



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

**UN ALGORITMO DE INVERSIÓN BASADO EN ECUACIONES
INTEGRALES PARA RESOLVER EL PROBLEMA INVERSO DE
TOMOGRFÍA DE CAPACITANCIA ELÉCTRICA PARA FLUJOS
BIFÁSICOS**

**TESIS
PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN MODELACIÓN MATEMÁTICA**

**PRESENTA:
LIC. ARMANDO ALCALÁ VALLEJO**

**DIRECTORA DE TESIS:
DRA. SILVIA REYES MORA**

HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA, MÉXICO, MARZO DE 2017

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

POSTGRADO EN MATEMÁTICAS

**Un Algoritmo de Inversión basado en Ecuaciones Integrales
para resolver el Problema Inverso de
Tomografía de Capacitancia Eléctrica para Flujos Bifásicos**

Tesis
que para obtener el grado de
MAESTRO EN MODELACIÓN MATEMÁTICA

Presenta:
Lic. Armando Alcalá Vallejo

Asesora:
Dra. Silvia Reyes Mora

Huajuapán de León Oaxaca, a 24 de marzo de 2017.

Dedicado a todas y todos quienes me apoyaron incondicionalmente:

Maestras, Maestros, compañeras y compañeros de trabajo
Amigas y amigos que me acompañaron en los momentos difíciles

AGRADECIMIENTOS

Al ser todopoderoso llamado dios quien tiene los mejores planes para nosotros.

A mi familia.

A mi asesora: Dra. Silvia Reyes Mora, por su valiosa ayuda para realizar esta Tesis.

A mis sinodales: Dr. Salvador Sánchez Perales, Dr. José Margarito Hernández Morales, Dr. Sergio Palafox Delgado y Dr. Virgilio Vázquez Hipólito, por su tiempo y paciencia para leer, corregir y mejorar este trabajo de tesis.

A la Universidad Tecnológica de la Mixteca por su apoyo para realizar mis estudios de maestría.

Contenido

Contenido	x
Introducción	xii
1. Tomografía de Capacitancia Eléctrica	1
1.1. Descripción física del problema de la Tomografía de Capacitancia Eléctrica	1
1.1.1. Conceptos básicos	1
1.2. Modelo matemático de la TCE	4
1.2.1. Deducción de la ecuación $\text{div}(\varepsilon \nabla u) = 0$	6
1.2.2. Deducción de las condiciones en la frontera	7
1.3. Planteamiento del problema	9
1.4. TCE, un problema inverso mal planteado en sentido de Hadamard	10
1.5. Unicidad de la solución	16
2. Justificación teórica de la solución	20
2.1. Cálculo de $V_3^{(i)}$	20
2.2. Obtención de relaciones para hallar ε_1	24
3. Esquema del Algoritmo para la Solución del Problema Inverso	33
3.1. Algoritmo para la solución del problema inverso	33
3.1.1. Primer paso: Obtención de la expresión general de $V_2^{(i)}$ y $\frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial \bar{n}}$ en $ \xi = R_1$	33
3.1.2. Segundo paso: Planteamiento del funcional a minimizar.	39
3.1.3. Tercer paso: Aproximación de la función $V_1^{(i)}$	42
3.1.4. Cuarto paso: Minimización del funcional.	44
Conclusiones	48
Apéndice	49
A. Espacios de Sobolev.	49
A.1. Derivada débil o generalizada	49
A.1.1. Propiedades elementales de las derivadas débiles	50

A.2. Definición de espacios de Sobolev	50
Referencias	57
Referencias	57

Introducción

Los sistemas de imágenes tomográficas son diseñados para analizar la estructura y composición de los objetos, examinándolos mediante el cálculo de información a lo largo de secciones transversales virtuales a través de ellos; el interés principal es la imagen obtenida con ayuda de la computadora, la cual representa la distribución espacial de un parámetro físico y se calcula a partir de mediciones realizadas en la frontera de la región de estudio. En combinación con el sistema de medición electrónica, el procesamiento de la información recopilada juega un papel crucial en la producción de la imagen final. La tomografía complementa el rango de instrumentos de imagen dedicados a la observación, tales como el radar, sonar, ecógrafo, sismógrafo o lidar (un sistema de detección que trabaja con el mismo principio que el radar pero que usa luz de un láser). Actualmente, estos instrumentos se utilizan en su mayoría para detectar o localizar un objeto, por ejemplo un avión por su eco en una pantalla de radar, o para medir alturas, densidad o grosor, por ejemplo de la superficie de la tierra o de una capa geológica. Una parte importante de los sistemas de imágenes, tales como cámaras, videograbadoras o microscopios es el sensor que entrega directamente la imagen observada. En tomografía, el sensor realiza mediciones indirectas del objeto de estudio mediante la detección de información de la respuesta del sistema al tipo de campo inducido en él. Estas mediciones son descritas mediante ecuaciones, las cuales conducen a lo que se denomina problema directo, es decir, la ecuación de medición o ecuación de señal. Para obtener la imagen final, se aplican algoritmos apropiados para reconstruir las secciones transversales virtuales a partir de los datos disponibles de la ecuación de señal, por lo tanto, la reconstrucción resuelve el problema inverso ([1, 7, 11, 12]).

A partir de 1980 se han venido desarrollando diferentes técnicas para la medición de los diferentes componentes de un flujo multifásico como el petróleo mientras fluye a través de una tubería ([4, 15]). Algunas de estas técnicas son no invasivas de visualización, caracterización y medición, y no requieren análisis de laboratorio, estas técnicas se conocen con el nombre de tomografía de procesos.

Los pozos de petróleo normalmente no producen sólo aceite, sino una mezcla compleja de múltiples fases que tienen cantidades variables de aceite, gas y agua. La determinación de la cantidad de cada componente que se produce en realidad por cada pozo en específico es de mucha importancia para la explotación eficiente de los embalses o depósitos de petróleo. La forma convencional de hacer esto es mediante la separación de la mezcla y la medición de cada componente individual utilizando medidores de flujo monofásicos. Sin embargo, los separadores de tres fases necesarios son excesivamente voluminosos y caros.

Las técnicas de medición de flujo multifásico que no requieren separación de la mezcla han

surgido en la última década ([8]). Entre los enfoques más prometedores en la actualidad bajo investigación está la Tomografía de Capacitancia Eléctrica (TCE), basado en visualización de flujo multifásico utilizando métodos tomográficos ([6]). La principal ventaja de los métodos tomográficos yace en su inherente operación no invasiva y con régimen de flujo independiente ([11, 12]).

La técnica de la TCE es relativamente nueva con un mayor desarrollo en los últimos 15 años, actualmente se continúa investigando sobre los avances técnicos y áreas de aplicación. Entre los problemas abiertos más importantes de atender se encuentran los siguientes:

1.- Determinar el número de mediciones necesarias para identificar la permitividad de un medio.

2.- Proponer nuevos algoritmos de solución estables con una justificación teórica rigurosa e implementación viable.

3.- Implementar los algoritmos recientes en la construcción de tomógrafos.

4.- Resolver el caso tridimensional con métodos justificados teóricamente.

5.- Mejorar el tamaño del mallado para resolver el problema inverso numéricamente y se disminuya la influencia de la discretización del dominio, el cual es un proceso inestable.

En este sentido, el enfoque de este trabajo consiste en hallar una aproximación a la solución del problema inverso, usando un algoritmo de reconstrucción de la permitividad.

El aporte principal de la tesis es exponer la deducción del modelo matemático de la Tomografía de Capacitancia Eléctrica, además de realizar un análisis teórico del método de solución propuesto en ([3, 4]) con el objetivo de obtener un panorama completo de la Tomografía de Capacitancia Eléctrica y determinar la permitividad reduciendo el problema a un problema de optimización cuadrática con restricciones cuadráticas.

La organización de este trabajo de tesis es como sigue.

En la primera parte de este trabajo damos un panorama general de la TCE, la deducción del modelo, el planteamiento del problema inverso y la prueba de que dicho problema inverso es mal planteado en sentido de Hadamard. Además de exponer un resultado de unicidad de la solución del problema. En el capítulo 2, se obtiene explícitamente la expresión para el potencial en la región donde se encuentran colocados los electrodos y se obtienen las relaciones entre el potencial generado por el campo eléctrico inducido y la permitividad desconocida, de acuerdo al modelo planteado para el problema de la TCE. En el capítulo 3 se plantean los pasos del algoritmo de solución y se justifican teóricamente, además se da la forma explícita de una aproximación a la solución del problema.

Armando Alcalá Vallejo
Instituto de Física y Matemáticas,
Universidad Tecnológica de la Mixteca.
Marzo de 2017.

Capítulo 1

Tomografía de Capacitancia Eléctrica

En este capítulo planteamos la deducción de un modelo matemático de la Tomografía de Capacitancia Eléctrica (TCE) así como el problema que se va a resolver. Se muestra que el problema es mal planteado en sentido de Hadamard, y se presenta un teorema de unicidad de la solución débil del problema inverso.

1.1. Descripción física del problema de la Tomografía de Capacitancia Eléctrica

1.1.1. Conceptos básicos

Antes de deducir el modelo matemático, daremos la definición de algunos conceptos importantes que se toman como hipótesis para nuestro modelo.

Medio Isótropo: Objeto o sustancia que tiene una propiedad o característica física medible, la cual tiene el mismo valor cuando se mide en cualquier dirección a partir de un punto (localmente).

En el caso del modelo de TCE, el medio en el cual se hacen las mediciones es heterogéneo; y la característica a medir es la permitividad eléctrica ε . La permitividad depende del punto en el que se hace la medición, pero como las sustancias presentes en el medio no se mezclan completamente, se puede considerar que localmente nuestro medio es isótropo; así que al ubicarnos en un punto y medir la permitividad, ésta tendrá el mismo valor en cualquier dirección en una vecindad pequeña del punto.

Ejemplo de material isótropo es el acero, sus propiedades mecánicas y térmicas son las mismas en todas las direcciones.

La anisotropía (opuesta de isotropía) es la propiedad de algunos materiales o sustancias, según la cual, cualidades como: permitividad, conductividad, permeabilidad magnética, elasticidad, temperatura, velocidad de propagación de la luz, etc., varían según la dirección en que son examinadas. Algo anisótropo podrá presentar diferentes características según la di-

rección. La anisotropía de los materiales es más común y perceptible en sólidos cristalinos, debido a su estructura atómica y molecular regular ([16]).

Algunos ejemplos de materiales anisótropos son la madera, algunos cristales y los metales laminados.

Medio homogéneo: Medio o sustancia con las mismas propiedades físicas y químicas en cualquier punto.

En nuestro caso cuando la permitividad no depende del punto de posición, el medio es homogéneo.

En la mayoría de los casos, los materiales usados para la experimentación muestran no homogeneidad muy pequeña, por lo que se les da el tratamiento como materiales homogéneos.

La atmósfera es un ejemplo de medio no homogéneo, ya que su permitividad varía con la altitud.

Nuevamente en nuestro caso, aunque dentro del modelo hay un medio heterogéneo, las sustancias no se mezclan completamente, por lo tanto consideraremos que de manera local nuestro medio se comporta como un medio homogéneo. Es decir que la permitividad no cambia de un punto a otro en una vecindad, excepto tal vez en la frontera de dicha vecindad.

Medio lineal: Un medio lineal es aquel en que se mantiene la proporcionalidad causa-efecto entre dos magnitudes relacionadas por una característica física.

Los materiales en los cuales sus parámetros constitutivos ϵ , μ y σ no están en función de la intensidad del campo eléctrico, magnético, o de ambos (bianisotrópicos) se conocen como lineales. En el caso contrario se conocen como no lineales.

En un medio lineal, la relación entre el campo eléctrico \vec{E} y la densidad de flujo eléctrico \vec{D} y también entre el campo magnético \vec{H} y la densidad de flujo magnético \vec{B} es lineal.

Un material dieléctrico en el que se aplica $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ es lineal si la densidad de campo eléctrico \vec{D} varía linealmente con la intensidad del campo \vec{E} , y no lineal en caso contrario.

La permitividad y la permeabilidad son escalares cuando las cargas están en medios homogéneos e isótropos. En medios isótropos y heterogéneos, en los cuales las sustancias o materiales no se mezclan completamente, la permitividad y la permeabilidad aún siguen siendo escalares, aunque dependen de la posición, pues la región de interés puede dividirse en subregiones, en cada una de las cuales el medio puede considerarse homogéneo.

La TCE es una técnica emergente dirigida a la visualización interna no invasiva de mezclas eléctricamente no conductoras en procesos industriales como mezclado, separación y flujo multifásico ([9, 10]).

El principio básico de este método consiste en colocar un sensor que contiene un arreglo de entre 8 y 24, algunas veces más de 24, electrodos de detección contiguos alrededor de la tubería que transporta los fluidos en proceso, en la sección transversal a ser investigada. La pared de la tubería debe ser eléctricamente no conductora en la zona de los electrodos. El sensor también tiene una cubierta exterior cilíndrica de metal que lo cubre por completo, la cual se conserva siempre a un potencial eléctrico de cero volts, (ver Figura 1.1).



Figura 1.1: Tubo con sensores.

Los electrodos de detección están conectados a un equipo que permite la medición de todas las capacitancias mutuas entre los diferentes pares de electrodos, y a partir de este conjunto de medidas se obtiene la distribución de la permitividad eléctrica dentro del sensor, usando un algoritmo de inversión adecuado, el sistema completo puede verse en la Figura 1.2 .



Figura 1.2: Sistema completo.

¹ La distribución de la permitividad refleja el arreglo espacial de las fases en el flujo. La reconstrucción de la imagen puede por lo tanto ser considerada como un problema inverso de permitividad.

El problema directo consiste en determinar las capacitancias mutuas dada una distribución de permitividad conocida dentro de la tubería. El problema inverso implica hallar una distribución de permitividad desconocida dentro de la tubería basándose en el conocimiento

¹Figuras 1.1 y 1.2 tomadas de la página web de ITS UK.

de las capacitancias mutuas (teniendo en cuenta que en la tubería misma y en el área entre la tubería y el protector, se conoce la distribución de la permitividad).

Mediante un dispositivo electrónico se fija el cilindro exterior a tierra de manera que el potencial eléctrico sobre dicho cilindro se puede considerar igual a cero. Este dispositivo está conectado a los N electrodos dispuestos sobre la superficie del tubo, de manera que produce un potencial igual a uno en el electrodo de referencia y cero en los restantes.

Cuando se produce este arreglo de potencial superficial, sobre los cilindros intermedio y exterior, se mide la capacitancia mutua entre el electrodo de referencia y los restantes electrodos. Para medir la capacitancia mutua $C_{i,j}$ entre los electrodos i y j , se aplica un voltaje sinusoidal de magnitud V al electrodo i (fuente), conservando el resto a potencial cero, y se mide la carga eléctrica Q_j inducida en el electrodo j (detector).

Entonces $C_{i,j}$ se obtiene con la fórmula

$$C_{i,j} = \frac{Q_j}{\Delta V_{ij}}. \quad (1.1)$$

donde ΔV_{ij} es la diferencia de potencial entre los electrodos i y j .

El uso de las protecciones cilíndricas en el extremo de los electrodos de detección (suponiendo que la distribución de fase cambia lentamente en la dirección axial) permite representar al sensor con un modelo bidimensional ([8]).

Las mediciones de capacitancia mutua se repiten considerando como electrodo de referencia cada uno de los N electrodos del arreglo.

Existe una pequeña separación entre dos electrodos consecutivos, en la que se encuentra un material aislante para disminuir los efectos capacitivos entre los electrodos, comunmente se coloca aceite para contrarrestar la presión producida por el flujo multifásico en la pared interior del tubo.

1.2. Modelo matemático de la TCE

Denotamos por Ω a la región que corresponde a una sección transversal de una tubería, la cual está conformada por la unión de tres subregiones: un círculo Ω_1 y dos anillos concéntricos adyacentes Ω_2 y Ω_3 (ver Figura 1.3).

Ω_1 representa el interior del tubo, donde fluye la mezcla o sustancia de la cual se intenta obtener información. La región Ω_2 representa el grosor del material del cual está hecho el tubo, generalmente un material dieléctrico; la frontera interior de esta región representa la superficie interior del tubo y la frontera exterior representa la superficie exterior del tubo. Finalmente Ω_3 representa la región comprendida entre la superficie exterior del tubo y la protección de los electrodos, en esta región están colocados los N electrodos, fijos a la superficie exterior del tubo, los electrodos son de igual longitud angular.

Los electrodos al ser muy delgados y tener huecos muy pequeños entre ellos, se pueden modelar como superficies equipotenciales (líneas en el modelo bidimensional) que cubren toda la frontera entre Ω_2 y Ω_3 . La protección de los electrodos se modela como una línea equipotencial en el perímetro exterior de Ω .

