minimal en Y, se sabe que $\mathcal{O}(h(x), g) \cap h(U) \neq \emptyset$. Sea $x_0 \in \mathcal{O}(h(x), g) \cap h(U)$. Observemos que $h^{-1}(x_0) \in U$. Pongamos $y_0 = h^{-1}(x_0)$, así, $y_0 \in U$. Por otro lado, como $x_0 \in \mathcal{O}(h(x), g)$, se cumple que $x_0 = g^m(h(x))$, para algún $m \in \mathbb{N}$. Notemos que $y_0 \in \mathcal{O}(x,f)$. En efecto, dado que $x_0 = g^m(h(x))$, sigue que $y_0 = h^{-1}(x_0) = h^{-1}(g^m(h(x)))$. Por el Corolario 4.3.7, se sabe que $y_0 = f^m(h^{-1}(h(x))) = f^m(x)$. De aquí, $f^m(x) = y_0$. En conclusión, $y_0 \in \mathcal{O}(x,f)$. Por lo tanto, $\mathcal{O}(x,f) \cap U \neq \emptyset$. $\square$

Teorema 4.3.21. Sean X y Y espacios métricos. Sean $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ dos funciones continuas tales que f y g son conjugadas mediante el homeomorfismo $h : X \to Y$. La función f es mezcladora en X si y sólo si la función g es mezcladora en Y.

Demostración.
Supongamos que la función f es mezcladora en X. Veamos que la función g es mezcladora en Y, es decir, para todo U y V abiertos en Y existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $g^k(U) \cap V \neq \emptyset$, para cada $k \geq N$. Sean U y V abiertos no vacíos en Y. Dado que h es un homeomorfismo se tiene que $h^{-1}(U)$ y $h^{-1}(V)$ son abiertos y no vacíos en X. Como f es mezcladora en X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(h^{-1}(U)) \cap h^{-1}(V) \neq \emptyset$, para cada $k \geq N$. Fijemos $k \geq N$. Se sigue que existe un $x_0 \in h^{-1}(U)$ tal que $f^k(x_0) \in h^{-1}(V)$. Como f y g son conjugadas mediante el homeomorfismo h, por el Teorema 4.3.5, se sabe que $g^k(h(x_0)) = h(f^k(x_0))$. De donde $g^k(h(x_0)) \in V$. Por otro lado, notemos que $h(x_0) \in U$, así, se tiene que $g^k(h(x_0)) \in g^k(U)$. En consecuencia, $g^k(U) \cap V \neq \emptyset$, para cada $k \geq N$.
Recíprocamente, supongamos que la función g es mezcladora en Y. Veamos que la función f es mezcladora en X, es decir, para todo U y V abiertos en X existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$, para cada $k \geq N$. Sean U y V abiertos no vacíos en X. Dado que h es un homeomorfismo se tiene que $h(U)$ y $h(V)$ son abiertos y no vacíos en Y. Como g es mezcladora en Y, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $g^k(h(U)) \cap h(V) \neq \emptyset$, para cada $k \geq N$. Fijemos $k \geq N$. Se sigue que existe un $x_0 \in h(U)$ tal que $g^k(x_0) \in h(V)$. Como f y g son conjugadas mediante el homeomorfismo h, por el Corolario 4.3.7, se sabe que $f^k(h^{-1}(x_0)) = h^{-1}(g^k(x_0))$. De donde, $f^k(h^{-1}(x_0)) \in V$. Por otro lado, notemos que $h^{-1}(x_0) \in U$, así, se tiene que $f^k(h^{-1}(x_0)) \in f^k(U)$. En consecuencia, $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$, para cada $k \geq N$. $\square$

Teorema 4.3.22. Sean X y Y espacios métricos. Sean $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ dos funciones continuas tales que f y g son conjugadas mediante el homeomorfismo $h : X \to Y$. La función f es débilmente mezcladora en X si y sólo si la función g es débilmente mezcladora en Y.

Demostración.
Supongamos que la función f es débilmente mezcladora en X. Veamos que la función g es débilmente mezcladora en Y, es decir, para cualesquiera subconjuntos abiertos no vacíos U_1, U_2, V_1 y V_2 de Y, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $g^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2\}$. Sean U_1, U_2, V_1 y V_2 abiertos no vacíos en Y. Dado que h es un homeomorfismo, se tiene que $h^{-1}(U_1)$, $h^{-1}(U_2)$, $h^{-1}(V_1)$ y $h^{-1}(V_2)$ son abiertos y no vacíos

en X. Como f es débilmente mezcladora en X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(h^{-1}(U_i)) \cap h^{-1}(V_i) \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1,2\}$. De aquí, se sigue que existe un $k \in \mathbb{N}$ y un $x_i \in h^{-1}(U_i)$ tal que $f^k(x_i) \in h^{-1}(V_i)$, para cada $i \in \{1,2\}$. Como f y g son conjugadas mediante el homeomorfismo h, por el Teorema 4.3.5, se sabe que $g^k(h(x_i)) = h(f^k(x_i))$, para cada $i \in \{1,2\}$. De donde, $g^k(h(x_i)) \in V_i$, para cada $i \in \{1,2\}$. Por otro lado, notemos que para cada $i \in \{1,2\}$ se sigue que $h(x_i) \in U_i$. Así, se tiene que $g^k(h(x_i)) \in g^k(U_i)$, para cada $i \in \{1,2\}$. En consecuencia, $g^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1,2\}$.

Recíprocamente, supongamos que la función g es débilmente mezcladora en Y. Veamos que la función f es débilmente mezcladora en X, es decir, para cualesquiera subconjuntos abiertos no vacíos U_1, U_2, V_1 y V_2 de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1,2\}$. Sean U_1, U_2, V_1 y V_2 abiertos no vacíos en X. Dado que h es un homeomorfismo, se tiene que $h(U_1)$, $h(U_2)$, $h(V_1)$ y $h(V_2)$ son abiertos y no vacíos en Y. Como g es débilmente mezcladora en Y, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $g^k(h(U_i)) \cap h(V_i) \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1,2\}$. De aquí, se sigue que existe un $k \in \mathbb{N}$ y un $x_i \in h(U_i)$ tal que $g^k(x_i) \in h(V_i)$, para cada $i \in \{1,2\}$. Como f y g son conjugadas mediante el homeomorfismo h, por el Corolario 4.3.7, se sabe que $f^k(h^{-1}(x_i)) = h^{-1}(g^k(x_i))$, para cada $i \in \{1,2\}$. De donde, $f^k(h^{-1}(x_i)) \in V_i$, para cada $i \in \{1,2\}$. Por otro lado, notemos que para cada $i \in \{1,2\}$ se sigue que $h^{-1}(x_i) \in U_i$. Así, se tiene que $f^k(h^{-1}(x_i)) \in f^k(U_i)$, para cada $i \in \{1,2\}$. En consecuencia, $f^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1,2\}$. $\square$

Capítulo 5

Dinámica de funciones entre productos simétricos

En la teoría de los hiperespacios es bien conocido que dada una función entre continuos, esta induce una función entre los respectivos hiperespacios. En el Capítulo 4, estudiamos tipos especiales de funciones continuos de un continuo en sí mismo. En este capítulo analizaremos las respectivas funciones inducidas y estudiaremos las relación que existe entre la función y su inducida. Desde el punto de vista de sistemas dinámicos, estudiaremos la dinámica puntual y su relación con la dinámica colectiva.

5.1. Funciones inducidas

Una función continua entre continuos $f : X \to Y$ puede inducir funciones entre hiperespacios. Estas funciones se conocen como *funciones inducidas* por f. Algunas de ellas se denotan y definen como sigue:

1. $2^f : 2^X \to 2^Y$ dada por $2^f(A) = f(A),$ para cada $A \in 2^X$;

2. $F_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(Y)$ dada por $F_n(f)(A) = f(A),$ para cada $A \in \mathcal{F}_n(X)$.

De esta forma el sistema dinámico discreto (X, f) induce el sistema dinámico discreto $(\mathcal{F}_n(X), F_n(f))$. En consecuencia, dado $A \in \mathcal{F}_n(X)$, analizar la órbita $\mathcal{O}(A, F_n(f))$ es estudiar la dinámica colectiva.

Observación 5.1.1. Para todo $k \in \mathbb{N}$ y $A \in \mathcal{F}_n(X)$, se tiene que $(F_n(f))^k(A) = f^k(A)$.

Sea $\mathcal{M}$ alguna clase de las siguientes funciones: exacta, mezcladora, débilmente mezcladora, caótica, transitiva, totalmente transitiva, fuertemente transitiva y minimal. El objetivo de este capítulo es analizar la relación entre las siguientes condiciones:

(1) $f \in \mathcal{M}$.