Así la región Ω se puede describir como

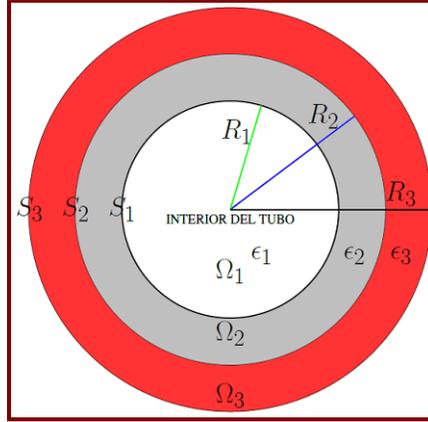


Figura 1.3: Sección transversal.

$\Omega = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2 \cup \bar{\Omega}_3$, donde $\bar{\Omega}$ denota la cerradura de la región Ω y

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \{z \in \mathbb{R}^2 : |z| < R_1\}, \\ \Omega_2 &= \{z \in \mathbb{R}^2 : R_1 < |z| < R_2\}, \\ \Omega_3 &= \{z \in \mathbb{R}^2 : R_2 < |z| < R_3\}.\end{aligned}$$

Debemos considerar que el electrodo i -ésimo se encuentra en el arco S_i definido y denotado por:

$$S_i = \left\{ z \in \mathbb{R}^2 : |z| = R_2 \quad \text{y} \quad \frac{2\pi(i-1)}{N} \leq \arg z \leq \frac{2\pi i}{N} \right\}.$$

De esta manera cuando el electrodo i -ésimo definido por S_i se toma como electrodo de referencia, se obtienen $N - 1$ mediciones de capacitancias mutuas C_{ij} , $1 \leq j \leq N$, $j \neq i$; luego, al variar el electrodo de referencia S_i con $1 \leq i \leq N$, habremos efectuado un total de $N(N - 1)$ mediciones de capacitancia mutua. Como se cumple que $C_{ij} = C_{ji}$ entonces tendremos $\frac{N(N-1)}{2}$ mediciones independientes.

Las capacitancias se expresan matemáticamente como una integral sobre la superficie del electrodo. Se puede ver que:

$$C_{ij} = K \int_{S_j} \varepsilon(x, y) \frac{\partial V^{(i)}}{\partial \vec{n}} ds, \quad (1.2)$$

donde $V^{(i)}$ es el potencial generado en el interior de la región al inducir un potencial en la superficie del electrodo i -ésimo, $\varepsilon(x, y)$ es la permitividad del medio, S_j es la superficie del electrodo j -ésimo y K es una constante conocida.

Denotemos por ε_k la permitividad en la región Ω_k para $k = 1, 2, 3$ y por $V_k^{(i)}(z)$, $i = 1, 2, 3, \dots, N$, $k = 1, 2, 3$, al potencial producido en Ω_k cuando el potencial en el electrodo i está ajustado a 1 y en los electrodos restantes ajustado a cero.

1.2.1. Deducción de la ecuación $\text{div}(\varepsilon \nabla u) = 0$

Para nuestro problema, suponemos que el medio es homogéneo, lineal e isotrópico, por las razones expuestas en la sección 1.1.

Suponiendo que el flujo cambia infinitesimalmente durante el tiempo requerido para un conjunto de mediciones, y que la frecuencia del voltaje de excitación es tan pequeña que la correspondiente longitud de onda es más grande que las dimensiones del sensor, se puede considerar un modelo estático ([13, 14]).

Se conoce que las leyes de Maxwell son:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_v, \quad \text{Ley de Gauss para el campo eléctrico;}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \text{Ley de Gauss para el campo magnético;}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{Ley de Faraday;}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \text{Ley de Ampere - Maxwell;}$$

donde las notaciones utilizadas son:

$$\vec{E} \text{ campo eléctrico } [Volts/metros];$$

$$\vec{H} \text{ campo magnético } [Amperes/metros];$$

$$\vec{D} \text{ densidad de flujo eléctrico } [Coulombs/metros^2];$$

$$\vec{B} \text{ densidad de flujo magnético } [Weber/metros^2];$$

$$\vec{J} \text{ densidad de corriente eléctrica } [Amperes/metros^2];$$

$$\vec{\rho} \text{ densidad volumétrica de carga eléctrica } [Coulombs/metros^3].$$

Además $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$, $\vec{J} = \sigma \vec{E}$; donde ε , μ y σ son la permitividad eléctrica, permeabilidad magnética y la conductividad respectivamente.

Estamos considerando que nuestro modelo representa un sistema aislado de cualquier campo magnético exterior, además también todos los electrodos están aislados entre sí para evitar inducción de campos magnéticos entre ellos, de tal manera que de existir un campo magnético dentro del sistema, éste es tan pequeño que se puede descartar. Por ello podemos considerar que $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$.

Como el campo \vec{E} es constante, entonces su rotacional es el vector cero, así $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$, además en caso de existir densidad de flujo magnético esta debe ser constante y por lo tanto $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$; pues la derivada parcial respecto a cualquier variable de un vector constante, es el vector cero.

Como $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ y $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$, entonces existe una función potencial V tal que $\vec{E} = -\nabla V$, por lo tanto

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot (\varepsilon \vec{E}) = \rho_v, \quad \text{luego } \nabla \cdot (\varepsilon(-\nabla V)) = \rho_v,$$

$$\text{por tanto } -\nabla \cdot (\varepsilon \nabla V) = \rho_v. \tag{1.3}$$

Como ρ_v representa la densidad volumétrica de carga eléctrica al interior del tubo y en el interior hay un medio no conductor, en el cual no se ha introducido desde el exterior carga adicional alguna, entonces la carga libre ² total en todo el volumen del dieléctrico se conserva

²Las cargas libres son las cargas negativas presentes en los electrones libres de los átomos, es a estas cargas a las que hace referencia la densidad volumétrica de carga presente en la Ley de Gauss para el campo eléctrico, y como en los dieléctricos no hay electrones libres entonces la densidad volumétrica de carga es cero.

igual a cero ([23]), es decir que $\rho_v = 0$, otra manera de explicar que la divergencia dentro de la región dieléctrica es cero, es que aunque hay cargas positivas dentro de la región, éstas están en reposo pues no hay electrones libres que las transporten de un punto a otro dentro de la región, por lo tanto las cargas están en reposo, en otras palabras en cada punto de la región no hay fuentes ni sumideros y de esta manera no hay densidad de flujo eléctrico y por lo tanto la divergencia del campo eléctrico es cero y si se induce un campo eléctrico desde fuera de la región, entonces en cada superficie cerrada en una vecindad de cada punto la cantidad de flujo eléctrico que entra es la misma que la que sale de la superficie. Por lo tanto la ecuación (1.3) queda finalmente como

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = 0.$$

1.2.2. Deducción de las condiciones en la frontera

Las condiciones en la frontera para los vectores de campo eléctrico, en la zona interfacial entre dos medios pueden obtenerse aplicando la ley de Gauss.

Estos medios pueden ser dos dieléctricos con diferentes propiedades, un medio dieléctrico y un medio conductor o dos medios conductores. El vacío suele considerarse como un dieléctrico de permitividad ϵ_0 .

Debido a que nuestra región de estudio está conformada por medios dieléctricos, consideremos dos medios dieléctricos en contacto con permitividades ϵ_1 y ϵ_2 respectivamente. Como se muestra en la Figura 1.4.

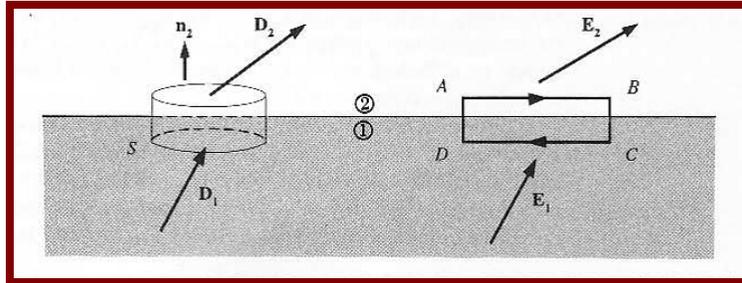


Figura 1.4: Frontera entre dos medios dieléctricos.

³ Supondremos que hay una densidad superficial de carga externa, a la cual llamaremos σ , que puede variar de un punto a otro en la zona interfacial. Construyamos ahora una pequeña superficie S en forma de cilindro, (ver Figura 1.4), que corta a la zona interfacial y encierra un área ΔS de dicha zona, siendo la altura del cilindro muy pequeña comparada con el diámetro de las bases. La carga encerrada por S es:

$$\sigma \Delta S + \frac{1}{2} (\rho_1 + \rho_2) V,$$

³Figura 1.4 tomada de [14].

donde el volumen V del cilindro es despreciablemente pequeño, de modo que el último término puede despreciarse. Aplicando la ley de Gauss a S , vemos que

$$D_2 \cdot \vec{n}_2 \Delta S + D_1 \cdot \vec{n}_1 \Delta S = \sigma \Delta S \implies (D_2 - D_1) \cdot \vec{n}_2 = \sigma$$

en este caso $D_1 = \varepsilon_1 \vec{E}_1$ y $D_2 = \varepsilon_2 \vec{E}_2$ son los desplazamientos eléctricos en ambos medios dieléctricos.

Puesto que \vec{n}_2 es la normal exterior a la zona interfacial, entonces.

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma;$$

en esta igualdad $D_{2n} = D_2 \cdot \vec{n}_2$ y $D_{1n} = D_1 \cdot \vec{n}_2$ son las componentes normales a la superficie interfacial de los vectores de desplazamiento eléctrico en los medios dieléctricos.

De modo que la discontinuidad en la componente normal de D está dada por la densidad superficial de la carga externa sobre la zona interfacial. O, dicho de otra forma, si no hay carga en la zona interfacial entre dos medios, entonces la componente normal de D es continua.

Es decir

$$D_{2n} - D_{1n} = 0; \quad \text{lo cual nos lleva a } D_{2n} = D_{1n}$$

y como $D_{2n} = D_2 \cdot \vec{n}_2$ y $D_{1n} = D_1 \cdot \vec{n}_2$ y además $D_2 \cdot \vec{n}_2 = \varepsilon_2 E_2 \cdot \vec{n}_2 = -\varepsilon_2 \nabla V_2 \cdot \vec{n}_2 = -\frac{\partial V_2}{\partial \vec{n}_2}$ (definición de derivada normal), como consecuencia llegamos a $\varepsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial \vec{n}_2} = \varepsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial \vec{n}_2}$

Debido a que el campo electrostático E puede obtenerse como menos el gradiente de un potencial, la integral de línea de $E \cdot dl$ alrededor de cualquier trayectoria cerrada se anula. Apliquemos este resultado a la trayectoria rectangular ABCD de la Figura 1.4. Sobre esta trayectoria, los segmentos AB y CD se considerarán iguales a Δl y los segmentos AD y BC se supondrán despreciablemente pequeños. Por consiguiente

$$E_2 \cdot \Delta l + E_1 \cdot (-\Delta l) = 0 \quad \text{lo cual implica que } (E_2 - E_1) \cdot \Delta l = 0,$$

donde E_2 y E_1 son los campos eléctricos en ambos medios.

En consecuencia, el resultado es

$$E_{2t} = E_{1t};$$

que son las componentes tangenciales de los campos eléctricos.

Por lo tanto, la componente tangencial del campo eléctrico es continua al atravesar una zona interfacial ([14]).

Por lo anterior, el potencial eléctrico $V_k^i(z)$, para $i = 1, \dots, N$ satisface la siguiente ecuación:

$$\operatorname{div}(\varepsilon_k(z) \nabla V_k^i) = 0, \quad \text{para } z \in \Omega_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad (1.4)$$

y las condiciones de frontera:

$$V_1^i(z) = V_2^i(z), \quad \text{si } |z| = R_1; \quad (1.5)$$

$$V_2^i(z) = V_3^i(z) = \psi_{\theta_0}^{(i)}(\theta), \quad \text{si } |z| = R_2; \quad (1.6)$$

$$\varepsilon_1(z) \frac{\partial V_1^i}{\partial \vec{n}_1}(z) = \varepsilon_2(z) \frac{\partial V_2^i}{\partial \vec{n}_1}(z), \quad \text{si } |z| = R_1; \quad (1.7)$$

$$V_3^i(z) = 0, \quad \text{si } |z| = R_3; \quad (1.8)$$

Donde

$$\psi_{\theta_0}^{(i)}(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{si } \theta \leq \theta_i^{(-)} - \theta_0; \\ \frac{\theta - \theta_i^{(-)}}{\theta_0} + 1, & \text{si } \theta_i^{(-)} - \theta_0 \leq \theta \leq \theta_i^{(-)}; \\ 1, & \text{si } \theta_i^{(-)} \leq \theta \leq \theta_i^{(+)}; \\ \frac{\theta_i^{(+)} - \theta}{\theta_0} + 1, & \text{si } \theta_i^{(+)} \leq \theta \leq \theta_i^{(+)} + \theta_0; \\ 0, & \text{si } \theta \geq \theta_i^{(+)} - \theta_0, \end{cases} \quad (1.9)$$

donde \vec{n}_1 es el vector unitario exterior al círculo $|z| = R_1$.

En lo que sigue, nuestro modelo estará determinado por el problema con valores en la frontera (1.4)-(1.9).

El problema directo consiste en calcular la solución $V^{(i)}(z)$ del problema con valor en la frontera (1.4)-(1.9) y los valores de capacitancia mutua C_{ij} para una permitividad conocida $\varepsilon_1(z)$. El problema directo es un problema bien planteado en el sentido de Hadamard y es numéricamente estable ([7]).

Podemos describir el problema inverso de la siguiente manera: A partir de (1.2), dados $\frac{N(N-1)}{2}$ valores C_{ij} $i, j = 1, 2, \dots, N$, $i < j$, de las capacitancias mutuas entre los electrodos S_i y S_j , determinar aproximadamente el valor de $\varepsilon_1(z)$ usando el modelo (1.4)-(1.9). El problema inverso es mal planteado en sentido de Hadamard, como exponemos más adelante.

Se debe resaltar que aunque las hipótesis básicas del trabajo están orientadas a resolver un problema de la industria petrolera, este problema tiene muchas otras aplicaciones dentro de la tomografía de procesos ([11, 12]).

1.3. Planteamiento del problema

Usando el Teorema de Green para integrales de línea, se puede obtener de (1.2) la siguiente relación

$$\int_{S_j^-} \frac{\partial V_2^i}{\partial \vec{n}_2} ds = \frac{1}{\varepsilon_2} \left\{ \varepsilon_3 \int_{S_j^+} \frac{\partial V_3^i}{\partial \vec{n}_2} ds - \frac{c_{i,j}}{K} \right\}; \quad (1.10)$$

donde S_j^- y S_j^+ denotan el arco S_j obtenido como un conjunto de puntos límite de Ω_3 y Ω_2 , respectivamente.

El hecho de que la función $V_3^{(i)}$ esté desacoplada en el modelo (1.4)-(1.9) y de que sea una función armónica en Ω_3 , significa que podemos calcular $V_3^{(i)}$ de manera independiente, lo cual

nos permite obtener el valor del lado derecho de la ecuación (1.10) a partir del conocimiento de los valores de capacitancia mutua $c_{i,j}$ medidos experimentalmente donde

$$c_{i,j} = \int_{S_j^-} \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial \vec{n}_2} ds; \quad (1.11)$$

entonces, el objetivo general es resolver un problema equivalente:

Dados $\frac{N(N-1)}{2}$ valores $c_{i,j}$, $i, j = 1, 2, 3, \dots, N$, $i < j$, obtenidos usando las ecuaciones (1.10) y (1.11), determinar aproximadamente el valor de $\varepsilon_1(z)$ usando el modelo (1.4)-(1.9).

Una de las principales características de este trabajo, con respecto a los métodos tradicionales de inversión por mínimos cuadrados, es el hecho que en este trabajo se resuelve un problema de optimización, el cual no implica resolver una ecuación diferencial en cada iteración ([5]). Además el algoritmo propuesto es estable en sentido de Hadamard y puede ofrecer bajo costo computacional, lo cual es crucial en este tipo de problemas.

1.4. TCE, un problema inverso mal planteado en sentido de Hadamard

En esta sección veremos que al tratar de identificar ε nos encontramos con problemas de estabilidad y por ello se dice que el problema es mal planteado, en sentido de Hadamard ⁴.

Para demostrar la inestabilidad del problema, usaremos conceptos de los espacios de Sobolev.

Consideremos el problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\varepsilon \nabla u) = 0, & \text{en } \Omega; \\ u = f, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

En [22] se muestra que si $\varepsilon \in C^1(\overline{\Omega})$ y si $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, entonces existe una única solución débil, (ver definición A.1 en la página 49), $u \in H^1(\Omega)$ que cumple:

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial\Omega} \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega).$$

Además; en ese mismo trabajo, se muestra cómo se puede definir la transformación Dirichlet-Neumann, (ver definición A.12 en la página 55), denotada como Λ_ε por :

$$\Lambda_\varepsilon : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega);$$

$$\Lambda_\varepsilon(\varphi) = (\varepsilon \nabla u) \cdot n|_{\partial\Omega} = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial\Omega} \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega),$$

⁴Un problema inverso es bien planteado en sentido de Hadamard si la solución existe, es única y depende continuamente de los datos, si alguna condición no se cumple se dice que el problema es mal planteado en sentido de Hadamard.

y se demuestra que esta transformación es acotada.

Por lo anterior, el problema inverso de Tomografía de Capacitancia Eléctrica consiste en hallar a la función de permitividad ε , a partir del conocimiento del operador Dirichlet-Neumann para un número suficientemente grande de pares de datos de Cauchy de la forma $(u|_{\partial\Omega}, \varepsilon \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_{\partial\Omega})$.

Para ver que el problema de identificar ε es mal planteado, debemos demostrar que el operador inverso no es continuo, para ello basta con mostrar la existencia de una sucesión Λ_i que converge a cero pero $\varepsilon_i \not\rightarrow 0$ cuando $i \rightarrow \infty$.

Sea entonces

$$\varepsilon_R = \begin{cases} 1, & \text{en } \Omega_1; \\ 1 + \hat{q}, & \text{en } \Omega_R. \end{cases}$$

donde $\hat{q} > 0$ y $0 < R < 1$.

En la región Ω_1 la ecuación $\text{div}(\varepsilon \nabla u) = 0$ se puede escribir como $\Delta u = 0$ ya que ε es constante. También $\Delta u = 0$ en Ω_R .

Supongamos que $u|_{\partial\Omega} = f$ y $\varepsilon \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_{\partial\Omega} = \phi$, donde $\partial\Omega$ es la circunferencia unitaria.

Denotemos por:

$$u = \begin{cases} u_1, & \text{en } \Omega_1; \\ u_R, & \text{en } \Omega_R. \end{cases}$$

Por la continuidad de los potenciales y de las corrientes normales, se cumple que:

$$\begin{cases} u_1 = u_R, & \text{en } \partial\Omega_1; \\ \varepsilon_1 \frac{\partial u_1}{\partial \vec{n}} = \varepsilon_R \frac{\partial u_R}{\partial \vec{n}} & \text{en } \partial\Omega_1. \end{cases}$$

Nota: En este caso la normal \vec{n} coincide con el radio.

Resolveremos el problema directo, es decir calcularemos el potencial u a partir del conocimiento de ε y f .

Como u es armónica, se le puede representar en serie de Fourier:

$$u(r, \theta) = \begin{cases} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} (b_n + c_n) \left(\frac{r}{R}\right)^{|n|} e^{in\theta}, & \text{en } \Omega_R; \\ \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \left[b_n \left(\frac{r}{R}\right)^{|n|} + c_n \left(\frac{r}{R}\right)^{-|n|} \right] e^{in\theta}, & \text{en } \Omega_1. \end{cases}$$

Además, desarrollamos a f en serie de Fourier:

$$f(\theta) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \hat{f}_{(n)} e^{in\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi];$$

Usando las condiciones de compatibilidad en $\partial\Omega_R$ y la condición en $\partial\Omega_1$ se tiene que

$$\varepsilon_R \frac{\partial u}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial u}{\partial \vec{r}}, \quad \text{en } \partial\Omega_1.$$

De aquí que

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{r}} = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \left[b_n \frac{|n|}{R^{|n|}} (r)^{|n|-1} - c_n R^{|n|} |n| (r)^{-|n|-1} \right] e^{in\theta}; \quad \implies$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{r}} \right|_{r=1} = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \left[b_n \frac{|n|}{R^{|n|}} - c_n R^{|n|} |n| \right] e^{in\theta}.$$

Por otro lado, por la condición de frontera $u|_{r=1} = f(\theta)$, debe cumplirse

$$\begin{aligned} u(1, \theta) &= \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \left[\frac{b_n}{R^{|n|}} - c_n R^{|n|} \right] e^{in\theta} = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \hat{f}_{(n)} e^{in\theta} = f(\theta) \quad \implies \\ \frac{b_n}{R^{|n|}} - c_n R^{|n|} &= \hat{f}_{(n)}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}; n \neq 0. \end{aligned} \quad (1.13)$$

La ecuación (1.13) nos sirve para hallar las incógnitas b_n y c_n para completar la serie de Fourier de la función $u(r, \theta)$. Para hallar otra ecuación usamos la continuidad de las corrientes normales en $\partial\Omega_R$, en efecto,

$$(1 + \hat{q}) \left. \frac{\partial u_-}{\partial \vec{r}} \right|_{\partial\Omega_R} = \left. \frac{\partial u_+}{\partial \vec{r}} \right|_{\partial\Omega_R};$$

donde

$$\begin{aligned} u_-(r, \theta) &= \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} (b_n + c_n) \left(\frac{r}{R} \right)^{|n|} e^{in\theta}, \quad r < R; \\ u_+(r, \theta) &= \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \left[b_n \left(\frac{r}{R} \right)^{|n|} + c_n \left(\frac{r}{R} \right)^{-|n|} \right] e^{in\theta}, \quad r > R. \end{aligned}$$

Derivando cada ecuación respecto a la variable r e igualándolas obtenemos

$$(1 + \hat{q}) \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} (b_n + c_n) \left(\frac{|n|}{R^{|n|}} r^{|n|-1} \right) e^{in\theta} = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \left[b_n \left(\frac{|n|}{R^{|n|}} \right) r^{|n|-1} - c_n \left(\frac{|n|}{R^{-|n|}} \right) r^{-|n|-1} \right] e^{in\theta}$$

$$(1 + \hat{q}) \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} (b_n + c_n) |n| \left(\frac{r}{R} \right)^{|n|} r^{-1} e^{in\theta} = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \left[|n| b_n \left(\frac{r}{R} \right)^{|n|} r^{-1} - c_n |n| \left(\frac{r}{R} \right)^{-|n|} r^{-1} \right] e^{in\theta}.$$

Si $r = R$ entonces la igualdad queda de la forma siguiente:

$$(1 + \hat{q}) \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} (b_n + c_n) |n| r^{-1} e^{in\theta} = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} [|n| b_n r^{-1} - c_n |n| r^{-1}] e^{in\theta}$$

Esto implica que:

$$\sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} (1 + \hat{q}) (b_n + c_n) |n| r^{-1} e^{in\theta} = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} [b_n - c_n] |n| r^{-1} e^{in\theta}.$$

Esta igualdad es verdadera si:

$$\forall n \in \mathbb{Z}; \quad n \neq 0, \quad (1 + \hat{q})(b_n + c_n) = b_n - c_n \quad (1.14)$$

Con las ecuaciones (1.13) y (1.14) se forma el sistema siguiente

$$\begin{cases} \frac{b_n}{R^{|n|}} - R^{|n|}c_n = \hat{f}_{(n)}, \\ (1 + \hat{q})(b_n + c_n) = b_n - c_n, \end{cases}$$

que es equivalente a

$$\begin{cases} \frac{b_n}{R^{|n|}} - R^{|n|}c_n = \hat{f}_{(n)}; \\ \hat{q}b_n + (2 + \hat{q})c_n = 0. \end{cases}$$

La solución del sistema es

$$b_n = \frac{\hat{f}_{(n)}(2 + \hat{q})}{\frac{(2 + \hat{q})}{R^{|n|}} + \hat{q}R^{|n|}}, \quad c_n = \frac{-\hat{f}_{(n)}\hat{q}}{\frac{(2 + \hat{q})}{R^{|n|}} + \hat{q}R^{|n|}};$$

que se puede escribir como

$$b_n = \frac{\hat{f}_{(n)}(2 + \hat{q})R^{|n|}}{(2 + \hat{q}(1 + R^{2|n|}))}, \quad c_n = \frac{-\hat{f}_{(n)}\hat{q}R^{|n|}}{(2 + \hat{q}(1 + R^{2|n|}))}.$$

Luego

$$b_n + c_n = \frac{\hat{f}_{(n)}(2 + \hat{q})R^{|n|} - \hat{q}\hat{f}_{(n)}R^{|n|}}{(2 + \hat{q}(1 + R^{2|n|}))} = \frac{2\hat{f}_{(n)}R^{|n|}}{(2 + \hat{q}(1 + R^{2|n|}))}. \quad (1.15)$$

Además

$$b_n \frac{r^{|n|}}{R^{|n|}} + c_n \frac{r^{-|n|}}{R^{-|n|}} = b_n \frac{r^{|n|}}{R^{|n|}} + c_n R^{|n|}r^{-|n|};$$

sustituyendo los coeficientes b_n y c_n obtenemos

$$b_n \frac{r^{|n|}}{R^{|n|}} + c_n R^{|n|}r^{-|n|} = \frac{\hat{f}_{(n)}(2 + \hat{q})R^{|n|}r^{|n|}}{(2 + \hat{q}(1 + R^{2|n|}))R^{|n|}} - \frac{\hat{f}_{(n)}\hat{q}R^{|n|}r^{-|n|}}{(2 + \hat{q}(1 + R^{2|n|}))R^{-|n|}}$$

$$b_n \frac{r^{|n|}}{R^{|n|}} + c_n R^{|n|}r^{-|n|} = \frac{\hat{f}_{(n)}(2 + \hat{q})r^{|n|}}{(2 + \hat{q}(1 + R^{2|n|}))} - \frac{\hat{f}_{(n)}\hat{q}R^{2|n|}r^{-|n|}}{(2 + \hat{q}(1 + R^{2|n|}))}.$$

$$\text{Finalmente} \quad b_n \frac{r^{|n|}}{R^{|n|}} + c_n R^{|n|}r^{-|n|} = \hat{f}_{(n)} \left[\frac{(2 + \hat{q})r^{|n|} - \hat{q}R^{2|n|}r^{-|n|}}{2 + \hat{q}(1 + R^{2|n|})} \right].$$

Si $r = 1$, se tiene

$$\hat{f}_{(n)} \left[\frac{2 + \hat{q} - \hat{q}R^{2|n|}}{2 + \hat{q}(1 + R^{2|n|})} \right] = \hat{f}_{(n)} \left[\frac{2 + \hat{q} - \hat{q}R^{2|n|}}{2 + \hat{q} + \hat{q}R^{2|n|}} \right]. \quad (1.16)$$

Dividiendo por \hat{q} la expresión entre corchetes en (1.16) obtenemos:

$$b_n \frac{r^{|n|}}{R^{|n|}} + c_n R^{|n|} r^{-|n|} \Big|_{r=1} = \hat{f}_{(n)} \left[\frac{1 + \frac{2}{\hat{q}} - R^{2|n|}}{1 + \frac{2}{\hat{q}} + R^{2|n|}} \right].$$

Si $1 + \frac{2}{\hat{q}} = \alpha$ entonces la expresión anterior se puede escribir como

$$b_n \frac{r^{|n|}}{R^{|n|}} + c_n R^{|n|} r^{-|n|} \Big|_{r=1} = \hat{f}_{(n)} \left[\frac{\alpha - R^{2|n|}}{\alpha + R^{2|n|}} \right]; \quad (1.17)$$

al sustituir las expresiones (1.15) y (1.17) en $u(r, \theta)$ tenemos la forma de $u(r, \theta)$.

$$u(r, \theta) = \begin{cases} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \frac{2\hat{f}_{(n)} R^{|n|}}{(2 + \hat{q}(1 + R^{2|n|}))} \left(\frac{r}{R}\right)^{|n|} e^{in\theta}, & \text{en } \Omega_R; \\ \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \left[\hat{f}_{(n)} \frac{\alpha - R^{2|n|}}{\alpha + R^{2|n|}} \right] e^{in\theta}, & \text{en } \Omega_1. \end{cases},$$

que finalmente queda como

$$u(r, \theta) = \begin{cases} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \frac{2\hat{f}_{(n)}}{(2 + \hat{q}(1 + R^{2|n|}))} r^{|n|} e^{in\theta}, & \text{en } \Omega_R; \\ \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \left[\hat{f}_{(n)} \frac{\alpha - R^{2|n|}}{\alpha + R^{2|n|}} \right] e^{in\theta}, & \text{en } \Omega_1. \end{cases}$$

Hasta aquí queda resuelto el problema directo, esta información la usaremos para demostrar que el problema inverso es mal planteado.

Sean

$$(\Lambda_{\varepsilon_R} f)(\theta) = \frac{\partial u}{\partial \bar{r}}(1, \theta) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \left[\hat{f}_{(n)} \frac{\alpha - R^{2|n|}}{\alpha + R^{2|n|}} \right] e^{in\theta}$$

$$\text{y } (\Lambda_1 f)(\theta) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \hat{f}_{(n)} e^{in\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Probaremos que $\|\Lambda_{\varepsilon_R} - \Lambda_1\| \rightarrow 0$ cuando $R \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} \|(\Lambda_{\varepsilon_R} - \Lambda_1)(f)\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 &= \left\| \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \left[\hat{f}_{(n)} \frac{\alpha - R^{2|n|}}{\alpha + R^{2|n|}} \right] e^{in\theta} - \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \hat{f}_{(n)} e^{in\theta} \right\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 \\ &= \left\| \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \left[\frac{\alpha - R^{2|n|}}{\alpha + R^{2|n|}} - 1 \right] \hat{f}_{(n)} e^{in\theta} \right\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 = \left\| \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \left[\frac{\alpha - R^{2|n|} - \alpha - R^{2|n|}}{\alpha + R^{2|n|}} \right] \hat{f}_{(n)} e^{in\theta} \right\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 \end{aligned}$$

$$= \left\| \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \left[\frac{-2R^{2|n|}}{\alpha + R^{2|n|}} \right] \hat{f}_{(n)} e^{in\theta} \right\|_{L^2(0,2\pi)}^2 = \int_0^{2\pi} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \left[\frac{4R^{4|n|}}{(\alpha + R^{2|n|})^2} \right] |\hat{f}_{(n)}|^2 |e^{in\theta}|^2 d\theta;$$

y debido a que $R < 1$ y $4 \leq 4|n|$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ se tiene $R^{4|n|} \leq R^4$, por lo que $4R^{4|n|} \leq 4R^4$; además como $(\alpha + R^{2|n|})^2 > 0$, entonces $\frac{1}{(\alpha + R^{2|n|})^2} > 0$ y

$$\frac{4R^{4|n|}}{(\alpha + R^{2|n|})^2} \leq \frac{4R^4}{(\alpha + R^{2|n|})^2}, \quad \text{más aún } \alpha^2 \leq (\alpha + R^{2|n|})^2;$$

$$\text{lo cual implica que } \frac{1}{(\alpha + R^{2|n|})^2} \leq \frac{1}{\alpha^2}.$$

Por lo tanto $\frac{4R^{4|n|}}{(\alpha + R^{2|n|})^2} \leq \frac{4R^4}{\alpha^2}$, lo cual nos lleva a lo siguiente:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \left[\frac{4R^{4|n|}}{(\alpha + R^{2|n|})^2} \right] |\hat{f}_{(n)}|^2 |e^{in\theta}|^2 d\theta &\leq \int_0^{2\pi} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \left[\frac{4R^4}{\alpha^2} \right] |\hat{f}_{(n)}|^2 |e^{in\theta}|^2 d\theta \\ &\leq \left[\frac{4R^4}{\alpha^2} \right] \int_0^{2\pi} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} |\hat{f}_{(n)}|^2 d\theta = \frac{4R^4}{\alpha^2} \|f\|_{L^2(0,2\pi)}^2. \end{aligned}$$

De todo lo anterior concluimos que:

$$\begin{aligned} \|(\Lambda_{\varepsilon_R} - \Lambda_1)(f)\|_{L^2(0,2\pi)}^2 &\leq \frac{4R^4}{\alpha^2} \|f\|_{L^2(0,2\pi)}^2 \implies \|\Lambda_{\varepsilon_R} - \Lambda_1\|_{L^2(0,2\pi)}^2 \leq \frac{4R^4}{\alpha^2} \\ \implies \|\Lambda_{\varepsilon_R} - \Lambda_1\|_{L^2(0,2\pi)} &\leq \frac{2R^2}{\alpha} \implies \|\Lambda_{\varepsilon_R} - \Lambda_1\|_{L^2(0,2\pi)} \longrightarrow 0 \quad \text{si } R \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Sin embargo $\|\varepsilon_R - \varepsilon_1\|_{\infty} = \|\varepsilon_R - 1\|_{\infty} = \sup\{0, \hat{q}\} = \hat{q} \neq 0$.

Por lo tanto $\|\varepsilon_R - \varepsilon_1\|_{\infty} = \hat{q} \not\rightarrow 0$ cuando $R \longrightarrow 0$.

De lo anterior podemos concluir que el problema inverso es inestable y por lo tanto es mal planteado.

El análisis anterior nos permite asegurar que el problema de identificar ε a partir de los datos Λ_{ε} , es inestable, esto es; pequeños errores en los datos pueden producir errores grandes en la solución reconstruida.

Por otra parte, la discretización numérica del problema también puede conducir a desviaciones significativas en el cálculo de $\varepsilon_1(z)$, y en este caso se deben usar algoritmos de regularización. En esta tesis se propone un algoritmo que tomará en cuenta el mal planteamiento y la inestabilidad numérica en la solución del problema inverso.

1.5. Unicidad de la solución

Veamos ahora que la solución débil del problema de identificación de ε es única, en caso de existir.