(2) $\mathcal{F}_n(f) \in \mathcal{M}$.

Iniciamos con la propiedad de inyectividad.

Teorema 5.1.2. Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $f : X \to X$ una función. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

(1) $f : X \to X$ es inyectiva.

(2) $F_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ es inyectiva.

Demostración.
(1)$\Rightarrow$(2) Supongamos que f es inyectiva. Veamos que $F_n(f)$ es inyectiva. Sean $A, B \in \mathcal{F}_n(X)$ tales que $F_n(f)(A) = F_n(f)(B) = f(A) = f(B)$. Veamos que $A = B$. Primero, veamos que $A \subset B$. Sea $x \in A$. Así, $f(x) \in f(A) = f(B)$, es decir, $f(x) \in f(B)$. De donde, existe $y \in B$ tal que $f(y) = f(x)$. Como f es inyectiva, se tiene que $y = x$. De lo cual se sigue que $x \in B$. Así, $A \subset B$. De forma similar se prueba que $B \subset A$. Así, $A = B$.
(2)$\Rightarrow$(1) Recíprocamente, supongamos que $F_n(f)$ es inyectiva. Veamos que f es inyectiva. Sean $a, b \in X$, tales que $f(a) = f(b)$. Veamos que $a = b$. Notemos que $\{a\}, \{b\} \in \mathcal{F}_n(X)$. Así, $F_n(f)(\{a\}) = \{f(a)\} = \{f(b)\} = F_n(f)(\{b\})$. Dado que $F_n(f)$ es inyectiva, se sigue que $\{a\} = \{b\}$. En consecuencia, se tiene $a = b$. □

Referente a las propiedad de sobreyectividad, tenemos:

Teorema 5.1.3. Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $f : X \to X$ una función. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

(1) $f : X \to X$ es sobreyectiva.

(2) $F_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ es sobreyectiva.

Demostración.
(1)$\Rightarrow$(2) Supongamos que f es sobreyectiva. Veamos que $F_n(f)$ es sobreyectiva. Sea $B \in \mathcal{F}_n(X)$. Veamos que existe $A \in \mathcal{F}_n(X)$ tal que $F_n(f)(A) = B$. Pongamos $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$, con $m \leq n$. Dado que f es sobreyectiva, para cada b_i con $i \in \{1, \ldots, m\}$ existe $x_i \in X$, tal que $f(x_i) = b_i$. Sea $A = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Note que $A \in \mathcal{F}_n(X)$ y $F_n(f)(A) = B$.
(2)$\Rightarrow$(1) Recíprocamente, supongamos que $F_n(f)$ es sobreyectiva. Veamos que f es sobreyectiva. Sea $b \in X$. Veamos que existe $x \in X$ tal que $f(x) = b$. Note que $\{b\} \in \mathcal{F}_n(X)$. Dado que $F_n(f)$ es sobreyectiva, existe $A \in \mathcal{F}_n(X)$ tal que $F_n(f)(A) = \{b\}$. Así, $b \in f(A)$. Luego, existe $x \in A$ tal que $f(x) = b$. Por lo tanto, f es sobreyectiva. □

De los Teoremas 5.1.2 y 5.1.3, se obtiene:

Corolario 5.1.4. Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $f : X \to X$ una función. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

(1) $f : X \to X$ es biyectiva.

(2) $F_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ es biyectiva.

Teorema 5.1.5. Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $f : X \to X$ una función. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

(1) $f : X \to X$ es continua.

(2) $F_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ es continua.

Demostración.
(1)$\Rightarrow$(2) Supongamos que $f : X \to X$ es continua y sea d la métrica de X. Veamos que $F_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ es continua. Sea $A \in \mathcal{F}_n(X)$. Veamos que $F_n(f)$ es continua en A. Sea $\epsilon > 0$. Pongamos $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$, donde $k \leq n$. Sea $j \in \{1, \ldots, k\}$. Como f es continua en a_j, existe $\delta_j > 0$ tal que si $x \in X$ y $d(x, a_j) < \delta_j$, entonces $d(f(x), f(a_j)) < \epsilon$. Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \ldots, \delta_k\}$. Sea $B \in \mathcal{F}_n(X)$. Pongamos $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$, donde $m \leq n$. Supongamos que $\mathcal{H}(A, B) < \delta$. Luego, por el Teorema 1.6.9, $A \subset N(\delta, B)$. De este modo, $\{a_1, \ldots, a_k\} \subset N(\delta, \{b_1, \ldots, b_m\})$. Sea $r \in \{1, \ldots, k\}$. Observemos que $a_r \in N(\delta, \{b_1, \ldots, b_m\})$. Por consiguiente, existe $l \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $d(a_r, b_l) < \delta$. Por la forma en que construimos a δ, se sigue que $d(a_r, b_l) < \delta_r$. Luego, por la continuidad de f en a_r, $d(f(a_r), f(b_l)) < \epsilon$.

Así, $d(f(a_r), f(\{b_1, \dots, b_m\})) < \epsilon$, es decir, $f(a_r) \in N(\epsilon, f(B))$. Dado la arbitrariedad de r, se tiene que $f(A) \subset N(\epsilon, f(B))$. En consecuencia, $F_n(f)(A) \subset N(\epsilon, F_n(f)(B))$. Por otro lado, dado que $\mathcal{H}(A, B) < \delta$ y por el Teorema 1.6.9, se sigue que $B \subset N(\delta, A)$. De este modo, $\{b_1, \dots, b_m\} \subset N(\delta, \{a_1, \dots, a_k\})$. Sea $r \in \{1, \dots, m\}$. Observemos que $b_r \in N(\delta, \{a_1, \dots, a_k\})$. Por consiguiente, existe $l \in \{1, \dots, k\}$ tal que $d(b_r, a_l) < \delta$. Por la forma en que construimos a δ, se sigue que $d(b_r, a_l) < \delta_l$. Luego, por la continuidad de f en a_l, $d(f(b_r), f(a_l)) < \epsilon$. Así, $d(f(b_r), f(\{a_1, \dots, a_k\})) < \epsilon$, es decir, $f(b_r) \in N(\epsilon, f(A))$. Dado la arbitrariedad de r, se tiene que $f(B) \subset N(\epsilon, f(A))$. En consecuencia, $F_n(f)(B) \subset N(\epsilon, F_n(f)(A))$. Dado que $F_n(f)(A) \subset N(\epsilon, F_n(f)(B))$ y $F_n(f)(B) \subset N(\epsilon, F_n(f)(A))$, por el Teorema 1.6.9, se sigue que $\mathcal{H}(F_n(f)(A), F_n(f)(B)) < \epsilon$.

(2)⇒(1) Recíprocamente, supongamos que $F_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ es continua. Veamos que $f : X \to X$ es continua. Sea $x \in X$. Veamos que f es continua en x. Sea $\epsilon > 0$. Note que $\{x\} \in \mathcal{F}_n(X)$. Como $F_n(f)$ es continua en $\{x\}$, existe $\delta_1 > 0$ tal que si $A \in \mathcal{F}_n(X)$ y $\mathcal{H}(\{x\}, A) < \delta_1$, entonces $\mathcal{H}(F_n(f)(\{x\}), F_n(f)(A)) < \epsilon$. Sea $\delta = \delta_1$. Sea $y \in X$ tal que $d(x, y) < \delta$. Así, por el Teorema 1.6.5, $\mathcal{H}(\{x\}, \{y\}) < \delta_1$. Por consiguiente, $\mathcal{H}(F_n(f)(\{x\}), F_n(f)(\{y\})) < \epsilon$. Luego, por la Proposición 1.6.5, $\mathcal{H}(\{f(x)\}, \{f(y)\}) = d(f(x), f(y)) < \epsilon$. □

Teorema 5.1.6. Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $f : X \to X$ una función. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

(1) $f : X \to X$ es un homeomorfismo.

(2) $F_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ es un homeomorfismo.

Demostración.
(1)⇒(2) Supongamos que f es un homeomorfismo. Veamos que $F_n(f)$ es un homeomorfismo. Dado que f es un homeomorfismo, se sigue que f es biyectiva y continua. Por el Corolario 5.1.4 y el Teorema 5.1.5, se sigue que $F_n(f)$ es biyectiva y continua. Así, por el Teorema 1.5.25, se tiene que $F_n(f)$ es un homeomorfismo. El recíproco de este teorema, es similar al caso anterior. □

5.2. Conjugación topológica de funciones inducidas

En esta sección estudiamos la relación que existe entre dos funciones inducidas, cuando estas son conjugadas. En esta sección, h^{-1} denota la función inversa de la función h.