Consideremos el problema con valor en la frontera:

$$\nabla \cdot (\varepsilon_k(z) \nabla V_k(z)) = 0, \quad \text{en } \Omega_k, \quad k = 1, 2. \quad (1.18)$$

$$V_1(z) = V_2(z), \quad \text{si } |z| = R_1; \quad (1.19)$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial \vec{n}_1}(z) = \varepsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial \vec{n}_1}(z), \quad \text{si } |z| = R_1; \quad (1.20)$$

$$V_2(z) = \phi(z), \quad \text{si } |z| = R_2. \quad (1.21)$$

Recordemos que a todo $\varepsilon(z)$ le corresponde un operador tipo Dirichlet-Neumann

$\Lambda_\varepsilon : H^{\frac{1}{2}}(|z| = R_2) \longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(|z| = R_2)$ que asocia a cada función $\phi(z)$ el valor de la derivada normal de la función $V(z)$ respecto al vector unitario normal \vec{n} .

$$\Lambda_\varepsilon(\phi) = \frac{\partial V}{\partial \vec{n}}(z), \quad (1.22)$$

donde $V \in H^1(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ y $|z| = R_2$.

Teorema 1.1 *Si los operadores Dirichlet-Neumann correspondientes a dos funciones continuas $\varepsilon(z)$ y $\varepsilon^*(z)$, coinciden para todas las posibles condiciones de frontera (1.21), y si el campo $\varepsilon(z) \nabla V(z)$ es irrotacional, entonces $\varepsilon(z) = \varepsilon^*(z)$ en $|z| \leq R_1$.*

Demostración:

Supongamos que tenemos el sistema para $\varepsilon(z)$ y $V(z)$:

$$\operatorname{div}(\varepsilon_1(z) \nabla V_1(z)) = 0, \quad \text{en } \Omega_1; \quad (1.23)$$

$$\Delta V_2(z) = 0, \quad \text{en } \Omega_2; \quad (1.24)$$

$$V_1(z) = V_2(z), \quad \text{si } |z| = R_1; \quad (1.25)$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial \vec{n}_1}(z) = \varepsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial \vec{n}_1}(z), \quad \text{si } |z| = R_1; \quad (1.26)$$

$$V_2(z) = \phi(z), \quad \text{si } |z| = R_2. \quad (1.27)$$

y el sistema para $\varepsilon^*(z)$ y $V^*(z)$:

$$\operatorname{div}(\varepsilon_1^*(z) \nabla V_1^*(z)) = 0, \quad \text{en } \Omega_1; \quad (1.28)$$

$$\Delta V_2^*(z) = 0, \quad \text{en } \Omega_2; \quad (1.29)$$

$$V_1^*(z) = V_2^*(z), \quad \text{si } |z| = R_1; \quad (1.30)$$

$$\varepsilon_1^* \frac{\partial V_1^*}{\partial \vec{n}_1}(z) = \varepsilon_2^* \frac{\partial V_2^*}{\partial \vec{n}_1}(z), \quad \text{si } |z| = R_1; \quad (1.31)$$

$$V_2^*(z) = \phi(z), \quad \text{si } |z| = R_2. \quad (1.32)$$

Si restamos (1.24) de (1.29) y (1.27) de (1.32) respectivamente, entonces para la función armónica $W_2 = V_2^* - V_2$ en $R_1 < |z| < R_2$, tenemos que $W_2(z) = \frac{\partial W_2}{\partial \vec{n}_2}(z) = 0$ en $|z| = R_2$.

Como consecuencia del teorema de continuación analítica para funciones armónicas, se sigue que $W_2 \equiv 0$, y por lo tanto $V_2^*(z) = V_2(z)$ en $R_1 < |z| < R_2$.

Entonces, de (1.25) y (1.30) podemos concluir que:

$$V_1(z) = V_1^*(z), \quad \text{en } |z| = R_1; \quad (1.33)$$

$$\varepsilon_1(z) \frac{\partial V_1}{\partial \vec{n}_1}(z) = \varepsilon_1^*(z) \frac{\partial V_1^*}{\partial \vec{n}_1}(z), \quad \text{en } |z| = R_1. \quad (1.34)$$

Recordemos que estamos suponiendo que $J = \varepsilon_1 \nabla V_1$ es irrotacional, lo cual en la práctica ocurre para los regímenes de flujo que se presenta en tuberías verticales en las que el flujo sube en forma de filamentos y no se presentan vórtices.

Por otro lado, como $\text{rot} J = 0$, entonces existe una función potencial u tal que $J = -\nabla u$ en Ω_1 .

Además:

$$\text{div}(J) = \Delta u \quad \text{y} \quad \nabla u = \varepsilon \nabla V \quad \implies \quad \nabla u \cdot \vec{n}_1 = \varepsilon \nabla V \cdot \vec{n}_1 \quad \implies \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_1} = \varepsilon \frac{\partial V}{\partial \vec{n}_1}$$

Por lo anterior se obtiene el problema de contorno siguiente:

$$\Delta u = 0, \quad \text{en } |z| < R_1; \quad (1.35)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}_1} = \varepsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial \vec{n}_1}, \quad \text{en } |z| = R_1. \quad (1.36)$$

En [1] se encuentra la solución del problema de contorno (1.35) - (1.36) que es

$$u(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{|\xi|=R_1} \varepsilon_1(\xi) \frac{\partial V_1}{\partial \vec{n}_1}(\xi) \nabla \ln |\xi - z| ds_\xi. \quad (1.37)$$

Aplicando la fórmula de Green a las funciones V_1 y V_1^* , y para la función de Green $d(z, \xi)$ correspondiente al problema de Dirichlet para el operador de Laplace en $|z| < R_1$, se obtiene la siguiente relación:

$$V(z) = \int_{|\xi| < R_1} (1 - \varepsilon(\xi)) \nabla V(\xi) \nabla_\xi d(z, \xi) d\xi - \int_{|\xi|=R_1} V(\xi) \frac{\partial d}{\partial \vec{n}_1}(z, \xi) ds_\xi; \quad (1.38)$$

la cual es válida para los pares (V_1, ξ_1) y (V_1^*, ξ_1^*) . Usando estas dos relaciones, una para cada par, y (1.28), se obtiene la siguiente igualdad.

$$W_1(z) = \int_{|\xi| < R_1} \nabla W_1(\xi) \nabla_\xi d(z, \xi) d\xi; \quad (1.39)$$

para $|z| < R_1$, donde $W_1 = V_1^* - V_1$.

De (1.33), concluimos que $W_1(z)$ es armónica en $|z| < R_1$, y, dado que $W_1(z) = 0$ en $|z| = R_1$, entonces $W_1(z) = 0$ en $|z| < R_1$, lo cual nos lleva a la conclusión de que $V_1 = V_1^*$.

Pero entonces, restando convenientemente las ecuaciones (1.23) y (1.28), así como las condiciones de frontera (1.26) y (1.31), obtenemos

$$\nabla (|\varepsilon_1(z) - \varepsilon_1^*(z)| |\nabla V_1|) = 0, \quad \text{en } |z| < R_1; \quad (1.40)$$

$$|\varepsilon_1(z) - \varepsilon_1^*(z)| \frac{\partial V_1}{\partial \vec{n}_1}(z) = 0, \quad \text{en } |z| = R_1. \quad (1.41)$$

Por la fórmula de Green, concluimos que $|\varepsilon_1(z) - \varepsilon_1^*(z)| |\nabla V_1|^2 = 0$ en $|z| < R_1$. Así que $V_1(z)$ debe ser constante en el conjunto abierto W de $|z| < R_1$, compuesto por los puntos donde $\varepsilon_1(z) \neq \varepsilon_1^*(z)$, independientemente del valor de la condición de frontera $\phi(z)$ en (1.27). Esto no puede pasar excepto si W es el conjunto vacío, es decir $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_1^*$. ■

Capítulo 2

Justificación teórica de la solución

Como las permitividades ε_3 y ε_2 se conocen en Ω_3 y Ω_2 respectivamente, entonces en esas regiones primero encontraremos $V_3^{(i)}$ y $V_2^{(i)}$ a partir de los datos de contorno, para posteriormente hallar a ε_1 en Ω_1 .

2.1. Cálculo de $V_3^{(i)}$

Debido a que el problema de hallar $V_3^{(i)}$ se puede desacoplar del sistema (1.4)- (1.8), primero hallaremos una expresión para $V_3^{(i)}$ en Ω_3 .

Supondremos que hay N electrodos S_i , $i = 1, \dots, N$ de igual longitud y equidistribuidos sobre la circunferencia $|z| = R_2$, con una separación angular $\theta_0 > 0$ entre cada par de electrodos adyacentes; por ello se puede escribir:

$$S_i = \left\{ r e^{\sqrt{-1}\theta}, \quad \theta_i^{(-)} \leq \theta \leq \theta_i^{(+)} \right\}, \quad (2.1)$$

$$\text{donde } \theta_i^{(-)} = \frac{2\pi(i-1)}{N} + \frac{\theta_0}{2} \quad \text{y} \quad \theta_i^{(+)} = \frac{2\pi i}{N} - \frac{\theta_0}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Si suponemos que el potencial en cada electrodo tiene un “decaimiento lineal”, podemos definir a la función del potencial en $|z| = R_2$:

$$\psi_{\theta_0}^{(i)}(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{si } \theta \leq \theta_i^{(-)} - \theta_0; \\ \frac{\theta - \theta_i^{(-)}}{\theta_0} + 1, & \text{si } \theta_i^{(-)} - \theta_0 \leq \theta \leq \theta_i^{(-)}; \\ 1, & \text{si } \theta_i^{(-)} \leq \theta \leq \theta_i^{(+)}; \\ \frac{\theta_i^{(+)} - \theta}{\theta_0} + 1, & \text{si } \theta_i^{(+)} \leq \theta \leq \theta_i^{(+)} + \theta_0; \\ 0, & \text{si } \theta \geq \theta_i^{(+)} + \theta_0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Debido a que buscaremos a la función $V_3^{(i)}$ en su forma de serie de Fourier, entonces representamos a $\psi_{\theta_0}^{(i)}(\theta)$ como un desarrollo en serie de Fourier de la forma:

$$\psi_{\theta_0}^{(i)}(\theta) = \frac{A_0^{(i)}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ A_k^{(i)}(\theta_0) \cos k\theta + B_k^{(i)}(\theta_0) \text{sen } k\theta \right\},$$

donde

$$A_k^{(i)}(\theta_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi_{\theta_0}^{(i)}(\theta) \cos k\theta d\theta, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$B_k^{(i)}(\theta_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi_{\theta_0}^{(i)}(\theta) \sen k\theta d\theta, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Al sustituir los valores de $\psi_{\theta_0}^{(i)}(\theta)$ podemos calcular explícitamente sus coeficientes de Fourier:

$$A_0^{(i)}(\theta_0) = \frac{\theta_i^{(+)} - \theta_i^{(-)} + \theta_0}{\pi} = \frac{2}{N}. \quad (2.3)$$

Además:

$$\begin{aligned} A_k^{(i)}(\theta_0) &= \frac{1}{\pi} \int_{\theta_i^{(-)} - \theta_0}^{\theta_i^{(-)}} \left(\frac{\theta - \theta_i^{(-)}}{\theta_0} + 1 \right) \cos k\theta d\theta + \frac{1}{\pi} \int_{\theta_i^{(-)}}^{\theta_i^{(+)}} \cos k\theta d\theta \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{\theta_i^{(+)}}^{\theta_i^{(+)} + \theta_0} \left(\frac{\theta_i^{(+)} - \theta}{\theta_0} + 1 \right) \cos k\theta d\theta \\ &= \frac{1}{k\pi} \left(\frac{\theta - \theta_i^{(-)}}{\theta_0} + 1 \right) \sen k\theta \Big|_{\theta_i^{(-)} - \theta_0}^{\theta_i^{(-)}} + \frac{1}{k\pi} \sen k\theta \Big|_{\theta_i^{(-)}}^{\theta_i^{(+)}} + \frac{1}{k\pi} \left(\frac{\theta_i^{(+)} - \theta}{\theta_0} + 1 \right) \sen k\theta \Big|_{\theta_i^{(+)}}^{\theta_i^{(+)} + \theta_0} \\ &- \frac{1}{k\pi\theta_0} \int_{\theta_i^{(-)} - \theta_0}^{\theta_i^{(-)}} \sen k\theta d\theta + \frac{1}{k\pi\theta_0} \int_{\theta_i^{(+)}}^{\theta_i^{(+)} + \theta_0} \sen k\theta d\theta \\ &= \frac{1}{k^2\pi\theta_0} \left[\left(\cos k\theta_i^{(-)} - \cos k \left(\theta_i^{(-)} - \theta_0 \right) \right) + \left(\cos k\theta_i^{(+)} - \cos k \left(\theta_i^{(+)} + \theta_0 \right) \right) \right] \\ &= \frac{1}{k^2\pi\epsilon} \operatorname{Re} \left[e^{\sqrt{-1}k\theta_i^{(-)}} \left(1 - e^{-\sqrt{-1}k\theta_0} \right) + e^{\sqrt{-1}k\theta_i^{(+)}} \left(1 - e^{\sqrt{-1}k\theta_0} \right) \right] \\ &= \frac{2 \sen \frac{k\theta_0}{2}}{k^2\pi\theta_0} \operatorname{Re} i \left[e^{\sqrt{-1}k \left(\theta_i^{(-)} - \frac{\theta_0}{2} \right)} - e^{\sqrt{-1}k \left(\theta_i^{(+)} - \frac{\theta_0}{2} \right)} \right] \\ &= \frac{2 \sen \frac{k\theta_0}{2}}{k^2\pi\theta_0} \left(\sen k \left(\theta_i^{(+)} + \frac{\theta_0}{2} \right) - \sen k \left(\theta_i^{(-)} - \frac{\theta_0}{2} \right) \right) \\ &= \frac{2 \sen \frac{k\theta_0}{2}}{k^2\pi\theta_0} \left(\sen \frac{2\pi ik}{N} - \sen \frac{2\pi(i-1)k}{N} \right) = \frac{2\beta_k^{(i)} \sen \frac{k\theta_0}{2}}{k^2\pi\theta_0}. \end{aligned}$$

Luego,

$$A_k^{(i)}(\theta_0) = \frac{2\beta_k^{(i)} \operatorname{sen} \frac{k\theta_0}{2}}{k^2\pi\theta_0}. \quad (2.4)$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} B_k^{(i)}(\theta_0) &= \frac{1}{\pi} \int_{\theta_i^{(-)} - \theta_0}^{\theta_i^{(-)}} \left(\frac{\theta - \theta_i^{(-)}}{\theta_0} + 1 \right) \operatorname{sen} k\theta \, d\theta + \frac{1}{\pi} \int_{\theta_i^{(-)}}^{\theta_i^{(+)}} \operatorname{sen} k\theta \, d\theta \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{\theta_i^{(+)}}^{\theta_i^{(+)} + \theta_0} \left(\frac{\theta_i^{(+)} - \theta}{\theta_0} + 1 \right) \operatorname{sen} k\theta \, d\theta \\ &= -\frac{1}{k\pi} \left(\frac{\theta - \theta_i^{(-)}}{\theta_0} + 1 \right) \cos k\theta \Big|_{\theta_i^{(-)} - \theta_0}^{\theta_i^{(-)}} - \frac{1}{k\pi} \cos k\theta \Big|_{\theta_i^{(-)}}^{\theta_i^{(+)}} \\ &- \frac{1}{k\pi} \left(\frac{\theta_i^{(+)} - \theta}{\theta_0} + 1 \right) \cos k\theta \Big|_{\theta_i^{(+)}}^{\theta_i^{(+)} + \theta_0} + \frac{1}{k\pi\theta_0} \int_{\theta_i^{(-)} - \theta_0}^{\theta_i^{(-)}} \cos k\theta \, d\theta - \frac{1}{k\pi\theta_0} \int_{\theta_i^{(+)}}^{\theta_i^{(+)} + \theta_0} \cos k\theta \, d\theta \\ &= \frac{1}{k^2\pi\theta_0} \left[\left(\operatorname{sen} k\theta_i^{(-)} - \operatorname{sen} k \left(\theta_i^{(-)} - \theta_0 \right) \right) + \left(\operatorname{sen} k\theta_i^{(+)} - \left(\theta_i^{(+)} + \theta_0 \right) \right) \right] \\ &= \frac{1}{k^2\pi\theta_0} \operatorname{Im} \left[e^{\sqrt{-1}k\theta_i^{(-)}} \left(1 - e^{-\sqrt{-1}k\theta_0} \right) + e^{\sqrt{-1}k\theta_i^{(+)}} \left(1 - e^{\sqrt{-1}k\theta_0} \right) \right] \\ &= \frac{2 \operatorname{sen} \frac{k\theta_0}{2}}{k^2\pi\theta_0} \operatorname{Im} \left[e^{\sqrt{-1}k \left(\theta_i^{(-)} - \frac{\theta_0}{2} \right)} - e^{\sqrt{-1}k \left(\theta_i^{(+)} + \frac{\theta_0}{2} \right)} \right] \\ &= \frac{2 \operatorname{sen} \frac{k\theta_0}{2}}{k^2\pi\theta_0} \left(\cos k \left(\theta_i^{(-)} - \frac{\theta_0}{2} \right) - \left(\theta_i^{(+)} - \frac{\theta_0}{2} \right) \right) \\ &= \frac{2 \operatorname{sen} \frac{k\theta_0}{2}}{k^2\pi\theta_0} \left(\cos \frac{2\pi(i-1)k}{N} - \cos \frac{2\pi ik}{N} \right) = \frac{2\alpha_k^{(i)} \operatorname{sen} \frac{k\theta_0}{2}}{k^2\pi\theta_0}. \end{aligned}$$

Luego:

$$B_k^{(i)}(\theta_0) = \frac{2\alpha_k^{(i)} \operatorname{sen} \frac{k\theta_0}{2}}{k^2\pi\theta_0}. \quad (2.5)$$

Por lo tanto, de (2.3), (2.4) y (2.5) el desarrollo en serie de Fourier de $\psi_{\theta_0}^{(i)}(\theta)$ es:

$$\psi_{\theta_0}^{(i)}(\theta) = \frac{2}{N} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{2\beta_k^{(i)} \operatorname{sen} \frac{k\theta_0}{2}}{k^2\pi\theta_0} \cos k\theta + \frac{2\alpha_k^{(i)} \operatorname{sen} \frac{k\theta_0}{2}}{k^2\pi\theta_0} \operatorname{sen} k\theta \right\}, \quad (2.6)$$

donde

$$\beta_k^{(i)} = \operatorname{sen} \frac{2k\pi i}{N} - \operatorname{sen} \frac{2\pi(i-1)k}{N} \quad \text{y}$$

$$\alpha_k^{(i)} = \cos \frac{2\pi(i-1)k}{N} - \cos \frac{2k\pi i}{N}.$$

A partir del conocimiento de $\psi_{\theta_0}^{(i)}(\theta)$, ahora resolveremos el problema de contorno:

$$\Delta V_3^{(i)}(z) = 0 \quad \text{en} \quad \Omega_3. \quad (2.7)$$

$$V_3^{(i)}(r, \theta) = \begin{cases} 0, & \text{si } r = R_3; \\ \psi_{\theta_0}^{(i)}(\theta), & \text{si } r = R_2. \end{cases} \quad (2.8)$$

Debido a que $V_3^{(i)}$ satisface $\Delta V_3^{(i)} = 0$ en Ω_3 , entonces buscamos a la función armónica $V_3^{(i)}(r, \theta)$ en el anillo $R_2 < r < R_3$ en la forma

$$V_3^{(i)}(r, \theta) = a_0^{(i)} + b_0^{(i)} \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(a_k^{(i)} r^k + b_k^{(i)} r^{-k} \right) \cos k\theta + \left(c_k^{(i)} r^k + d_k^{(i)} r^{-k} \right) \text{sen } k\theta \right\} \quad (2.9)$$

que además cumpla las condiciones de contorno (2.8).

Por lo anterior en las fronteras $|z| = R_2$ y $|z| = R_3$ deben cumplirse las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} a_0^{(i)} + b_0^{(i)} \ln R_3 &= 0; \\ a_0^{(i)} + b_0^{(i)} \ln R_2 &= \frac{1}{N}; \\ a_k^{(i)} R_3^k + b_k^{(i)} R_3^{-k} &= 0; \\ a_k^{(i)} R_2^k + b_k^{(i)} R_2^{-k} &= \frac{2\beta_k^{(i)} \text{sen } \frac{k\theta_0}{2}}{k^2 \pi \theta_0}; \\ c_k^{(i)} R_3^k + d_k^{(i)} R_3^{-k} &= 0; \\ c_k^{(i)} R_2^k + d_k^{(i)} R_2^{-k} &= \frac{2\alpha_k^{(i)} \text{sen } \frac{k\theta_0}{2}}{k^2 \pi \theta_0}; \end{aligned}$$

Se tiene así un sistema de 6 ecuaciones con 6 incógnitas que al resolverlo se obtiene:

$$\begin{aligned} a_0^{(i)} &= \frac{1}{N} \frac{\ln R_3}{\ln \frac{R_3}{R_2}}, & b_0^{(i)} &= \frac{1}{N \ln \frac{R_2}{R_3}}, \\ a_k^{(i)} &= \frac{-2}{k^2 \pi \theta_0} \text{sen } \frac{k\theta_0}{2} \frac{R_2^k}{R_3^{2k} - R_2^{2k}} \beta_k^{(i)}, \\ b_k^{(i)} &= \frac{2}{k^2 \pi \theta_0} \text{sen } \frac{k\theta_0}{2} \frac{R_2^k R_3^{2k}}{R_3^{2k} - R_2^{2k}} \beta_k^{(i)}, \\ c_k^{(i)} &= \frac{-2}{k^2 \pi \theta_0} \text{sen } \frac{k\theta_0}{2} \frac{R_2^k}{R_3^{2k} - R_2^{2k}} \alpha_k^{(i)}, \end{aligned}$$

$$d_k^{(i)} = \frac{2}{k^2 \pi \theta_0} \operatorname{sen} \frac{k \theta_0}{2} \frac{R_2^k R_3^{2k}}{R_3^{2k} - R_2^{2k}} \alpha_k^{(i)}.$$

Al sustituir los coeficientes en la ecuación (2.9) se llega a una expresión para $V_3^{(i)}(r, \theta)$.

2.2. Obtención de relaciones para hallar ε_1

Hasta ahora, se ha obtenido una expresión para $V_3^{(i)}(\theta)$; por lo tanto, nos falta resolver el problema:

$$\operatorname{div} \left(\varepsilon_1(z) \nabla V_1^{(i)}(z) \right) = 0, \quad \text{si } z \in \Omega_1; \quad (2.10)$$

$$\Delta V_2^{(i)}(z) = 0, \quad \text{si } z \in \Omega_2; \quad (2.11)$$

$$V_1^{(i)}(z) = V_2^{(i)}(z), \quad \text{si } |z| = R_1; \quad (2.12)$$

$$V_2^{(i)}(z) = V_3^{(i)}(z), \quad \text{si } |z| = R_2; \quad (2.13)$$

$$\varepsilon_1(z) \frac{\partial V_1^{(i)}}{\partial \vec{n}_1}(z) = \varepsilon_2(z) \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial \vec{n}_1}(z), \quad \text{si } |z| = R_1; \quad (2.14)$$

donde los únicos valores conocidos, son $\varepsilon_2(z)$ en Ω_2 , y $V_2^{(i)}(z)$ si $|z| = R_2$.

Por lo anterior, y debido a que no se puede desacoplar un problema para $V_2^{(i)}(z)$ o para $V_1^{(i)}(z)$, debemos buscar relaciones entre las funciones desconocidas $V_1^{(i)}(z)$, $V_2^{(i)}(z)$ y ε_1 que nos permitan obtener a ε_1 a partir de los datos $C_{i,j}$, $i, j = 1, 2, \dots, N$, ($i < j$) dados en (1.2).

Clasificaremos las relaciones en dos tipos diferentes:

Tipo I: Aquellas que nos permitan obtener las condiciones en la frontera (2.12) y (2.14) a partir de $V_3^{(i)}$ y de los datos $C_{i,j}$; y que además podamos asegurar que $V_2^{(i)}$ y $\frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial \vec{n}}$ son la restricción y la derivada normal, respectivamente, de una función armónica en Ω_2 que satisface la condición de frontera (2.13) en $|\xi| = R_2$.

Tipo II: Aquellas que nos permitan obtener $V_1^{(i)}$ y ε_1 a partir de la minimización de un funcional de tal forma que se satisfaga la ecuación (2.10) en Ω_1 y las condiciones de frontera (2.12) y (2.14) tomando en cuenta la información a priori que se tiene de $\varepsilon_1(z)$.

Relaciones de Tipo I:

Sea V_2 una función armónica en Ω_2 que se prolonga continuamente en la frontera de Ω_2 , excepto a lo sumo en un número finito de puntos donde admite discontinuidades en forma de salto finito. Entonces se cumple:

$$V \Delta V_2^{(i)} = 0, \quad \text{en } \Omega_2 \quad \text{y} \quad V_2^{(i)} \Delta V = 0, \quad \text{en } \Omega_2.$$

Como $f \operatorname{div}(F) = \operatorname{div}(fF) - F \cdot \nabla f$, entonces:

$$0 = \int_{\Omega_2} V \Delta V_2^{(i)} dx = \int_{\Omega_2} V \operatorname{div}(\nabla V_2^{(i)}) dx = \int_{\Omega_2} \operatorname{div} \left(V \nabla V_2^{(i)} \right) dx - \int_{\Omega_2} \nabla V_2^{(i)} \cdot \nabla V dx.$$

Además:

$$0 = \int_{\Omega_2} V_2^{(i)} \Delta V dx = \int_{\Omega_2} V_2^{(i)} \operatorname{div}(\nabla V) dx = \int_{\Omega_2} \operatorname{div} \left(V_2^{(i)} \nabla V \right) dx - \int_{\Omega_2} \nabla V \cdot \nabla V_2^{(i)} dx.$$

Por el teorema de la divergencia se cumple:

$$0 = \int_{\partial\Omega_2} V \nabla V_2^{(i)} \cdot \vec{n} ds - \int_{\Omega_2} \nabla V_2^{(i)} \cdot \nabla V dx; \quad (2.15)$$

$$y \quad 0 = \int_{\partial\Omega_2} V_2^{(i)} \nabla V \cdot \vec{n} ds - \int_{\Omega_2} \nabla V \cdot \nabla V_2^{(i)} dx. \quad (2.16)$$

Si restamos (2.15) de (2.16) se obtiene:

$$\int_{\partial\Omega_2} V_2^{(i)} \nabla V \cdot \vec{n} ds - \int_{\partial\Omega_2} V \cdot \nabla V_2^{(i)} \cdot \vec{n} ds = 0. \quad (2.17)$$

Debido a que

$$\partial\Omega_2 = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| = R_1\} \cup \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| = R_2\}$$

y $\nabla F \cdot \vec{n} = \frac{\partial F}{\partial \vec{n}}$ entonces la ecuación (2.17) se puede escribir:

$$\int_{|\xi|=R_2} V_2^{(i)} \frac{\partial V}{\partial \vec{n}_2} ds_\xi + \int_{|\xi|=R_1} V_2^{(i)} \frac{\partial V}{\partial \vec{n}_1} ds_\xi - \int_{|\xi|=R_2} V \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial \vec{n}_2} ds_\xi - \int_{|\xi|=R_1} V \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial \vec{n}_1} ds_\xi = 0.$$

Así

$$\int_{|\xi|=R_2} \left(V_2^{(i)} \frac{\partial V}{\partial \vec{n}_2} - V \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial \vec{n}_2} \right) ds_\xi + \int_{|\xi|=R_1} \left(V \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial \vec{n}_1} - V_2^{(i)} \frac{\partial V}{\partial \vec{n}_1} \right) ds_\xi = 0.$$

Por lo tanto

$$\int_{|\xi|=R_2} \left(V_2^{(i)} \frac{\partial V}{\partial \vec{n}_2} - V \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial \vec{n}_2} \right) ds_\xi = \int_{|\xi|=R_1} \left(V_2^{(i)} \frac{\partial V}{\partial \vec{n}_1} - V \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial \vec{n}_1} \right) ds_\xi. \quad (2.18)$$

Por otra parte definamos $\overline{G}(z, \xi)$ como la función de Green, (ver A.11 en la página 53), en Ω_2 que satisface:

$$\Delta \overline{G}(z, \xi) = \delta(z - \xi); \quad \text{para } z, \xi \in \Omega_2; \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \overline{G}}{\partial \vec{n}_1}(z, \xi) = 0 \quad \text{en } |z| = R_1, \quad \xi \in \Omega_2; \quad (2.20)$$

$$\overline{G}(z, \xi) = 0 \quad \text{en } |z| = R_2, \quad \xi \in \Omega_2; \quad (2.21)$$

donde $\delta(z - \xi)$ es la delta de Dirac con soporte en $z = \xi$.

Aplicando la segunda identidad de Green, (ver A.10 en la página 53), para las funciones $\overline{G}(z, \xi)$ y $V_2^{(i)}(z)$ se tiene:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_2} (\overline{G}(z, \xi) \Delta V_2(z) - V_2(z) \Delta \overline{G}(z, \xi)) dz = \\ & \int_{\partial\Omega_2} G(z, \xi) \frac{\partial V_2}{\partial \vec{n}}(z) ds_z - \int_{\partial\Omega_2} V_2(z) \frac{\partial \overline{G}}{\partial \vec{n}_2}(z, \xi) ds_z - \int_{\Omega_2} V_2(z) \delta(z - \xi) dz \\ & = \int_{|z|=R_2} \overline{G} \frac{\partial V_2}{\partial \vec{n}_2} ds - \int_{|z|=R_1} \overline{G}(z, \xi) \frac{\partial V_2}{\partial \vec{n}_1}(z) ds_z - \int_{|z|=R_2} V_2(z) \frac{\partial \overline{G}}{\partial \vec{n}_2}(z, \xi) ds_z + \int_{|z|=R_1} \frac{\partial V_2}{\partial \vec{n}_1}(z). \end{aligned}$$

Luego

$$V_2^{(i)}(\xi) = \int_{|z|=R_1} \overline{G}(z, \xi) \frac{\partial V_2}{\partial \vec{n}_1}(z) ds_z + \int_{|z|=R_2} V_2(z) \frac{\partial \overline{G}}{\partial \vec{n}_2}(z, \xi) ds_z; \quad (2.22)$$

donde $\xi \in \Omega_2$ y $z \in \partial\Omega_2$.

Recordemos que $\overline{G}(z, \xi)$ es de la forma:

$$\overline{G}(z, \xi) = \frac{1}{2\pi} \ln|z - \xi| + h(z, \xi);$$

donde $h(z, \xi)$ es armónica en Ω_2 y se elige de forma que se satisfagan las condiciones de contorno (2.20) y (2.21).

Así, si se hace tender ξ a z_0 donde $|z_0| = R_1$, entonces $\overline{G}(z, \xi)$ tendrá una singularidad logarítmica solamente en la integral sobre $|z| = R_1$; y por lo tanto esta integral existe en sentido de valor principal, (ver A.13 y 10 en la página 56), cuando $\xi \rightarrow z_0$, para $|z_0| = R_1$.

Finalmente de (2.22) se obtiene lo siguiente:

$$V_2^{(i)}(z_0) = \int_{|z|=R_1} \overline{G}(z, z_0) \frac{\partial V_2}{\partial \vec{n}_1}(z) ds_z + \int_{|z|=R_2} V_2(z) \frac{\partial \overline{G}}{\partial \vec{n}_2}(z, z_0) ds_z; \quad (2.23)$$

para $|z_0| = R_1$.

Notemos que (2.23) describe la relación que debe existir entre los valores en la frontera de una función armónica en Ω_2 y su derivada normal sobre $|z| = R_1$, si en $|z| = R_2$ satisface la condición de contorno (2.13).

Relaciones de tipo II

Ahora, para encontrar la relación entre ε_1 , $\nabla V_1^{(i)}(z)$ y $V_1(z)$ consideraremos el problema de contorno

$$\nabla(\varepsilon_1(z) \nabla V_1^{(i)}) = 0, \quad |z| < R_1;$$

$$\varepsilon_1(z) \frac{\partial V_1^{(i)}}{\partial \bar{n}_1}(z) = \Psi(z), \quad |z| = R_1.$$

con $\int_{|\xi|=R_1} \Psi ds = 0$. Haciendo el cambio de variable

$$\varepsilon_1(z) \nabla V_1^{(i)}(z) = \nabla u^{(i)}(z), \quad (2.24)$$

se tiene que $u^{(i)}$ satisface el problema de contorno

$$\begin{aligned} \Delta u^{(i)}(z) &= 0, & |z| < R_1; \\ \frac{\partial u^{(i)}}{\partial n_1}(z) &= \Psi(z), & |z| = R_1; \end{aligned}$$

cuya solución esta dada por

$$u^{(i)}(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{|\xi|=R_1} \Psi(\xi) \ln|\xi - z| ds_\xi + c. \quad (2.25)$$

con $|z| < R_1$ y c es constante.

Si hacemos $z = (x, y)$, $\xi = R_1 e^{i\tau}$, podemos calcular $\frac{\partial u^{(i)}}{\partial x}$ y $\frac{\partial u^{(i)}}{\partial y}$ a partir de (2.25), y como se cumple que

$$\frac{\partial u^{(i)}}{\partial x} = \varepsilon_1(z) \frac{\partial V_1^{(i)}}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u^{(i)}}{\partial y} = \varepsilon_1(z) \frac{\partial V_1^{(i)}}{\partial y}.$$

Así por la condición de contorno (2.14) se tiene que :

$$\varepsilon_1(z) \frac{\partial V_1^{(i)}}{\partial x} = -\frac{\varepsilon_2}{\pi} \int_{|\xi|=R_1} \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial \bar{n}_1}(\xi) \frac{x - R_1 \cos \tau}{|\xi - z|^2} ds_\xi, \quad (2.26)$$

$$\varepsilon_1(z) \frac{\partial V_1^{(i)}}{\partial y} = -\frac{\varepsilon_2}{\pi} \int_{|\xi|=R_1} \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial \bar{n}_1}(\xi) \frac{y - R_1 \sin \tau}{|\xi - z|^2} ds_\xi, \quad (2.27)$$

donde $ds_\xi = R_1 d\tau$.