Teorema 5.2.1. Sean X y Y continuos, $n \in \mathbb{N}$, $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ dos funciones continuas. Si f y g son conjugadas, entonces $F_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ y $F_n(g) : \mathcal{F}_n(Y) \to \mathcal{F}_n(Y)$ son conjugadas.

Demostración.
Supongamos que f y g son conjugadas mediante el homeomorfismo h. Dado que h es un homeomorfismo, por el Teorema 5.1.6, se sabe que $F_n(h)$ es un homeomorfismo. Veamos que $F_n(f)$ y $F_n(g)$ son conjugadas mediante el homeomorfismo $F_n(h)$. Basta probar que $F_n(h)(F_n(f)(A)) = F_n(g)(F_n(h)(A))$, para todo $A \in \mathcal{F}_n(X)$. En efecto, sea $A \in \mathcal{F}_n(X)$ y $a \in A \subset X$. Dado que f y g son conjugadas mediante el homeomorfismo h, se sigue que $h(f(a)) = g(h(a))$. Dada la arbitrariedad de $a \in A$, se tiene que $h(f(A)) = g(h(A))$. Esto es, $F_n(h)(F_n(f)(A)) = F_n(g)(F_n(h)(A))$. □

De la demostración del Teorema 5.2.1, se tiene lo siguiente:

Corolario 5.2.2. Sean X y Y continuos, $n \in \mathbb{N}$, $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ dos funciones continuas. Si f y g son conjugadas mediante el homeomorfismo $h : X \to Y$, entonces $F_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ y $F_n(g) : \mathcal{F}_n(Y) \to \mathcal{F}_n(Y)$ son conjugadas mediante el homeomorfismo $F_n(h) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(Y)$.

Teorema 5.2.3. Sean X y Y continuos, $n \in \mathbb{N}$, $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ dos funciones continuas tales que f y g son conjugadas mediante el homeomorfismo $h : X \to Y$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

(1) $F_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ es transitiva.

(2) $F_n(g) : \mathcal{F}_n(Y) \to \mathcal{F}_n(Y)$ es transitiva.

Demostración.
(1)$\Rightarrow$(2) Supongamos $F_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ es transitiva. Veamos que $F_n(g) : \mathcal{F}_n(Y) \to \mathcal{F}_n(Y)$ es transitiva. Por el Corolario 5.2.2, se sabe que $F_n(f)$ y $F_n(g)$ son conjugadas mediante el homeomorfismo $F_n(h) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(Y)$. Así, por el Teorema 4.3.13, $F_n(g) : \mathcal{F}_n(Y) \to \mathcal{F}_n(Y)$ es transitiva. La otra parte de la prueba es de forma análoga a la mostrada en la primer parte de este teorema. $\square$

Teorema 5.2.4. Sean X y Y continuos, $n \in \mathbb{N}$, $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ dos funciones continuas tales que f y g son conjugadas mediante el homeomorfismo $h : X \to Y$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

(1) $F_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ es caótica.

(2) $F_n(g) : \mathcal{F}_n(Y) \to \mathcal{F}_n(Y)$ es caótica.

Demostración.
(1)$\Rightarrow$(2) Supongamos $F_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ es caótica. Veamos que $F_n(g) : \mathcal{F}_n(Y) \to \mathcal{F}_n(Y)$ es caótica. Por el Corolario 5.2.2, se sabe que $F_n(f)$ y $F_n(g)$ son conjugadas mediante el homeomorfismo $F_n(h) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(Y)$. Así, por el Teorema 4.3.15, $F_n(g) : \mathcal{F}_n(Y) \to \mathcal{F}_n(Y)$ es caótica. La otra parte de la prueba es de forma análoga a la mostrada en la primer parte de este teorema. $\square$

Teorema 5.2.5. Sean X y Y continuos, $n \in \mathbb{N}$, $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ dos funciones continuas tales que f y g son conjugadas mediante el homeomorfismo $h : X \to Y$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

(1) $F_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ es exacta.

(2) $F_n(g) : \mathcal{F}_n(Y) \to \mathcal{F}_n(Y)$ es exacta.

Demostración.
(1)$\Rightarrow$(2) Supongamos $F_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ es exacta. Veamos que $F_n(g) : \mathcal{F}_n(Y) \to \mathcal{F}_n(Y)$ es exacta. Por el Corolario 5.2.2, se sabe que $F_n(f)$ y $F_n(g)$ son conjugadas mediante el homeomorfismo $F_n(h) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(Y)$. Así, por el Teorema 4.3.17, $F_n(g) : \mathcal{F}_n(Y) \to \mathcal{F}_n(Y)$ es exacta. La otra parte de la prueba es de forma análoga a la mostrada en la primer parte de este teorema. $\square$

Teorema 5.2.6. Sean X y Y continuos, $n \in \mathbb{N}$, $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ dos funciones continuas tales que f y g son conjugadas mediante el homeomorfismo $h : X \to Y$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

(1) $F_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ es minimal.

(2) $F_n(g) : \mathcal{F}_n(Y) \to \mathcal{F}_n(Y)$ es minimal.

Demostración.
(1)$\Rightarrow$(2) Supongamos $F_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ es minimal. Veamos que $F_n(g) : \mathcal{F}_n(Y) \to \mathcal{F}_n(Y)$ es minimal. Por el Corolario 5.2.2, se sabe que $F_n(f)$ y $F_n(g)$ son conjugadas mediante el homeomorfismo $F_n(h) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(Y)$. Así, por el Teorema 4.3.20, $F_n(g) : \mathcal{F}_n(Y) \to \mathcal{F}_n(Y)$ es minimal. La otra parte de la prueba es de forma análoga a la mostrada en la primer parte de este teorema. $\square$

Teorema 5.2.7. Sean X y Y continuos, $n \in \mathbb{N}$, $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ dos funciones continuas tales que f y g son conjugadas mediante el homeomorfismo $h : X \to Y$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

(1) $F_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ es mezcladora.

(2) $F_n(g) : \mathcal{F}_n(Y) \to \mathcal{F}_n(Y)$ es mezcladora.

Demostración.
(1)⇒(2) Supongamos $F_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ es mezcladora. Veamos que $F_n(g) : \mathcal{F}_n(Y) \to \mathcal{F}_n(Y)$ es mezcladora. Por el Corolario 5.2.2, se sabe que $F_n(f)$ y $F_n(g)$ son conjugadas mediante el homeomorfismo $F_n(h) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(Y)$. Así, por el Teorema 4.3.21, $F_n(g) : \mathcal{F}_n(Y) \to \mathcal{F}_n(Y)$ es mezcladora. La otra parte de la prueba es de forma análoga a la mostrada en la primer parte de este teorema. □

Teorema 5.2.8. Sean X y Y continuos, $n \in \mathbb{N}$, $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ dos funciones continuas tales que f y g son conjugadas mediante el homeomorfismo $h : X \to Y$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

(1) $F_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ es débilmente mezcladora.

(2) $F_n(g) : \mathcal{F}_n(Y) \to \mathcal{F}_n(Y)$ es débilmente mezcladora.

Demostración.
(1)⇒(2) Supongamos $F_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ es débilmente mezcladora. Veamos que $F_n(g) : \mathcal{F}_n(Y) \to \mathcal{F}_n(Y)$ es débilmente mezcladora. Por el Corolario 5.2.2, se sabe que $F_n(f)$ y $F_n(g)$ son conjugadas mediante el homeomorfismo $F_n(h) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(Y)$. Así, por el Teorema 4.3.22, $F_n(g) : \mathcal{F}_n(Y) \to \mathcal{F}_n(Y)$ es débilmente mezcladora. La otra parte de la prueba es de forma análoga a la mostrada en la primer parte de este teorema. □

5.3. Funciones exactas, mezcladoras y del tipo transitivas

En esta sección estudiaremos a las funciones analizadas en la Sección 4.1, pero ahora la función de nuestro interés es $F_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$.

Teorema 5.3.1. Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $f : X \to X$ una función continua. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

(1) $f : X \to X$ es mezcladora.

(2) $F_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ es mezcladora.

Demostración.
(1)⇒(2) Supongamos que f es mezcladora. Veamos que $F_n(f)$ es mezcladora. Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ dos abiertos no vacíos en $\mathcal{F}_n(X)$. Por el Teorema 1.6.18, podemos tomar $\langle U_1, \ldots, U_n\rangle_n$ y $\langle V_1, \ldots, V_n\rangle_n$ tales que $\langle U_1, \ldots, U_n\rangle_n \subset \mathcal{U}$ y $\langle V_1, \ldots, V_n\rangle_n \subset \mathcal{U}$. Dado que f es mezcladora, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $k \geq N_i$. Sea $N = \text{máx}\{N_1, \ldots, N_n\}$. Sean $k \geq N$ e $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Note que $U_i \cap f^{-k}(V_i) \neq \emptyset$. En efecto, sea $x \in f^k(U_i) \cap V_i$. Así, $x \in f^k(U_i)$ y $x \in V_i$. Dado que $x \in f^k(U_i)$, existe $y \in U_i$ tal que $f^k(y) = x \in V_i$. Así, $y \in U_i$ y $y \in f^{-k}(V_i)$. En consecuencia, $U_i \cap f^{-k}(V_i) \neq \emptyset$. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sea $x_i \in U_i \cap f^{-k}(V_i)$. Sea $A_k = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Note que $A_k \in \langle U_1, \ldots, U_n\rangle_n$ y $(F_n(f))^k(A_k) \in \langle V_1, \ldots, V_n\rangle_n$. De aquí, se sigue que $(F_n(f))^k(\langle U_1, \ldots, U_n\rangle_n) \cap \langle V_1, \ldots, V_n\rangle_n \neq \emptyset$, para $k \geq N$. Esto implica que $(F_n(f))^k(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$. Por lo tanto, $F_n(f)$ es mezcladora.
(2)⇒(1) Recíprocamente, supongamos que $F_n(f)$ es mezcladora. Veamos que f es mezcladora. Sean U y V abiertos no vacíos de X. Luego, $\langle U\rangle_n$ y $\langle V\rangle_n$ son abiertos no vacíos de $\mathcal{F}_n(X)$. Dado que $F_n(f)$

es mezcladora, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $(F_n(f))^k(\langle U\rangle_n) \cap \langle V\rangle_n \neq \emptyset$, para cada $k \geq N$. Sean $A_k \in \langle U\rangle_n$ tal que $(F_n(f))^k(A_k) \in \langle V\rangle_n$ y $x_k \in A_k \subset U$. Note que $(F_n(f))^k(x_k) \in (F_n(f))^k(A_k) \in \langle V\rangle_n$. Así, $(F_n(f))^k(x_k) \in V$. Por otro lado, como $x_k \in U$, se sabe que $(F_n(f))^k(x_k) \in (F_n(f))^k(U)$. De donde, se tiene que $(f)^k(U) \cap V \neq \emptyset$, para cada $k \geq N$. Por lo tanto, f es mezcladora. $\square$

Teorema 5.3.2. Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $f : X \to X$ una función continua. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

(1) $f : X \to X$ es débilmente mezcladora.

(2) $F_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ es débilmente mezcladora.

(3) $F_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ es transitiva.

Demostración.
(1)$\Rightarrow$(2) Supongamos que f es débilmente mezcladora. Veamos que $F_n(f)$ es débilmente mezcladora. Sean $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{V}_1$ y $\mathcal{V}_2$ abiertos no vacíos en $\mathcal{F}_n(X)$. Por el Teorema 1.6.18, podemos tomar $\langle U_1^1, \ldots, U_n^1\rangle_n$, $\langle U_1^2, \ldots, U_n^2\rangle_n$, $\langle V_1^1, \ldots, V_n^1\rangle_n$ y $\langle V_1^2, \ldots, V_n^2\rangle_n$ tales que $\langle U_1^1, \ldots, U_n^1\rangle_n \subset \mathcal{U}_1$, $\langle U_1^2, \ldots, U_n^2\rangle_n \subset \mathcal{U}_2$, $\langle V_1^1, \ldots, V_n^1\rangle_n \subset \mathcal{V}_1$ y $\langle V_1^2, \ldots, V_n^2\rangle_n \subset \mathcal{V}_2$. Dado que f es débilmente mezcladora, por el Teorema 4.1.4, se sigue que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U_i^j) \cap V_i^j \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y $j \in \{1, 2\}$. Sean $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y $j \in \{1, 2\}$. Se tiene que $U_i^j \cap f^{-k}(V_i^j) \neq \emptyset$. En efecto, sea $x \in f^k(U_i^j) \cap V_i^j$. Así, $x \in f^k(U_i^j)$ y $x \in V_i^j$. Dado que $x \in f^k(U_i^j)$, existe $y \in U_i^j$ tal que $f^k(y) = x \in V_i^j$. Así, $y \in U_i^j$ y $y \in f^{-k}(V_i^j)$. En consecuencia, $U_i^j \cap f^{-k}(V_i^j) \neq \emptyset$. Sean $x_i^j \in U_i^j \cap f^{-k}(V_i^j)$, $A_1 = \{x_1^1, \ldots, x_n^1\}$ y $A_2 = \{x_1^2, \ldots, x_n^2\}$. Notemos que $A_1 \in \langle U_1^1, \ldots, U_n^1\rangle_n$, $A_2 \in \langle U_1^2, \ldots, U_n^2\rangle_n$, $f^k(A_1) \in \langle V_1^1, \ldots, V_n^1\rangle_n$ y $f^k(A_2) \in \langle V_1^2, \ldots, V_n^2\rangle_n$. En consecuencia, $(F_n(f))^k(\langle U_1^1, \ldots, U_n^1\rangle_n) \cap \langle V_1^1, \ldots, V_n^1\rangle_n \neq \emptyset$ y $(F_n(f))^k(\langle U_1^2, \ldots, U_n^2\rangle_n) \cap \langle V_1^2, \ldots, V_n^2\rangle_n \neq \emptyset$. De aquí, $(F_n(f))^k(\mathcal{U}_1) \cap \mathcal{V}_1 \neq \emptyset$ y $(F_n(f))^k(\mathcal{U}_2) \cap \mathcal{V}_2 \neq \emptyset$. Por lo tanto, $F_n(f)$ es débilmente mezcladora.
(2)$\Rightarrow$(3) La demostración se sigue de las definiciones.
(3)$\Rightarrow$(1) Supongamos que $F_n(f)$ es transitiva. Veamos que f es débilmente mezcladora. Sean U, V_1, V_2 abiertos no vacíos de X. Sean $\mathcal{U} = \langle U\rangle_n$ y $\mathcal{V} = \langle V_1, V_2\rangle_n$. Note que $\mathcal{U} \neq \emptyset$. En efecto, dado que $U \neq \emptyset$, sea $x \in U$. Así, $\{x\} \in \mathcal{U}$. Note que $\mathcal{V} \neq \emptyset$. En efecto, dado que $V_1 \neq \emptyset, V_2 \neq \emptyset$, sea $x \in V_1, y \in V_2$. Luego, $\{x, y\} \in \mathcal{V}$. Como $F_n(f)$ es transitiva, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(F_n(f))^k(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$. Luego, existe $A \in \mathcal{U}$ tal que $(F_n(f))^k(A) \in \mathcal{V}$. Por consiguiente, $(F_n(f))^k(A) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $(F_n(f))^k(A) \cap V_2 \neq \emptyset$. Dado que $A \in \mathcal{U}$, $A \subset U$. Así, existe $a \in A \subset U$ tal que $(F_n(f))^k(\{a\}) = f^k(a) \in V_1$ y $(F_n(f))^k(\{a\}) = f^k(a) \in V_2$. En consecuencia, $f^k(U) \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2\}$. Por el Teorema 4.1.4, se sigue que f es débilmente mezcladora. $\square$

El siguiente teorema nos brindará una herramienta para mostrar algunos contraejemplos de algunas equivalencias que no se cumplen.

Teorema 5.3.3. Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $f : X \to X$ una función continua. Si f es una isometría, entonces $F_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ no es transitiva.

Demostración.
Supongamos que f es una isometría y que $F_n(f)$ es transitiva. Sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Sea $r = d(x, y)$. Observe que $r > 0$. Sean $U = B(\frac{r}{4}, x)$ y $V = B(\frac{r}{4}, y)$. Note que U y V son abiertos en X y $U \cap V = \emptyset$. Sean U_1 y U_2 abiertos en X tales que $U_1, U_2 \subset U$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Observe que $\langle U_1, V\rangle_n$ y $\langle U_2\rangle_n$ son abiertos en $\mathcal{F}_n(X)$. Dado que $F_n(f)$ es transitiva, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $F_n(f)^k(\langle U_1, V\rangle_n) \cap \langle U_2\rangle_n \neq \emptyset$. Sea $B \in F_n(f)^k(\langle U_1, V\rangle_n) \cap \langle U_2\rangle_n$. Así, existe $A \in \langle U_1, V\rangle_n$ tal que $F_n(f)^k(A) = B$ y $B \subset U_2$. Por otro lado, dado que $A \in \langle U_1, V\rangle_n$, se sigue que $A \cap U_1 \neq \emptyset$ y $A \cap V \neq \emptyset$. Sean $a \in A \cap U_1$ y $b \in A \cap V$. Note que $f^k(a) \in f^k(A) = B$ y $f^k(a) \in U_2$. De manera similar, se tiene que $f^k(b) \in U_2$. Dado que f es una isometría, se tiene que $d(f^k(a), f^k(b)) = d(a, b)$. No obstante, observe que $d(f^k(a), f^k(b)) \leq \frac{r}{2}$. Además, $r = d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) \leq d(x, a) + d(a, b) + d(b, y) < \frac{r}{4} + d(a, b) + \frac{r}{4} = \frac{r}{2} + d(a, b)$. De

aquí, $r < \frac{r}{2} + d(a,b)$. Luego, $\frac{r}{2} < d(a,b) = d(f^k(a), f^k(b)) \leq \frac{r}{2}$, De donde se sigue que $r < r$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $F_n(f)$ no es transitiva. $\square$

Teorema 5.3.4. Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $f : X \to X$ una función continua. Considere las siguientes propiedades:

(1) $f : X \to X$ es transitiva.