De las ecuaciones (2.26), (2.27) y (2.24) se tiene la forma vectorial equivalente:

$$\varepsilon_1(z) \nabla V_1^{(i)}(z) = -\frac{\varepsilon_2}{\pi} \int_{|\xi|=R_1} \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial \bar{n}_1}(\xi) \nabla_z \ln|\xi - z| ds_\xi, \quad \text{para } |z| < R_1. \quad (2.28)$$

Nuestro objetivo ahora es encontrar dos relaciones integrales para $V_1^{(i)}$ en términos de la función $\frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial \bar{n}_1}(\xi)$, $|\xi| = R_1$ y que sean equivalentes al hecho de que $V_1^{(i)}$ satisface la ecuación

$$\operatorname{div} \left(\varepsilon_1(z) \nabla V_1^{(i)}(z) \right) = 0, \quad \text{en } |z| < R_1,$$

y las condiciones de contorno (2.12) y (2.14).

Notemos que si aplicamos la fórmula de Green a la función $V_1^{(i)}$ y a cualquier función $W \in C^2(\Omega_1)$ se tiene:

$$\begin{aligned} & \int_{|\xi| < R_1} \left\{ -W \nabla \left(\varepsilon_1(\xi) \nabla V_1^{(i)} \right) + V_1^{(i)} \Delta W \right\} d\xi = \\ & = \int_{|\xi| < R_1} (\xi_1 - 1) \nabla V_1^{(i)} \nabla W d\xi - \int_{|\xi| = R_1} \left\{ W \varepsilon_1 \frac{\partial V_1^{(i)}}{\partial \vec{n}_1}(\xi) - V_1^{(i)} \frac{\partial W}{\partial \vec{n}_1} \right\} d\xi. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Consideremos las funciones de Green $d(\xi, z)$ y $n(\xi, z)$ correspondientes a los problemas de Dirichlet y Neumann en el círculo $|\xi| < R_1$, es decir:

$$\begin{aligned} \Delta d(z, \xi) &= \delta(z - \xi), & \text{en } |\xi| < R_1; \\ d(z, \xi) &= 0, & \text{en } |z| = R_1; \\ \Delta n(z, \xi) &= \delta(z - \xi), & \text{en } |\xi| < R_1; \\ \frac{\partial n}{\partial \vec{n}_1}(z, \xi) &= \frac{1}{2\pi R_1}, & \text{en } |z| = R_1. \end{aligned}$$

Se sabe que si $z = re^{it}$, $\xi = \rho e^{i\tau}$, entonces

$$\begin{aligned} d(z, \xi) &= -\frac{1}{4\pi} \ln \left(\frac{R_1^2 - 2\rho r \cos(t - \tau) + \rho^2 r^2 R_1^{-2}}{r^2 - 2\rho r \cos(t - \tau) + \rho^2} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\ln(r^2 - 2\rho r \cos(t - \tau) + \rho^2) \right. \\ & \quad \left. - \ln(R_1^2 - 2\rho r \cos(t - \tau) + \rho^2 r^2 R_1^{-2}) \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta(z, \xi) &= \frac{1}{2\pi} \ln(r^2 - 2\rho r \cos(t - \tau) + \rho^2) \\ & \quad + \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{R_1^4}{\rho^2} - 2\frac{R_1^2 r}{\rho} \cos(t - \tau) + r^2 \right) - \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{R_1}{\rho} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\ln(r^2 - 2\rho r \cos(t - \tau) + \rho^2) \right. \\ & \quad \left. + \ln(R_1^2 - 2\rho r \cos(t - \tau) + \rho^2 r^2 R_1^2) \right], \end{aligned}$$

y además $\eta(z, \xi) = \frac{1}{\pi} \ln|z - \xi|$ si $|\xi| = R_1$.

Si aplicamos la fórmula de Green a la función $V_1^{(i)}$ y las funciones de Green $d(z, \xi)$ y $\eta(z, \xi)$ respectivamente en $|z| = R_1$, tenemos que de acuerdo a la ecuación (2.29) se obtienen:

$$\begin{aligned}
V_1^{(i)}(z) &= \int_{|\xi| < R_1} (\xi_1 - 1) \nabla V_1^{(i)}(\xi) \nabla_\xi d(z, \xi) d\xi \\
&+ \int_{|\xi| = R_1} V_2^{(i)}(\xi) \frac{\partial d}{\partial \vec{n}_1}(z, \xi) ds_\xi,
\end{aligned} \tag{2.30}$$

$$\begin{aligned}
V_1^{(i)}(z) &= \int_{|\xi| < R_1} (\xi_1 - 1) \nabla V_1^{(i)}(\xi) \nabla_\xi \eta(z, \xi) ds_\xi \\
&- \varepsilon_2 \int_{|\xi| = R_1} \eta(z, \xi) \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial \vec{n}_1}(\xi) ds_\xi + \frac{1}{2\pi R_1} \int_{|\xi| = R_1} V_2^{(i)}(\xi) ds_\xi,
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Si en (2.30) y (2.31) sustituimos el término $\varepsilon_1 \nabla V_1^{(i)}(\xi)$ dado en (2.28), obtenemos una expresión para $V_2^{(i)}(\xi)$ en función de $\frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial \vec{n}_1}(\xi)$. Utilizando la relación (2.23) se obtiene finalmente para $|\xi| = R$.

$$\begin{aligned}
-V_1^{(i)}(z) &= \int_{|\xi| < R_1} \nabla V_1^{(i)}(\xi) \cdot \nabla_\xi d(z, \xi) d\xi \\
&+ \int_{|\psi| = R_1} \left\{ \frac{\varepsilon_2}{\pi} \int_{|\xi| < R_1} \nabla_\xi \ln|\xi - \varphi| \cdot \nabla_\xi d(z, \xi) d\xi \right. \\
&- \left. \int_{|\psi| = R_1} N(\psi, \varphi) \frac{\partial d}{\partial \vec{n}_\psi}(z, \psi) ds_\psi \right\} \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial \vec{n}_1}(\varphi) ds_\varphi \\
&- \int_{S_i} \left\{ \int_{|\psi| = R_1} \frac{\partial d(z, \psi)}{\partial \vec{n}_\psi} \frac{\partial N}{\partial \vec{n}_{\xi_1}}(\psi, \xi_1) dS_\psi \right\} dS_{\xi_1}
\end{aligned} \tag{2.32}$$

$$\begin{aligned}
 -V_1^{(i)}(z) &= \int_{|\xi| < R_1} \nabla V_1^{(i)}(\xi) \cdot \nabla_\xi \eta(z, \xi) d\xi \\
 &+ \int_{|\varphi|=R_1} \left\{ \frac{\varepsilon_2}{\pi} \int_{|\xi| < R_1} \nabla_\xi \ln|\xi - \varphi| \cdot \nabla_\xi \eta(z, \xi) d\xi + \varepsilon_2 \eta(z, \varphi) \right. \\
 &- \left. \frac{1}{2\pi R_1} \int_{|\psi|=R_1} N(\psi, \varphi) dS_\psi \right\} \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial \vec{n}_1}(\varphi) dS_\varphi \\
 &- \frac{1}{2\pi R_1} \int_{S_i} \left\{ \int_{|\psi|=R_1} \frac{\partial N}{\partial \vec{n}_{\xi_1}}(\psi, \xi_1) dS_\psi \right\} dS_{\xi_1}. \tag{2.33}
 \end{aligned}$$

Las relaciones (2.32) y (2.33) se escriben en la forma

$$-V_1^{(i)}(z) = \int_{|\xi| < R_1} \nabla V_1^{(i)}(\xi) \nabla_\xi d(z, \xi) d\xi + \int_{|\varphi|=R_1} F(z, \varphi) \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial n_1}(\varphi) dS_\varphi + h_i(z) \tag{2.34}$$

$$-V_1^{(i)}(z) = \int_{|\xi| < R_1} \nabla V_1^{(i)}(\xi) \nabla_\xi \eta(z, \xi) d\xi + \int_{|\varphi|=R_1} G(z, \varphi) \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial n_1}(\varphi) dS_\varphi + a_i \tag{2.35}$$

donde

$$F(z, \varphi) = \frac{\varepsilon_2}{\pi} \int_{|\xi| < R_1} \nabla_\xi \ln|\xi - z| \nabla_\xi d(z, \xi) d\xi - \int_{|\psi|=R_1} \overline{G}(\psi, \varphi) \frac{\partial d}{\partial n_\psi}(z, \psi) dS_\psi \tag{2.36}$$

$$G(z, \varphi) = \frac{\varepsilon_2}{\pi} \int_{|\xi| < R_1} \nabla_\xi \ln|\xi - z| \nabla_\xi \eta(z, \xi) d\xi + \varepsilon_2 \eta(z, \varphi) - \frac{1}{2\pi R_1} \int_{|\psi|=R_1} \overline{G}(\psi, \varphi) dS_\psi \tag{2.37}$$

$$h_i(z) = - \int_{S_i} \left\{ \int_{|\psi|=R_1} \frac{\partial d}{\partial n_\psi}(z, \psi) \frac{\partial \overline{G}}{\partial n_{\xi_1}}(\psi, \xi_1) dS_\psi \right\} dS_{\xi_1} \tag{2.38}$$

y

$$a_i = - \frac{1}{2\pi R_1} \int_{S_i} \left\{ \int_{|\psi|=R_1} \frac{\partial \overline{G}}{\partial n_{\xi_1}}(\psi, \xi_1) dS_\psi \right\} dS_{\xi_1} \tag{2.39}$$

Las relaciones (2.28), (2.34) y (2.35) son de tipo II.

Teorema 2.1 *Para cada función estrictamente positiva y continuamente diferenciable $\epsilon_1(z)$ en $|z| \leq R_1$, la solución para el problema con valores en la frontera (2.10)-(2.14) es única y coincide, para cada $i = 1, 2, \dots, N$, con la solución del sistema de relaciones integrales (2.23), (2.28), (2.34) y (2.35).*

Demostración. Usando la fórmula de Green de manera conveniente, las relaciones integrales (2.23),(2.28),(2.34) y (2.35) se obtienen para la solución del problema con valores en la frontera (2.10)-(2.14). Se puede verificar que la solución para este problema es única para cada $i = 1, 2, \dots, N$.

Supongamos ahora que $V^{(i)}$ satisface las relaciones integrales (2.23),(2.28),(2.34) y (2.35). Se puede ver que, (2.10) se obtiene de (2.23) y (2.28).

Si suponemos que $V_2^{(i)}(z) = g(z)$ en $|z| = R_2$, entonces a partir de la fórmula de Green y de (2.28) se obtiene

$$\int_{|\xi_1|=R_2} [g(\xi_1) - \chi_i(\xi_1)] \frac{\partial \bar{G}}{\partial n_{\xi_1}}(z_2, \xi_1) ds_{\xi_1} = 0, \quad \text{en } |z| = R_2. \quad (2.40)$$

donde χ_i es la función característica del arco S_i .

Si consideramos a la función armónica $W_2^{(i)}$ en $R_1 < |z| < R_2$ que satisface la condición de Dirichlet $g - \chi_i$ en $|z| = R_2$ y la condición nula de Neumann en $|z| = R_1$, entonces, aplicando la fórmula de Green a $W_2^{(i)}$ y para la función de Green $\bar{G}(z, \xi)$ en el anillo $R_1 < |z| < R_2$, y usando (2.40) se deduce que $W_2^{(i)} \equiv 0$ y, por lo tanto, $g \equiv \chi_i$, de donde se obtiene la condición de frontera (2.13) en $|z| = R_2$.

Para obtener las condiciones de frontera (2.12) y (2.14), las igualdades (2.23) y (2.28) se sustituyen en (2.34) y (2.35), resultando las siguientes relaciones

$$V_1^{(i)}(z) = \int_{|\xi| < R_1} (1 - \varepsilon_1) \nabla V_1^{(i)}(\xi) \nabla_{\xi} d(z, \xi) d\xi - \int_{|\xi|=R_1} V_2^{(i)}(\xi) \frac{\partial d}{\partial n_1}(z, \xi) ds_{\xi} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} V_1^{(i)}(z) &= \int_{|\xi| < R_1} (1 - \varepsilon_1) \nabla V_1^{(i)}(\xi) \nabla_{\xi} \eta(z, \xi) d\xi \\ &+ \varepsilon_2 \int_{|\xi|=R_1} \eta(z, \xi) \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial n_1}(\xi) ds_{\xi} - \frac{1}{2\pi R_1} \int_{|\xi|=R_1} V_2^{(i)}(\xi) ds_{\xi}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

A partir de (2.41) y (2.42), y aplicando convenientemente la fórmula de Green a la función $V_1^{(i)}$, se deducen las siguientes igualdades en $|z| < R_1$:

$$\int_{|\xi|=R_1} \left[V_2^{(i)}(\xi) - V_1^{(i)}(\xi) \right] \frac{\partial d}{\partial n_1}(z, \xi) ds_{\xi} = 0 \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} &\int_{|\xi|=R_1} \left[\varepsilon_1(\xi) \frac{\partial V_1^{(i)}}{\partial n_1}(\xi) - \varepsilon_2 \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial n_1}(\xi) \right] \eta(z, \xi) ds_{\xi} \\ &- \frac{1}{2\pi R_1} \int_{|\xi|=R_1} \left[V_1^{(i)}(\xi) - V_2^{(i)}(\xi) \right] ds_{\xi} = 0. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Repitiendo la misma idea usada con (2.40), las condiciones en la frontera (2.12) y (2.14) se pueden obtener a partir de (2.43) y (2.44). ■

Capítulo 3

Esquema del Algoritmo para la Solución del Problema Inverso

3.1. Algoritmo para la solución del problema inverso

El algoritmo para resolver el problema, se plantea en términos de las relaciones del tipo I y tipo II, y consta de los siguientes pasos:

Paso 1.- Obtener la expresión general de las funciones armónicas en el anillo Ω_2 y en particular, la expresión que deben tener $V_2^{(i)}$ y $\frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial \bar{n}_1}$ en $|\xi| = R_1$, partiendo del hecho que $V_2^{(i)}$ satisface las mediciones (1.11) y las condiciones de contorno (2.13).

Paso 2.- Usar las expresiones (2.28), (2.34) y (2.35) para calcular simultáneamente $V_1^{(i)}$ y $\nabla V_1^{(i)}$.

Paso 3.- Obtener los valores aproximados para $\frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial \bar{n}_1}(\xi)$ en $|\xi| = R_1$ y $\nabla V_1^{(i)}(z)$ en $|z| < R_1$.

Paso 4.- Encontrar los coeficientes de Fourier de la aproximación a $V_1^{(i)}$, minimizando un funcional apropiado.

Paso 5.- Obtener la aproximación a $\varepsilon_1(z)$.

3.1.1. Primer paso: Obtención de la expresión general de $V_2^{(i)}$ y $\frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial \bar{n}}$ en $|\xi| = R_1$.