(2) $F_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ es transitiva.

Se sigue que (2) implica (1) y (1) no implica (2).

Demostración.
(2)$\Rightarrow$(1) Supongamos que $F_n(f)$ es transitiva. Por el Teorema 5.3.2, f es débilmente mezcladora. Así, por la Observación 4.1.3, se sabe que f es transitiva.
Por otra parte, consideremos la función rotación irracional (Definición 4.2.22). Por la Proposición 4.2.25, se tiene que f es transitiva. Además, por la Proposición 4.2.24, f es una isometría. Luego, por el Teorema 5.3.3, $F_n(f)$ no es transitiva. $\square$

Lema 5.3.5. Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $f : X \to X$ una función continua. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

(1) El conjunto $Per(f)$ es denso en X.

(2) El conjunto $Per(F_n(f))$ es denso en $\mathcal{F}_n(X)$.

Demostración.
(1)$\Rightarrow$(2) Supongamos que $Per(f)$ es denso en X. Veamos que $Per(F_n(f))$ es denso en $\mathcal{F}_n(X)$, es decir, veamos que para todo $A \in \mathcal{F}_n(X)$ y para todo $\epsilon > 0$, $\mathbf{B}(\epsilon, A) \cap Per(F_n(f)) \neq \emptyset$. Sean $A = \{x_1, \ldots, x_m\} \in \mathcal{F}_n(X)$ con $m \leq n$ y $\epsilon > 0$. Dado que $Per(f)$ es denso en X, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $B(\epsilon, x_i) \cap Per(f) \neq \emptyset$. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea $p_i \in B(\epsilon, x_i) \cap Per(f)$. Dado que $p_i \in Per(f)$, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que $f^{N_i}(p_i) = p_i$. Sea $N = N_1, \cdots, N_m$. Note que por la Observación 2.1.18, $f^N(p_i) = p_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. Sea $B = \{p_1, \ldots, p_m\}$. Observe que $(F_n(f))^N(B) = \{f^N(p_1), \ldots, f^N(p_m)\} = \{p_1, \ldots, p_m\}$. Así, $B \in Per(F_n(f))$. Como $p_i \in B(\epsilon, x_i)$, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, se tiene que $B \in \mathbf{B}(\epsilon, A)$. Entonces $\mathbf{B}(\epsilon, A) \cap Per(F_n(f)) \neq \emptyset$.
(2)$\Rightarrow$(1) Recíprocamente, supongamos que $Per(F_n(f))$ es denso en $\mathcal{F}_n(X)$. Veamos que $Per(f)$ es denso en X, es decir, para todo $x \in X$ y para todo $\epsilon > 0$, $B(\epsilon, x) \cap Per(f) \neq \emptyset$. Sean $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Note que $\{x\} \in \mathcal{F}_n(X)$. Dado que $Per(F_n(f))$ es denso en $\mathcal{F}_n(X)$, $\mathbf{B}(\epsilon, \{x\}) \cap Per(F_n(f)) \neq \emptyset$. Sea $A \in \mathbf{B}(\epsilon, \{x\}) \cap Per(F_n(f))$. Dado que $A \in \mathbf{B}(\epsilon, \{x\})$, se sigue que $\mathcal{H}(A, \{x\}) < \epsilon$. Luego, por el Teorema 1.6.9, se tiene que $A \subset N(\epsilon, \{x\})$. Así, por el Teorema 1.6.8, $A \subset B(\epsilon, x)$. Por otra parte, como $A \in Per(F_n(f))$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(F_n(f))^k(A) = A$. Note que $f^k|_A : A \to A$ es una permutación de los elementos de A. Dado que $A \in \mathcal{F}_n(X)$, se tiene que A es finito. Así, como la permutación de un conjunto finito tiene orden finito, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $(f^k)^m|_A = I_A$. Luego, $A \subset Per(f)$. En consecuencia, $B(\epsilon, x) \cap Per(f) \neq \emptyset$. $\square$

Teorema 5.3.6. Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ y $f : X \to X$ una función continua. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

(1) f es caótica y débilmente mezcladora.

(2) $F_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ es caótica.

Demostración.
(1)⇒(2) Supongamos que f es caótica y débilmente mezcladora. Dado que f es caótica, $Per(f)$ es denso en X. Así, por el Lema 5.3.5, $Per(F_n(f))$ es denso en $\mathcal{F}_n(X)$. Por otro lado, dado que f es débilmente mezcladora, por el Teorema 5.3.2, $F_n(f)$ es transitiva. Así, $F_n(f)$ es caótica.
(2)⇒(1) Recíprocamente, supongamos que $F_n(f)$ es caótica. Dado que $F_n(f)$ es caótica, $Per(F_n(f))$ es denso en $\mathcal{F}_n(X)$. Así, por el Lema 5.3.5, $Per(f)$ es denso en X. Por otro lado, como $F_n(f)$ es caótica, se sigue que $F_n(f)$ es transitiva. Por el Teorema 5.3.2, f es débilmente mezcladora. Así, por la Observación 4.1.3, se sabe que f es transitiva. En conclusión, f es caótica y débilmente mezcladora. □

Teorema 5.3.7. Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$, $f : X \to X$ una función continua y $A \in \mathcal{F}_n(X)$. Se sigue que A es punto periódico en $F_n(f)$ si y sólo si p punto es periódico en f, para cada $p \in A$.

Demostración.
Supongamos que A es punto periódico en $F_n(f)$. Veamos que p es punto periódico en f, para cada $p \in A$. Es decir, veamos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^N(p) = p$, para cada $p \in A$. Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \in \mathcal{F}_n(X)$ con $m \leq n$. Dado que A es periódico en $F_n(f)$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(F_n(f))^k(A) = A$. Note que por la Observación 2.1.18, para todo $\alpha \in \mathbb{N}$ se tiene que $(F_n(f))^{\alpha k}(A) = A$. Observe que $(F_n(f))^{\alpha k}(A)$ es una permutación del conjunto A. Dado que $A \in \mathcal{F}_n(X)$, se tiene que A es finito. Así, como la permutación de un conjunto finito tiene orden finito, existen $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ con $k_1 < k_2$, tales que $f^{k_1}|_A = f^{k_2}|_A$. Es decir, $f^{\alpha k_1}(a_1) = f^{\alpha k_2}(a_1)$, $f^{\alpha k_1}(a_2) = f^{\alpha k_2}(a_2)$, $\ldots, f^{\alpha k_1}(a_m) = f^{\alpha k_2}(a_m)$. Así, $f^{-\alpha k_1} \circ f^{\alpha k_1}(a_i) = f^{-\alpha k_1} \circ f^{\alpha k_2}(a_i) = f^{(k_2 - k_1)\alpha}(a_i) = a_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. Sea $N = (k_2 - k_1)\alpha$. Así, $f^N(a_i) = a_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$.
Recíprocamente, supongamos que p es periódico en f, para cada $p \in A$. Veamos que A es periódico de $F_n(f)$, es decir, veamos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $(F_n(f))^N(A) = A$. Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, con cada a_i periódico de f y $m \leq n$. Dado que a_i es periódico en f, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que $f^{N_i}(a_i) = a_i$. Sea $N = N_1 \cdots N_m$. Note que por la Observación 2.1.18, se tiene que $f^N(a_i) = a_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. Así, $(F_n(f))^N(A) = \{f^N(a_1), \ldots, f^N(a_m)\} = \{a_1, \ldots, a_m\} = A$. □

Como consecuencia inmediata de los Teoremas 4.1.10 y 5.3.1, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 5.3.8. Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $f : X \to X$ una función continua. Si f es exacta, entonces $F_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ es mezcladora.

Teorema 5.3.9. Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $f : X \to X$ una función continua. Si f es exacta, entonces $F_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ es transitiva.

Demostración.
Supongamos que f es exacta y veamos que $F_n(f)$ es transitiva. Sean $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tau_n$. Por el Teorema 1.6.18, existen n abiertos $U_1, \ldots, U_n$ y n abiertos $V_1, \ldots, V_n$ subconjuntos de X, tales que $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle_n \subset \mathcal{U}$ y $\langle V_1, \ldots, V_n \rangle_n \subset \mathcal{V}$. Para probar que $F_n(f)$ es transitiva, basta verificar que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $F_n(f)^k(\langle U_1, \ldots, U_n \rangle_n) \cap \langle V_1, \ldots, V_n \rangle_n \neq \emptyset$. Dado que f es exacta, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $f^{k_i}(U_i) = X$. Así, $f^{k_i}(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como f es exacta, por el Teorema 4.1.10, se sabe que f es mezcladora. Así, $f^{m_i}(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $m_i \geq k_i$ con $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sea $k = \max\{k_1, \ldots, k_n\}$. Note que $f^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dado que $f^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, sea $x_i \in U_i$ tal que $f^k(x_i) \in V_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. De aquí $\{x_1, \ldots, x_n\} \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle_n$ y $F_n(f)^k(\{x_1, \ldots, x_n\}) \in \langle V_1, \ldots, V_n \rangle_n$. Así, $F_n(f)^k(\langle U_1, \ldots, U_n \rangle_n) \cap \langle V_1, \ldots, V_n \rangle_n \neq \emptyset$. Por lo tanto, $F_n(f)^k(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$. □

En el siguiente teorema se estudia la relación que existe entre f exacta y $F_n(f)$ exacta.

Teorema 5.3.10. Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $f : X \to X$ una función continua. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

(1) $f : X \to X$ es exacta.

(2) $F_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ es exacta.

Demostración.
(1)⇒(2) Supongamos que f es exacta y probemos que $F_n(f)$ es exacta. Sea $\mathcal{U}$ un abierto no vacío de $\mathcal{F}_n(X)$. Sea $U = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \in \mathcal{U}$. Así, existe $\epsilon > 0$ tal que $\mathbf{B}(\epsilon, U) \subset \mathcal{U}$. Si $k < n$, considere $a_i = a_k$, para cada $i \in \{k+1, \ldots, n\}$. Por otro lado, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sea $U_i = B(\epsilon, a_i)$. Dado que f es exacta y por la Proposición 4.1.9, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe $m_i \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U_i) = X$ para cada $k \geq m_i$. Sea $m = \max\{m_1, \ldots, m_n\}$. Observemos que $f^m(U_i) = X$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Veamos que $F_n(f)^m(\mathcal{U}) = \mathcal{F}_n(X)$. Basta mostrar que $\mathcal{F}_n(X) \subset F_n(f)^m(\mathcal{U})$. Sea $V = \{b_1, \ldots, b_l\}$ un abierto no vacío de $\mathcal{F}_n(X)$. Si $l < n$, considere $b_i = b_l$, para cada $i \in \{l+1, \ldots, n\}$. Veamos que $V \in F_n(f)^m(\mathcal{U})$, es decir, existe $C \in \mathcal{U}$ tal que $F_n(f)^m(C) = V$. Note que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $b_i \in f^m(U_i)$. Así, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe $c_i \in U_i$ tal que $f^m(c_i) = b_i$. Sea $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$. Observe que $F_n(f)^m(C) = V$ y $\mathcal{H}(U, C) < \epsilon$. Así, $C \in \mathcal{U}$ y $V \in F_n(f)^m(\mathcal{U})$.
(2)⇒(1) Recíprocamente, supongamos que $F_n(f)$ es exacta. Probemos que f es exacta, es decir, para todo U abierto no vacío de X existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(U) = X$. Sea U un abierto no vacío de X. Observe que $\langle U \rangle_n$ es un subconjunto abierto no vacío de $\mathcal{F}_n(X)$. Dado que $F_n(f)$ es exacta, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $F_n(f)^m(\langle U \rangle_n) = \mathcal{F}_n(X)$. Sea $x \in X$. Note que $\{x\} \in \mathcal{F}_n(X)$. Dado que $F_n(f)^m(\langle U \rangle_n) = \mathcal{F}_n(X)$, existe $A \in \langle U \rangle_n$ tal que $F_n(f)^m(A) = \{x\}$. Sea $a \in A$. Así, $f^m(a) = x$ y $a \in U$. Dada la arbitrariedad de x, se sigue que $f^m(U) = X$. □

Teorema 5.3.11. Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $f : X \to X$ una función continua. Considere las siguientes propiedades:

(1) $f : X \to X$ es totalmente transitiva.

(2) $F_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ es totalmente transitiva.

Se sigue que (2) implica (1) y (1) no implica (2).

Demostración.
(2)⇒(1) Supongamos que $F_n(f)$ es totalmente transitiva. Veamos que f es totalmente transitiva. Sean U y V abiertos en X y $s \in \mathbb{N}$. Note que $\langle U \rangle_n, \langle V \rangle_n \in \tau_n$. Dado que $F_n(f)$ es totalmente transitiva, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(F_n(f)^s)^k(\langle U \rangle_n) \cap \langle V \rangle_n \neq \emptyset$. Dado que $(F_n(f)^s)^k(\langle U \rangle_n) \cap \langle V \rangle_n \neq \emptyset$, sea $A \in (F_n(f)^s)^k(\langle U \rangle_n) \cap \langle V \rangle_n$. Como $A \in (F_n(f)^s)^k(\langle U \rangle_n)$, existe $B \in \langle U \rangle_n$, tal que $(F_n(f)^s)^k(B) = A$. Note que $(F_n(f)^s)^k(B) = (f^s)^k(B) = A$. Por otro lado, como $A \in \langle V \rangle_n$ y $B \in \langle U \rangle_n$, se sigue que $A \subset V$ y $B \subset U$. Así, $(f^s)^k(B) \cap V \neq \emptyset$. Dado que $B \subset U$, se tiene que $(f^s)^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Dado que f^s es transitiva para cada $s \in \mathbb{N}$, se sigue que f es totalmente transitiva.
Por otra parte, consideremos la función rotación irracional (Definición 4.2.22). Por la Proposición 4.2.25, se tiene que f es totalmente transitiva. Además, por la Proposición 4.2.24, f es una isometría. Luego, por el Teorema 5.3.3, $F_n(f)$ no es transitiva. Por el Diagrama de la Figura 4.1, concluimos que $F_n(f)$ no es totalmente transitiva. □

Teorema 5.3.12. Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $f : X \to X$ una función continua. Considere las siguientes propiedades:

(1) $f : X \to X$ es fuertemente transitiva.

(2) $F_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ es fuertemente transitiva.

Se sigue que (2) implica (1) y (1) no implica (2).

Demostración.
(2)⇒(1) Supongamos que $F_n(f)$ es fuertemente transitiva. Sea U un abierto en X. Veamos que f es fuertemente transitiva, es decir, existe $\alpha \in \mathbb{N}$ tal que $X = \bigcup_{k=0}^{\alpha} f^k(U)$. Note que $\langle U \rangle_n \in \tau_n$. Dado que $F_n(f)$ es fuertemente transitiva, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{F}_n(X) = \bigcup_{k=0}^{s} F_n(f)^k(\langle U \rangle_n)$. Sea $\alpha = s$. Veamos que $X \subset \bigcup_{k=0}^{s} f^k(U)$. En efecto, sea $x \in X$. Observe que $\{x\} \in \mathcal{F}_n(X)$. Luego, $\{x\} \in \bigcup_{k=0}^{s} F_n(f)^k(\langle U \rangle_n)$. Así, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $r \in \{0, \ldots, s\}$ y $\{x\} \in F_n(f)^r(\langle U \rangle_n)$. Como $\{x\} \in F_n(f)^r(\langle U \rangle_n)$, existe $B \in \langle U \rangle_n$, tal que $F_n(f)^r(B) = f^r(B) = \{x\}$. Dado que $B \in \langle U \rangle_n$, se sigue que $B \subset U$. Así, $\{x\} = f^r(B) \subset f^r(U) \subset \bigcup_{k=0}^{s} f^k(U)$. Dada la arbitrariedad de x se concluye que $X \subset \bigcup_{k=0}^{s} f^k(U)$. Por lo tanto, f es fuertemente transitiva.
Por otra parte, consideremos la función rotación irracional (Definición 4.2.22). Por la Proposición 4.2.25, se tiene que f es fuertemente transitiva. Además, por la Proposición 4.2.24, f es una isometría. Luego, por el Teorema 5.3.3, $F_n(f)$ no es transitiva. Por el Diagrama de la Figura 4.1, concluimos que $F_n(f)$ no es fuertemente transitiva. □

Teorema 5.3.13. Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $f : X \to X$ una función continua. Considere las siguientes propiedades:

(1) $f : X \to X$ es minimal.