Se conoce que las funciones armónicas en anillos se pueden expresar de la forma:

$$V_2^{(i)}(r, \theta) = a_0^{(i)} + b_0^{(i)} \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{(i)} r^n + b_n^{(i)} r^{-n}) \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n^{(i)} r^n + d_n^{(i)} r^{-n}) \operatorname{sen} n\theta. \quad (3.1)$$

Por otra parte, sabemos que $V_2^{(i)}$ cumple las condiciones:

$$V_2^{(i)}(r, \theta) = \psi_{\theta_0}^{(i)}(\theta), \quad \text{sobre } |z| = R_2. \quad (3.2)$$

$$c_{i,j} = \int_{s_j^-} \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial \vec{n}_2} ds, \quad i < j; \quad i, j = 1, 2, \dots, N. \quad (3.3)$$

Por ello, se cumplen las ecuaciones:

$$a_0^{(i)} + b_0^{(i)} \ln R_2 = \frac{1}{N}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad y \quad n = 0; \quad (3.4)$$

$$a_n^{(i)} R_2^n + b_n^{(i)} R_2^{-n} = \frac{2\beta_n^{(i)} \operatorname{sen} \frac{n\theta_0}{2}}{n^2 \pi \theta_0}; \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad n \geq 1; \quad (3.5)$$

$$c_n^{(i)} R_2^n + d_n^{(i)} R_2^{-n} = \frac{2\alpha_n^{(i)} \operatorname{sen} \frac{n\theta_0}{2}}{n^2 \pi \theta_0}; \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad n \geq 1; \quad (3.6)$$

donde

$$\alpha_n^{(i)} = \cos \frac{2\pi(i-1)n}{N} - \cos \frac{2n\pi i}{N} \quad y$$

$$\beta_n^{(i)} = \operatorname{sen} \frac{2n\pi i}{N} - \operatorname{sen} \frac{2\pi(i-1)n}{N}.$$

De la expresión de $V_2^{(i)}(r, \theta)$ en serie de Fourier se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial \vec{n}_2}(R_2, \theta) &= \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial \vec{r}}(R_2, \theta) \\ &= \frac{b_0^{(i)}}{R_2} + \frac{1}{R_2} \sum_{n=1}^{\infty} n [(a_n^{(i)} R_2^n - b_n^{(i)} R_2^{-n}) \cos n\theta \\ &\quad + (c_n^{(i)} R_2^n - d_n^{(i)} R_2^{-n}) \operatorname{sen} n\theta]. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$c_{i,j} = \int_{s_j^-} \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial \vec{n}_2}(R_2, \theta) ds = \int_{\theta_j^-}^{\theta_j^+} \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial \vec{n}_2}(R_2, \theta) d\theta,$$

donde

$$\theta_j^- = \frac{2\pi(j-1)}{N} + \frac{\theta_0}{2} \quad y \quad \theta_j^+ = \frac{2\pi j}{N} - \frac{\theta_0}{2}, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Así:

$$\begin{aligned} c_{i,j} &= \frac{b_0^{(i)}}{R_2} (\theta_j^+ - \theta_j^-) + \\ &\quad + \frac{1}{R_2} \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n^{(i)} R_2^n - b_n^{(i)} R_2^{-n}) \operatorname{sen} n\theta - (c_n^{(i)} R_2^n - d_n^{(i)} R_2^{-n}) \cos n\theta] \Big|_{\theta_j^-}^{\theta_j^+}. \quad (3.7) \end{aligned}$$

3. ESQUEMA DEL ALGORITMO PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA INVERSO

Calculando separadamente

$$\text{sen}(n\theta_j^+) - \text{sen}(n\theta_j^-) \quad \text{y} \quad \text{cos}(n\theta_j^+) - \text{cos}(n\theta_j^-)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \text{sen}(n\theta_j^+) - \text{sen}(n\theta_j^-) &= \text{sen} n \left(\frac{2\pi j}{N} - \frac{\theta_0}{2} \right) - \text{sen} n \left(\frac{2\pi(j-1)}{N} + \frac{\theta_0}{2} \right) \\ &= \text{sen} \frac{2n\pi j}{N} \cos \frac{n\theta_0}{2} - \cos \frac{2n\pi j}{N} \text{sen} \frac{n\theta_0}{2} - \text{sen} \frac{2n\pi(j-1)}{N} \cos \frac{n\theta_0}{2} \\ &\quad - \cos \frac{2n\pi(j-1)}{N} \text{sen} \frac{n\theta_0}{2} \\ &= \beta_n^{(j)} \cos \frac{n\theta_0}{2} - \left[\cos \frac{2n\pi j}{N} + \cos \frac{2n\pi(j-1)}{N} \right] \text{sen} \frac{n\theta_0}{2}, \end{aligned}$$

donde

$$\beta_n^{(j)} = \text{sen} \frac{2n\pi j}{N} - \text{sen} \frac{2n\pi(j-1)}{N}.$$

Luego,

$$\text{sen}(n\theta_j^+) - \text{sen}(n\theta_j^-) = \beta_n^{(j)} \cos \frac{\theta_0}{2} - 2 \cos \frac{n\pi}{N} (2j-1) \cos \frac{n\pi}{N} \text{sen} \frac{n\theta_0}{2}. \quad (3.8)$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} \text{cos}(n\theta_j^-) - \text{cos}(n\theta_j^+) &= \text{cos} n \left(\frac{2\pi(j-1)}{N} + \frac{\theta_0}{2} \right) - \text{cos} n \left(\frac{2\pi j}{N} - \frac{\theta_0}{2} \right) \\ &= \text{cos} \frac{2n\pi(j-1)}{N} \cos \frac{n\theta_0}{2} - \text{sen} \frac{2n\pi(j-1)}{N} \text{sen} \frac{n\theta_0}{2} - \text{cos} \frac{2n\pi j}{N} \cos \frac{n\theta_0}{2} \\ &\quad - \text{sen} \frac{2n\pi j}{N} \text{sen} \frac{n\theta_0}{2} = \alpha_n^{(j)} \cos \frac{n\theta_0}{2} - \left[\text{sen} \frac{2n\pi j}{N} + \text{sen} \frac{2n\pi(j-1)}{N} \right] \text{sen} \frac{n\theta_0}{2} \end{aligned}$$

donde

$$\alpha_n^{(j)} = \text{cos} \frac{2n\pi(j-1)}{N} - \text{cos} \frac{2n\pi j}{N}.$$

Por lo tanto,

$$\text{cos}(n\theta_j^-) - \text{cos}(n\theta_j^+) = \alpha_n^{(j)} \cos \frac{n\theta_0}{2} - 2 \text{sen} \frac{n\pi}{N} (2j-1) \cos \frac{n\pi}{N} \text{sen} \frac{n\theta_0}{2}. \quad (3.9)$$

3. ESQUEMA DEL ALGORITMO PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA INVERSO

Sustituyendo (3.8) y (3.9) en (3.7) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 c_{i,j} &= b_0^{(i)} \left(\frac{2\pi}{N} - \theta_0 \right) \\
 &+ 2 \sum_{n=1}^n \left\{ \left(\alpha_n^{(i)} R_2^n - \frac{\beta_n^{(j)} \operatorname{sen} \frac{n\theta_0}{2}}{n^2 \pi \theta_0} \right) \left(\beta_n^{(j)} \cos \frac{n\theta_0}{2} - 2 \cos \frac{n\pi}{N} (2j-1) \cos \frac{n\pi}{N} \operatorname{sen} \frac{n\theta_0}{2} \right) \right. \\
 &\left. + \left(c_n^{(i)} R_2^n - \frac{\alpha_n^{(i)} \operatorname{sen} \frac{n\theta_0}{2}}{n^2 \pi \theta_0} \right) \left(\alpha_n^{(j)} \cos \frac{n\theta_0}{2} - 2 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{N} (2j-1) \cos \frac{n\pi}{N} \operatorname{sen} \frac{n\theta_0}{2} \right) \right\}; \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

Equivalentemente

$$\begin{aligned}
 &b_0^{(i)} \left(\frac{2\pi}{N} - \theta_0 \right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} R_2^n \left\{ \alpha_n^{(i)} \left(\beta_n^{(j)} \cos \frac{n\theta_0}{2} - 2 \cos \frac{n\pi}{N} (2j-1) \cos \frac{n\pi}{N} \operatorname{sen} \frac{n\theta_0}{2} \right) \right. \\
 &\left. + c_n^{(i)} \left(\alpha_n^{(j)} \cos \frac{n\theta_0}{2} - 2 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{N} (2j-1) \cos \frac{n\pi}{N} \operatorname{sen} \frac{n\theta_0}{2} \right) \right\} \\
 &= c_{i,j} + \frac{2}{\pi \theta_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\theta_0}{2}}{n^2} \left\{ \beta_n^{(i)} \left(\beta_n^{(j)} \cos \frac{n\theta_0}{2} - 2 \cos \frac{n\pi}{N} (2j-1) \cos \frac{n\pi}{N} \operatorname{sen} \frac{n\theta_0}{2} \right) \right. \\
 &\left. + \alpha_n^{(i)} \left(\alpha_n^{(j)} \cos \frac{n\theta_0}{2} - 2 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{N} (2j-1) \cos \frac{n\pi}{N} \operatorname{sen} \frac{n\theta_0}{2} \right) \right\}. \quad (3.11)
 \end{aligned}$$

Se puede desarrollar el término derecho en la última igualdad, notando que:

$$\begin{aligned}
 &\beta_n^{(i)} \left(\beta_n^{(j)} \cos \frac{n\theta_0}{2} - 2 \cos \frac{n\pi}{N} (2j-1) \cos \frac{n\pi}{N} \operatorname{sen} \frac{n\theta_0}{2} \right) \\
 &+ \alpha_n^{(i)} \left(\alpha_n^{(j)} \cos \frac{n\theta_0}{2} - 2 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{N} (2j-1) \cos \frac{n\pi}{N} \operatorname{sen} \frac{n\theta_0}{2} \right) \\
 &= \left(\beta_n^{(i)} \beta_n^{(j)} + \alpha_n^{(i)} \alpha_n^{(j)} \right) \cos \frac{n\theta_0}{2} - 2 \cos \frac{n\pi}{N} \operatorname{sen} \frac{n\theta_0}{2} \left(\beta_n^{(i)} \cos \frac{n\pi}{N} (2j-1) + \alpha_n^{(i)} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{N} (2j-1) \right) \\
 &= 4 \cos \frac{2n\pi}{N} (i-j) \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi}{N} \cos \frac{n\theta_0}{2} - 2 \cos \frac{n\pi}{N} \operatorname{sen} \frac{n\theta_0}{2} \left(\operatorname{sen} \frac{n\pi}{N} (2i-2j+1) - \operatorname{sen} \frac{n\pi}{N} (2i-2j-1) \right) \\
 &= 4 \cos \frac{2n\pi}{N} (i-j) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{N} \left[\operatorname{sen} \frac{n\pi}{N} \cos \frac{n\theta_0}{2} - \cos \frac{n\pi}{N} \operatorname{sen} \frac{n\theta_0}{2} \right] \\
 &= 4 \cos \frac{2n\pi}{N} (i-j) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{N} - \frac{\theta_0}{2} \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{N}. \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

Por otra parte, del hecho que:

$$\beta_n^{(j)} = \operatorname{sen} \frac{2n\pi j}{N} - \operatorname{sen} \frac{2\pi n(j-1)}{N} = \operatorname{Im} \left\{ e^{i \frac{2n\pi j}{N}} - e^{i \frac{2n\pi(j-1)}{N}} \right\}$$

3. ESQUEMA DEL ALGORITMO PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA INVERSO

$$\begin{aligned}
 &= \operatorname{Im} e^{i\frac{2n\pi j}{N}} \left(1 - e^{-i\frac{2n\pi}{N}}\right) = \operatorname{Im} e^{\frac{n\pi i}{N}(2j-1)} \left(e^{\frac{n\pi i}{N}} - e^{-\frac{n\pi i}{N}}\right) \\
 &= 2 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{N} \cos \frac{n\pi}{N} (2j - 1).
 \end{aligned}$$

Se tiene:

$$\begin{aligned}
 &\beta_n^{(j)} \cos \frac{n\theta_0}{2} - 2 \cos \frac{n\pi}{N} (2j - 1) \cos \frac{n\pi}{N} \operatorname{sen} \frac{n\theta_0}{2} = \\
 &= 2 \cos \frac{n\pi}{N} (2j - 1) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{N} - \frac{n\theta_0}{2} \right). \tag{3.13}
 \end{aligned}$$

De la misma forma:

$$\begin{aligned}
 \alpha_n^{(j)} &= \cos \frac{2n\pi(j-1)}{N} - \cos \frac{2n\pi j}{N} = \operatorname{Re} \left\{ e^{i\frac{2n\pi(j-1)}{N}} - e^{i\frac{2n\pi j}{N}} \right\} = \\
 &= -\operatorname{Re} \left(e^{i\frac{2n\pi j}{N}} \right) \left(1 - e^{-i\frac{2n\pi}{N}} \right) = -\operatorname{Re} \left(e^{i\frac{n\pi}{N}(2j-1)} \right) \left(e^{\frac{n\pi i}{N}} - e^{-\frac{n\pi i}{N}} \right) \\
 &= 2 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{N} (2j - 1) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{N}.
 \end{aligned}$$

y, por lo tanto, se llega a:

$$\begin{aligned}
 &\alpha_n^{(j)} \cos \frac{n\theta_0}{2} - 2 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{N} (2j - 1) \cos \frac{n\pi}{N} \operatorname{sen} \frac{n\theta_0}{2} = \\
 &= 2 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{N} (2j - 1) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{N} - \frac{n\theta_0}{2} \right). \tag{3.14}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo (3.13) y (3.14) en (3.12) se llega finalmente al sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 b_0^{(i)} \left(\frac{2\pi}{N} - \theta_0 \right) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} R_2^n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{N} - \frac{n\theta_0}{2} \right) \left\{ a_n^{(i)} \cos \frac{n\pi}{N} (2j - 1) + c_n^{(i)} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{N} (2j - 1) \right\} = \\
 = c_{i,j} + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\theta_0}{2}}{n^2} \cos \frac{2n\pi}{N} (i - j) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{N} - \frac{n\theta_0}{2} \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{N}. \tag{3.15}
 \end{aligned}$$

Así el sistema (3.15) para $i \neq j$ con $i, j = 1, 2, 3, \dots, N$ junto con las relaciones (3.4), (3.5) y (3.6) es equivalente al sistema de relaciones (3.4), (3.5), (3.6) y (3.10).

El problema del sistema (3.15) es que, para cada i fijo, nos da un sistema de $N - 1$ ecuaciones lineales con una cantidad infinita de incógnitas que son los coeficientes de Fourier $b_0^{(i)}$, $a_n^{(i)}$, $c_n^{(i)}$, con $n = 1, 2, \dots$, es decir, es un sistema sobredeterminado.

La forma en que utilizaremos el sistema (3.15) y las relaciones (3.4), (3.5) y (3.6) para obtener algunos coeficientes de Fourier de la función $V_2^{(i)}$ y con ello una expresión aproximada de la función $V_2^{(i)}$ es la siguiente:

3. ESQUEMA DEL ALGORITMO PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA INVERSO

Truncaremos la serie de la parte derecha de (3.15) de manera que si δ es el error que se comete en la medición de $c_{i,j}$ entonces, el resto de dicha serie no introduzca un error mayor que δ .

De esta manera, en la parte derecha de (3.15) se define:

$$\tilde{c}_{i,j} = c_{i,j} + \frac{8}{\pi\theta_0} \sum_{k=1}^{n(\delta)} \frac{\text{sen } \frac{k\theta_0}{2}}{k^2} \cos \frac{2k\pi}{N} (i-j) \text{sen} \left(\frac{k\pi}{N} - \frac{k\theta_0}{2} \right) \text{sen} \frac{k\pi}{N}; \quad (3.16)$$

donde $n(\delta)$ se elige de tal forma que satisfaga la desigualdad:

$$\left| c_{i,j} + \frac{8}{\pi\theta_0} \sum_{k=n(\delta)+1}^{\infty} \frac{\text{sen } \frac{k\theta_0}{2}}{k^2} \cos \frac{2k\pi}{N} (i-j) \text{sen} \left(\frac{k\pi}{N} - \frac{k\theta_0}{2} \right) \text{sen} \frac{k\pi}{N} \right| \leq \delta.$$

Del hecho que la expresión

$$\frac{8}{\pi\theta_0} \sum_{k=n(\delta)+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

se puede acotar y se puede elegir $n(\delta)$ para que se cumpla:

$$\sum_{k=n(\delta)+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi\theta_0\delta}{8}. \quad (3.17)$$

y como $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, se tiene que si definimos $r_n = \sum_{k=1}^{n(\delta)} \frac{1}{k^2}$, entonces (3.17) es equivalente a:

$$r_{n(\delta)} \geq \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi\theta_0\delta}{8}. \quad (3.18)$$

Luego, (3.18) nos da el criterio para elegir $n(\delta)$.

Por lo anterior, en lugar de resolver el sistema (3.15) resolveremos el sistema simplificado:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{i,j} = & b_0^{(i)} \left(\frac{2\pi}{N} - \theta_0 \right) + \\ & + 4 \sum_{n=1}^{\frac{N-2}{2}} R_2^n \text{sen} \left(\frac{n\pi}{N} - \frac{n\theta_0}{2} \right) \left\{ a_n^{(i)} \cos \frac{n\pi}{N} (2j-1) + c_n^{(i)} \text{sen} \frac{n\pi}{N} (2j-1) \right\}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Donde $\tilde{c}_{i,j}$ se define según (3.16) utilizando el criterio (3.18) para determinar $n(\delta)$.