(2) $F_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ es minimal.

Se sigue que (2) implica (1) y (1) no implica (2).

Demostración.
(2)⇒(1) Supongamos que $F_n(f)$ es minimal. Veamos que f es minimal, es decir, veamos que para todo $x \in X$ se tiene que $\overline{\mathcal{O}(x, f)} = X$. Sean $x \in X$ y U un abierto en X. Basta mostrar que $U \cap \mathcal{O}(x, f) \neq \emptyset$. Note que $\{x\} \in \mathcal{F}_n(X)$ y $\langle U \rangle_n$ es un abierto en $\mathcal{F}_n(X)$. Dado que $F_n(f)$ es minimal, se sigue que $\langle U \rangle_n \cap \mathcal{O}(\{x\}, F_n(f)) \neq \emptyset$. Sea $A \in \langle U \rangle_n \cap \mathcal{O}(\{x\}, F_n(f))$. Así, $A \in \langle U \rangle_n$, de donde se sigue que $A \subset U$. Por otro lado, $A \in \mathcal{O}(\{x\}, F_n(f))$. Luego $A = F_n(f)^m(\{x\}) = \{f^m(x)\}$, para algún $m \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $A = \{f^m(x)\}$. De esta manera, $f^m(x) \in A \subset U$. Así, $f^m(x) \in U \cap \mathcal{O}(x, f)$. Por lo tanto, $U \cap \mathcal{O}(x, f) \neq \emptyset$.
Por otra parte, consideremos la función rotación irracional (Definición 4.2.22). Por la Proposición 4.2.25, se tiene que f es minimal. Además, por la Proposición 4.2.24, f es una isometría. Luego, por el Teorema 5.3.3, $F_n(f)$ no es transitiva. Por el Diagrama de la Figura 4.1, concluimos que $F_n(f)$ no es minimal. □

5.4. Sensibilidad a las condiciones iniciales

En esta sección estudiaremos a las funciones con dependencia sensitiva a las condiciones iniciales.

Definición 5.4.1. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) continuos y $f : X \to Y$ una función continua. Se dice que f tiene dependencia sensitiva a las condiciones iniciales (dsci) si existe $c \in \mathbb{R}^+$ tal que para todo $x \in X$ y para todo abierto U en X con $x \in U$, existen $y \in U$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que $d_Y(f^k(x), f^k(y)) \geq c$. En tal caso, decimos que c es una constante de sensitividad para f.

Un caso particular es cuando $X = Y = I$, donde I un intervalo en $\mathbb{R}$. Tenemos:

Observación 5.4.2. Sean I un intervalo en $\mathbb{R}$ y $f : I \to I$ una función continua en I. Se dice que f tiene dependencia sensitiva a las condiciones iniciales (dsci) si existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $x \in I$ y para todo $\delta > 0$, existen $y \in (x - \delta, x + \delta) \cap I$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que $|f^k(x), f^k(y)| \geq \epsilon$.

De la Definición 2.1.21, se tiene la siguiente observación:

Observación 5.4.3. Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $f : X \to X$ una función. Si (X, f) tiene dependencia sensitiva a las condiciones iniciales, entonces no tiene puntos periódicos atractores.

Ejemplo 5.4.4. La función Tienda $T : [0,1] \to [0,1]$ es sensitiva a las condiciones iniciales en el intervalo $[0,1]$. En efecto, consideremos $\epsilon = \frac{1}{2}$. Sean $x \in [0,1]$ y $\delta > 0$ tal que $(x-\delta, x+\delta) \subset [0,1]$. Por el Corolario 2.3.20, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n((x-\delta, x+\delta)) = [0,1]$. De donde, se sigue que existen $x_1, x_2 \in (x-\delta, x+\delta)$ tales que $T^n(x_1) = 0$ y $T^n(x_2) = 1$. Observemos que

$$1 = |T^n(x_1) - T^n(x_2)| \leq |T^n(x_1) - T^n(x)| + |T^n(x) - T^n(x_2)|.$$

De aquí, se tiene que $|T^n(x_1) - T^n(x)| \geq \frac{1}{2}$ ó $|T^n(x) - T^n(x_2)| \geq \frac{1}{2}$.

Teorema 5.4.5. Sean (X, d) un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $f : X \to X$ una función continua. Si $F_n(f)$ tiene dsci, entonces f tiene dsci.

Demostración.
Supongamos que $F_n(f)$ tiene dsci. Así, existe $c \in \mathbb{R}^+$ tal que c es una constante de sensitividad para $F_n(f)$. Veamos que c es una constante de sensitividad para f. Sean $x \in X$ y U un abierto en X tales que $x \in U$. Notemos que $\{x\} \in \mathcal{F}_n(X)$ y $\langle U \rangle_n$ es un abierto en $\mathcal{F}_n(X)$ tal que $\{x\} \in \langle U \rangle_n$. Como c es una constante de sensitividad para $F_n(f)$, existe $A \in \langle U \rangle_n$ y existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{H}((F_n(f))^k(\{x\}), (F_n(f))^k(A)) \geq c$. Pongamos $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ para $k \leq n$. Notemos que $a_j \in U$ para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Veamos que existe $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $d(f^k(x), f^k(a_j)) \geq c$. En efecto, supongamos que para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se cumple que $d(f^k(x), f^k(a_i)) < c$. Así, $\{f^k(x)\} \subset N(c, f^k(A))$ y $f^k(A) \subset N(c, \{f^k(x)\})$. Luego, por el Teorema 1.6.9, se sabe que $\mathcal{H}(\{f^k(x)\}, f^k(A)) < c$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, existe algún $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $d(f^k(x), f^k(a_j)) \geq c$. □

Teorema 5.4.6. Sean (X, d) un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Si f tiene dsci, entonces $F_2(f) : \mathcal{F}_2(X) \to \mathcal{F}_2(X)$ tiene dsci.

Demostración.
Supongamos que f tiene dsci. Así, existe $c \in \mathbb{R}^+$ tal que c es una constante de sensitividad para f. Veamos que $\frac{c}{2}$ es una constante de sensitividad para $F_2(f)$. Sean $A \in \mathcal{F}_n(X)$ y $\epsilon > 0$. Pongamos $A = \{a_1, a_2\}$. Notemos que $a_1 \in X$. Dado que c es una constante de sensitividad para f, existen $y \in B(\epsilon, a_1)$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que $d(f^k(y), f^k(a_1)) \geq c$. Sea $B = \{y, a_2\}$. Observemos que $B \in \mathcal{F}_2(X)$. Probemos que $\mathcal{H}((F_2(f))^k(A), (F_2(f))^k(B)) \geq \frac{c}{2}$. En efecto, supongamos que $\mathcal{H}((F_2(f))^k(A), (F_2(f))^k(B)) < \frac{c}{2}$. Por el Teorema 1.6.9, se concluye que $(F_2(f))^k(B) \subset N(\frac{c}{2}, (F_2(f))^k(A))$ y $(F_2(f))^k(A) \subset N(\frac{c}{2}, (F_2(f))^k(B))$. En particular tenemos que $\{f^k(y), f^k(a_2)\} \subset N(\frac{c}{2}, \{f^k(a_1), f^k(a_2)\})$. Por el Teorema 1.6.8, se sabe que $\{f^k(y), f^k(a_2)\} \subset B(\frac{c}{2}, f^k(a_1)) \cup B(\frac{c}{2}, f^k(a_2))$. Teniendo en cuenta que $d(f^k(y), f^k(a_1)) \geq c$, se tiene que $f^k(y) \in B(\frac{c}{2}, f^k(a_2))$, es decir, $d(f^k(y), f^k(a_2)) < \frac{c}{2}$. Por la desigualdad triangular se sabe que $d(f^k(a_1), f^k(y)) \leq d(f^k(a_1), f^k(a_2)) + d(f^k(a_2), f^k(y))$. De aquí, $d(f^k(a_1), f^k(a_2)) > \frac{c}{2}$. Con esto tenemos que $f^k(a_1) \notin B(\frac{c}{2}, f^k(a_2)) \cup B(\frac{c}{2}, f^k(y))$. Por el Teorema 1.6.8, se sabe que $f^k(a_1) \notin N(\frac{c}{2}, f^k(B))$. De aquí, $f^k(A) \nsubseteq N(\frac{c}{2}, f^k(B))$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\mathcal{H}((F_2(f))^k(A), (F_2(f))^k(B)) \geq \frac{c}{2}$. Por otro lado, notemos que $B \subset N(\epsilon, A)$ y $A \subset N(\epsilon, B)$. Así, por el Teorema 1.6.9, $\mathcal{H}(A, B) < \epsilon$. En consecuencia, $B \in \mathbf{B}(\epsilon, A)$. Por lo tanto, $\frac{c}{2}$ es una constante de sensitividad para $F_2(f)$. □

La siguiente tabla nos brinda un resumen de los resultados obtenidos en las Secciones 5.3 y 5.4, sobre la relación que existe entre las siguientes proposiciones:

(1) $f \in \mathcal{M}$.

(2) $\mathcal{F}_n(f) \in \mathcal{M}$.

$\mathcal{M}$	(1) $\Rightarrow$ (2)	(2) $\Rightarrow$ (1)	Resultado
Exacta	Sí	Sí	Teorema 5.3.10
Mezcladora	Sí	Sí	Teorema 5.3.1
Débilmente mezcladora	Sí	Sí	Teorema 5.3.2
Caótica	No	Sí	Teorema 5.3.6
Transitiva	No	Sí	Teorema 5.3.4
Totalmente transitiva	No	Sí	Teorema 5.3.11
Fuertemente transitiva	No	Sí	Teorema 5.3.12
Minimal	No	Sí	Teorema 5.3.13
dsci	$\mathcal{F}_2(f) \in \mathcal{M}$	Sí	Teoremas 5.4.6 y 5.4.5

Tabla 5.1: Tabla de las relaciones entre f y $\mathcal{F}_n(f)$.

Conclusiones

El tema que se ha desarrollado y que conforma esta tesis, se encuentra dentro de las áreas de la matemática conocidas como sistemas dinámicos discretos y topología, lo que se conoce como dinámica topológica. El objetivo principal fue estudiar algunos sistemas dinámicos discretos: exactos, mezclantes, transitivos, minimales, caóticos, entre otros; analizando la dinámica puntual y su relación con la dinámica colectiva. A continuación, a manera de conclusiones, se describen los resultados y beneficios obtenidos al lograr las metas y objetivos planteados en el proyecto de tesis.

En el Capítulo 1, se analizaron y expusieron notaciones, definiciones y resultados en espacios métricos, que fundamentan y soportan el resto del trabajo. Con tal revisión exhaustiva, se reafirmaron nociones que son básicas en esta y otras áreas de la matemática. Cabe señalar que varias de las demostraciones de los resultados que se estudiaron, por ser muy conocidas en el área, no se presentaron, sin embargo, oportunamente se incluyeron referencias a consideración del lector.

El Capítulo 2, fue dedicado para realizar una introducción a los sistemas dinámicos discretos, se analizaron conceptos tales como: órbitas, puntos fijos, puntos periódicos, puntos fijos atractores, puntos fijos repulsores, entre otros. Se puso especial interés en los sistemas dinámicos discretos unidimensionales, proporcionando ejemplos y estudiando el comportamiento cualitativo mediante diagramas de Cobweb. También, se estudiaron resultados que son útiles para saber cuándo una función tiene puntos fijos y cómo poder clasificarlos en repulsores, atractores o neutros. Además, parte de este capítulo, estuvo dedicado a estudiar las funciones Tienda, Cuadrática y Logística, que determinan sistemas dinámicos discretos con propiedades relevantes en esta área. Finalmente, se inicia con la clasificación de dos sistemas dinámicos discretos, los clásicos de la dinámica topológica: los transitivos y los caóticos. Esta parte del trabajo fue fundamental para adentrarse, entender y formalizar nociones y resultados en los sistemas dinámicos discretos y, en particular, de la dinámica topológica.

Después de estudiar nociones y resultados en los capítulos previos y tener herramientas suficientes, en el Capítulo 3, se analizaron algunos problemas relacionados con el crecimiento de poblaciones que se pueden modelar mediante sistemas dinámicos discretos, específicamente, se estudió: el Modelo de Malthus, modelos con crecimiento restringido (Logístico, de Beverton y de Ricker) y algunos modelos lineales. Cabe señalar que estos modelos son conocidos, sin embargo, el aporte que se realizó consiste en la deducción y formalización matemática con la cual son presentados en este trabajo.

Por lo general en matemáticas, una vez que se definen objetos o estructuras, lo siguiente es clasificarlos con el objetivo de facilitar su estudio. En este sentido, en el Capítulo 4, se estudian clases de funciones que determinan tipos de sistemas dinámicos discretos. Las clases de funciones que se estudiaron son: exactas, mezclantes, débilmente mezclantes, transitivas, totalmente transitivas, fuertemente transitivas, minimales, caóticas e irreducibles. Es de destacar que algunas de estas clases de funciones no son muy conocidas en la literatura de los sistemas dinámicos discretos. En este capítulo, además de estudiar algunas de las propiedades de estas clases de funciones, se analiza la relación que existe entre cada una de estas clases, en el sentido de inclusión, y se proporcionan ejemplos. También se estudian con especial interés la conjugación topológica. Es importante mencionar, que hasta donde sabemos, no existe en la literatura un estudio similar al que se realiza en esta parte del trabajo, y la mayoría de las demostraciones de tales resultados son propias.

En el Capítulo 5, se estudió la relación que existe entre la dinámica puntual y la dinámica colectiva. Para lo cual se analiza el siguiente problema: Sea $\mathcal{M}$ alguna de las siguientes clases de funciones: transitivas, mezcladoras, débilmente mezcladoras, totalmente transitivas, fuertemente transitivas, minimales, irreducibles, sensibles a las condiciones iniciales, caóticas o semi-abiertas. Encontramos la relación que existe entre las dos proposiciones siguientes:

a) $f \in \mathcal{M}$,

b) $F_n(f) \in \mathcal{M}$.

Las conclusiones del análisis de este problema se encuentran en la Tabla 5.1. Por último, se estudia la conjugación topológica de funciones inducidas. Es de destacar que en esta parte del trabajo también se realizaron algunas demostraciones propias de los resultados que se analizaron.

En general, esperamos que esta tesis sirva como guía a todo aquel que quiera iniciarse en el estudio y la investigación referente a sistemas dinámicos discretos y esté interesado analizar la relación que existe entre la dinámica puntual y la dinámica colectiva.

Bibliografía

[1] G. Acosta, A. Illanes, H. Méndez-Lango, *The transitivity of induced maps*, Topology Appl. 156 (2009), no. 5, 1013-1033.

[2] L. Alseda, J. Llibre, M. Misiurewics (1993), *Combinatorial dynamics and entropy in dimension one*, Advanced Series in Nonlinear Dynamics, 5, World Scientific, Singapore.

[3] Tom M. Apostol, *Cálculus*, Reverté, 2006.

[4] J. Auslander , Y. Katznelson, (1979), *Continuos maps of the circle without periodic points*, Israel J. Math., 32, 375-381.

[5] J. Banks, *Topological mapping properties defined by digraphs*, Discrete Contin. Dynam. Systems 5 No. 1 (1999), 83-92.

[6] Franco Barragán, A. Romero, S. Sanchez Perales y Victor M. Grijalva, *Breve introducción a la métrica de Hausdorff*, Sistemas dinámicos III (Editores: J. J. Angoa, J. Arrazola, R. Escobedo, A. Illanes, M. Osorio, J. Poisot, G. Sierra, A. Tamariz), Dirección de Fomento Editorial, Textos Científicos, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2014.

[7] W. Bauer, K. Sigmund, *Topological dynamics of transformations induced on the space of probability measures*, Monatsh. Math. 79 (1975), 81-92.

[8] J. L. García, D. Kwietniak, M. Lampart, P. Oprocha, A. Peris, *Chaos on hyperspaces*, Nonlinear Anal. 71 (2009), no. 1, 1-8.

[9] Victor Manuel Grijalva Altamirano, *Métrica de Hausdorff*, Tesis de Licenciatura, Universidad Tecnológica de la Mixteca, 2013.

[10] G. Higuera, A. Illanes, *Induced mappings on symmetric products*, Topology Proc., 37 (2011), 367-401.

[11] I. L. Iribarren, *Topología de Espacios Métricos*, Limusa, 1987.

[12] James R. Munkres, *Topología*, Prentice hall, 2007.

[13] Graciela Salicrup, *Introducción a la topología*, Sociedad Matemática Mexicana, 1993.

[14] Vladimir Tkachuk, *Curso básico de topología general*, Universidad Autónoma Metropolitana, 1999.