Al resolver el sistema (3.19) para cada i fijo con $j = 1, 2, \dots, N$; $i \neq j$ se obtienen los coeficientes aproximados $\tilde{b}_0^{(i)}$, $\tilde{a}_n^{(i)}$, $\tilde{c}_n^{(i)}$ para $n = 1, 2, \dots, \frac{N-2}{2}$. Posteriormente, se utilizan las relaciones (3.4), (3.5) y (3.6) para obtener $\tilde{a}_0^{(i)}$, $\tilde{b}_n^{(i)}$, $\tilde{d}_n^{(i)}$, para $n = 1, 2, \dots, \frac{N-2}{2}$, y

con todo ello se obtiene una aproximación para $V_2^{(i)}(r, \theta)$ en la forma

$$\begin{aligned} \tilde{V}_2^{(i)}(r, \theta) &= \tilde{a}_0^{(i)} + \tilde{b}_0^{(i)} \ln r + \\ &+ \sum_{n=1}^{\frac{N-2}{2}} \left\{ \left(\tilde{a}_n^{(i)} r^n + \tilde{b}_n^{(i)} r^{-n} \right) \cos n\theta + \left(\tilde{c}_n^{(i)} r^n + \tilde{d}_n^{(i)} r^{-n} \right) \operatorname{sen} n\theta \right\}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Con la expresión (3.20) se calculan $\tilde{V}_2^{(i)}(R_1, \theta)$ y $\frac{\partial \tilde{V}_2^{(i)}}{\partial r}(R_1, \theta)$ y el problema completo se reduce a resolver:

$$\nabla \cdot \left(\tilde{\varepsilon}_1 \nabla \tilde{V}_1^{(i)} \right) = 0 \quad \text{en} \quad |z| < R_1; \quad (3.21)$$

$$\tilde{V}_1^{(i)}(R_1, \theta) = \tilde{V}_2^{(i)}(R_1, \theta); \quad (3.22)$$

$$\tilde{\varepsilon}_1 \frac{\partial V_1}{\partial r}(R_1, \theta) = \varepsilon_2 \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial r}(R_1, \theta). \quad (3.23)$$

A partir de resolver el problema (3.21)- (3.23) se debe determinar $\tilde{\varepsilon}_1$ que es una aproximación a ε_1 .

Observar que, de esta manera obtenemos una aproximación de $V_2^{(i)}(R_1, \theta)$ y $\frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial r_1}(R_1, \theta)$ como una combinación lineal del sistema trigonométrico usando solamente la información de la condición de frontera (1.9) y los datos (1.11).

3.1.2. Segundo paso: Planteamiento del funcional a minimizar.

Una vez que encontramos estos coeficientes que determinan $V_2^{(i)}$, estamos listos para calcular $V_1^{(i)}$ y $\nabla V_1^{(i)}$ aproximadamente usando las igualdades (2.28), (2.34) y (2.35) y ese es el segundo paso de nuestro algoritmo.

A partir de (2.24) concluimos que $V_1^{(i)}$ debe satisfacer que si $z = (x, y)$, $\xi = R_1 e^{i\tau}$, entonces

$$\begin{aligned} &\frac{\partial V_1^{(i)}}{\partial y}(z) \int_{|\xi|=R_1} \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial n_1}(\xi) \frac{x - R_1 \cos(\tau)}{|\xi - z|^2} ds_\xi \\ &= \frac{\partial V_1^{(i)}}{\partial x}(z) \int_{|\xi|=R_1} \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial n_1}(\xi) \frac{y - R_1 \operatorname{sen}(\tau)}{|\xi - z|^2} ds_\xi. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Vamos a encontrar la función vectorial $\bar{V}_1 = (V_1^{(1)}, V_1^{(2)}, \dots, V_1^{(N)})$ en alguna clase de funciones v de manera que se minimice el funcional

$$\begin{aligned} l(\bar{V}_1) &= \sum_{i=1}^N \left\{ \left\| f_i(z) \frac{\partial V_1^{(i)}}{\partial y}(z) - g_i(z) \frac{\partial V_1^{(i)}}{\partial x}(z) \right\|^2 \right. \\ &+ \left\| V_1^{(i)}(z) - \int_{|\xi| < R_1} \nabla_\xi V_1^{(i)}(\xi) \nabla_\xi d(z, \xi) d\xi - F_i(z) \right\|^2 \\ &+ \left. \left\| V_1^{(i)}(z) - \int_{|\xi| < R_1} \nabla_\xi V_1^{(i)}(\xi) \nabla_\xi \eta(z, \xi) d\xi - G_i(z) \right\|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

3. ESQUEMA DEL ALGORITMO PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA INVERSO

Nota: La norma considerada en el funcional (3.25) es la norma en $L_2(\Omega_1)$ con las restricciones

$$0 \leq \epsilon_{min} \leq \epsilon_1(z) \leq \epsilon_{max}. \quad (3.26)$$

La función $V_1^{(i)}(z)$, la cual minimiza el funcional (3.25) es una solución aproximada del sistema de ecuaciones (2.28), (2.34) y (2.35).

Donde

$$d(z, \xi) = -\frac{1}{4\pi} \ln \left(\frac{R_1^2 - 2\rho r \cos(t - \tau) + \rho^2 r^2 R_1^{-2}}{r^2 - 2\rho r \cos(t - \tau) + \rho^2} \right) \quad (3.27)$$

y

$$\begin{aligned} \eta(z, \xi) = & \frac{1}{2\pi} \ln (r^2 - 2\rho r \cos(t - \tau) + \rho^2) + \\ & + \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{R_1^4}{\rho^2} - 2\frac{R_1^2 r}{\rho} \cos(t - \tau) + r^2 \right) - \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{R_1}{\rho} \right), \end{aligned} \quad (3.28)$$

son las funciones de Green de los problemas de Dirichlet y Neumann en Ω_1 , respectivamente, y para $z = (x, y)$ y $\xi = R_1 e^{i\tau}$, las funciones

$$f_i(z) = \int_{|\xi|=R_1} \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial n_1}(\xi) \frac{x - R_1 \cos \tau}{|\xi - z|^2} ds_\xi, \quad (3.29)$$

$$g_i(z) = \int_{|\xi|=R_1} \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial n_1}(\xi) \frac{y - R_1 \operatorname{sen} \tau}{|\xi - z|^2} ds_\xi, \quad (3.30)$$

$$F_i(z) = \int_{|\varphi|=R_1} F(z, \varphi) \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial n_1}(\varphi) ds_\varphi + h_i(z), \quad (3.31)$$

$$G_i(z) = \int_{|\varphi|=R_1} G(z, \varphi) \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial n_1}(\varphi) ds_\varphi + a_i, \quad (3.32)$$

Donde

$$\begin{aligned} F(z, \varphi) = & \frac{\epsilon_2}{\pi} \int_{|\xi|<R_1} \nabla_\xi \ln |\xi - z| \nabla_\xi d(z, \xi) d\xi \\ & - \int_{|\psi|=R_1} \bar{G}(\psi, \varphi) \frac{\partial d}{\partial n_\psi}(z, \psi) ds_\psi, \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} G(z, \varphi) = & \frac{\epsilon_2}{\pi} \int_{|\xi|<R_1} \nabla_\xi \ln |\xi - z| \nabla_\xi \eta(z, \xi) d\xi \\ & + \epsilon_2 \eta(z, \xi) - \frac{1}{2\pi R_1} \int_{|\psi|=R_1} \bar{G}(\psi, \varphi) ds_\psi, \end{aligned} \quad (3.34)$$

y h_i, a_i están dadas en (2.38) y (2.39).

Sea $z = r e^{i\theta}$. Después de algunos cálculos se obtiene.

3. ESQUEMA DEL ALGORITMO PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA INVERSO

$$\begin{aligned}
 f_i(r, \theta) = & -\pi \sum_{q=1}^{\frac{N-2}{2}} q \left[1 + \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{2q} \right] r^{q-1} [a_q^i \cos(q-1)\theta + c_q^i \sin(q-1)\theta] \\
 & + \frac{R_2}{R_1^2} \sum_{q=1}^{\frac{N-2}{2}} \left(\frac{rR_2}{R_1^2} \right)^{q-1} [\beta_q^i \cos(q-1)\theta + \alpha_q^i \sin(q-1)\theta]. \tag{3.35}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_i(r, \theta) = & \pi \sum_{q=1}^{\frac{N-2}{2}} q \left[1 + \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{2q} \right] r^{q-1} [a_q^i \sin(q-1)\theta - c_q^i \cos(q-1)\theta] + \\
 & + \frac{R_2}{R_1^2} \sum_{q=1}^{\frac{N-2}{2}} \left(\frac{rR_2}{R_1^2} \right)^{q-1} [\alpha_q^i \cos(q-1)\theta + \beta_q^i \sin(q-1)\theta]. \tag{3.36}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_i(r, \theta) = & \frac{b_0^{(i)}}{2} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \\
 & + \sum_{q=1}^{\frac{N-2}{2}} \frac{1}{2R_1^q} \left\{ [a_q^{(i)} R_1^q - b_q^{(i)} R_1^{-q}] \left[1 + \pi R_1 \left(\frac{R_2^{2q} - R_1^{2q} - 2R_1^{2q} R_2}{R_1^{2q} + R_2^{2q}} \right) \right] r^q \cos q\theta \right. \\
 & + [c_q^{(i)} R_1^q - d_q^{(i)} R_1^{-q}] \\
 & \left. \left(1 + \frac{2\pi R_1^{q-1}}{R_1^{2q} + R_2^{2q}} \left(\frac{R_2^{2q} - R_1^{2q} - 2R_1^{2q} R_2}{2R_1^{q-2}} - 2R_1^{q+1} R_2 \sum_{s=1}^{n-1} \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{2s} \right) \right) r^q \sin q\theta \right\} \\
 & - \frac{R_2^2 - 1}{N} + R_2 r \left[\frac{1}{2\pi} + \frac{R_1^2 + 3R_2^2}{R_1^2 (R_1^2 + R_2^2)^2} + \frac{R_1 (R_1^4 + 2R_1^2 R_2^2 - R_2^4)}{R_2^3 (R_1^2 + R_2^2)^2} \right] \beta_1' \cos \theta \\
 & - R_2 r \left[\frac{R_1 (R_2^4 - R_1^4 - 2R_1^2 R_2^2)}{R_2^3 (R_1^2 + R_2^2)^2} - \frac{1}{2\pi} \right] \alpha_1' \sin \theta \\
 & - \sum_{q=2}^{\infty} \frac{R_2 r^q}{q(R_1^{2q} + R_2^{2q})^2} \left\{ \left(\frac{R_1}{R_2^{2q+1}} (R_2^{4q} - R_1^{4q} - 2R_1^{2q} R_2^{2q}) - \frac{1}{R_1^{q-1}} (R_1^{2q} + 3R_2^{2q}) \right) \beta_q^i \cos q\theta \right. \\
 & \left. + \left(\frac{R_1}{R_2^{2q-1}} (R_2^{4q} - R_1^{4q} - 2R_1^{2q} R_2^q) \right) \alpha_q^i \sin q\theta \right\}. \tag{3.37}
 \end{aligned}$$

$$G_i(z) = b_0^{(i)} \left(2\epsilon_2 - \frac{1}{2} \right) \ln R_1 + \left(\frac{b_0^{(i)}}{2} - \frac{R_2}{NR_1} \right) \ln R_2 + \frac{R_1 - R_2}{NR_1} + a_i. \tag{3.38}$$

En las expresiones (3.35)-(3.38), los coeficientes $a_n^{(i)}$, $b_n^{(i)}$, $c_n^{(i)}$ y $d_n^{(i)}$, $0 \leq n \leq \frac{N-2}{2}$, son los obtenidos para las series (3.1). Observe que las expresiones (3.35) y (3.36) están compuestas por un número finito de términos, (3.38) es una constante y la serie en (3.37) no depende de los coeficientes $a_n^{(i)}$, $b_n^{(i)}$, $c_n^{(i)}$ y $d_n^{(i)}$.

Si consideramos $R_1 = 1$, debemos tomar $R_2 = 1 + \delta$ con $0 < \delta \ll 1$ para considerar la situación real.

3. ESQUEMA DEL ALGORITMO PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA INVERSO

Por esta razón podemos tomar $R_1 = R_2 = 1$ como una primera aproximación para obtener una simplificación de las fórmulas (3.35)-(3.38). En particular tenemos $G_i(z) = 0$, y una expresión muy simple para (3.37) teniendo una suma finita además de un error de truncamiento que depende del orden de truncamiento y de δ .

3.1.3. Tercer paso: Aproximación de la función $V_1^{(i)}$.

En la expresión del funcional (3.25) consideraremos que la norma utilizada es la norma en $H^1(\Omega_1)$.

Para el tercer paso podemos considerar una base ortonormal $\{W_k(z)\}_{k=1}^\infty$ en $L_2(\Omega_1)$ y la base ortogonal en el espacio de Sobolev $H^1(\Omega_1)$ y buscamos una aproximación de $V_1^{(i)}$ de la forma

$$\bar{V}_1^{(i)}(z) = \sum_{k=1}^M A_k^{(i)} W_k(z); \quad (3.39)$$

donde M debe ser elegida apropiadamente suponiendo que (3.39) es una aproximación para $V_1^{(i)}$ en $H^1(\Omega_1)$.

Del hecho que a priori se conoce que la función $\varepsilon_1(x, y)$ está acotada inferiormente por una constante γ estrictamente positiva, y como la integral satisface

$$\int_{|z| < R_1} \varepsilon_1(z) \left| \nabla V_1^{(i)}(z) \right|^2 dz < \infty.$$

se concluye que $V_1^{(i)} \in H^1(\Omega_1)$. De esta manera, garantizamos que $\sum_{k=1}^M A_k^{(i)} \nabla W_k(z)$ es una aproximación de $\nabla V_1^{(i)}(z)$.

Como un ejemplo de una base con estas propiedades, podemos tomar las eigenfunciones de un operador diferencial elíptico de segundo orden para el segundo problema de frontera [8,p. 200].

Sustituyendo (3.39) en el funcional (3.25) se llega a:

$$\begin{aligned} l(\bar{V}_1) = & \sum_{i=1}^N \left\{ \left\| \sum_{k=1}^M a_k^{(i)} \left[f_i(z) \frac{\partial W_k}{\partial y}(z) - g_i(z) \frac{\partial W_k}{\partial x}(z) \right] \right\|^2 \right. \\ & + \left\| \sum_{k=1}^M a_k^{(i)} \left[W_k(z) + \int_{|\xi| < R_1} \nabla_\xi W_k(\xi) \cdot \nabla_\xi d(z, \xi) d\xi \right] + F_i(z) \right\|^2 \\ & \left. + \left\| \sum_{k=1}^M a_k^{(i)} \left[W_k(z) + \int_{|\xi| < R_1} \nabla_\xi W_k(\xi) \cdot \nabla_\xi \eta(z, \xi) d\xi \right] + G_i(z) \right\|^2 \right\}. \quad (3.40) \end{aligned}$$

3. ESQUEMA DEL ALGORITMO PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA INVERSO

Desarrollando las funciones:

$$f_k^i(z) = f_i(z) \frac{\partial W_k}{\partial y}(z) - g_i(z) \frac{\partial W_k}{\partial x}(z); \quad (3.41)$$

$$D_k(z) = W_k(z) - \int_{|\xi| < R_1} \nabla_\xi W_k(\xi) \nabla_\xi d(z, \xi) d\xi; \quad (3.42)$$

$$N_k(z) = W_k(z) - \int_{|\xi| < R_1} \nabla_\xi W_k(\xi) \nabla_\xi n(z, \xi) d\xi; \quad (3.43)$$

y las funciones F_i y G_i en el sistema $\{W_k(z)\}_{k=1}^\infty$ hasta que $k = M$ en $L_2(\Omega_1)$, obtenemos

$$f_k^i(z) = \sum_{j=1}^M f_{jk}^i W_j(z); \quad (3.44)$$

$$D_k(z) = \sum_{j=1}^M D_{jk}(z) W_j(z); \quad (3.45)$$

$$N_k(z) = \sum_{j=1}^M N_{jk}(z) W_j(z); \quad (3.46)$$

$$F_i(z) = \sum_{j=1}^M F_j^i(z) W_j(z); \quad (3.47)$$

$$G_i(z) = \sum_{j=1}^M G_j^i(z) W_j(z); \quad (3.48)$$

donde f_{jk}^i , D_{jk} , N_{jk} , F_j^i y G_j^i son los coeficientes de Fourier en $L_2(\Omega_1)$, de las funciones $f_k^i(z)$, $D_k(z)$, $N_k(z)$, $F_i(z)$, $G_i(z)$, respectivamente.

Si tomamos como la base $\{W_k(z)\}_{k=1}^\infty$ a las eigenfunciones del operador de Laplace para el segundo problema de frontera en Ω_1 , correspondiendo al eigenvalor λ_k , tenemos

$$D_k(z) = \int_{\partial\Omega_1} W_k(\xi) \frac{\partial d(z, \xi)}{\partial n} d\xi \quad y \quad N_k(z) = 0.$$

Por lo tanto, y dado que $G_i(z)$ es constante, el tercer término del lado derecho de (3.25) es eliminado.

Después de calcular los coeficientes de Fourier, sustituimos (3.44), (3.45) y (3.47) en (3.40) y de esta manera, obtenemos un nuevo funcional:

$$L \left((A_k^i)_{1 \leq k \leq M, 1 \leq i \leq N} \right) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \left\{ \left\| \sum_{k=1}^M A_k^i f_{jk}^i \right\|^2 + \left\| \sum_{k=1}^M A_k^i D_{jk} - F_j^i \right\|^2 \right\}. \quad (3.49)$$

Para acabar de plantear el problema de optimización para el funcional (3.49), con el objetivo de determinar los coeficientes de Fourier $A_k^{(i)}$, $k = 1, 2, 3, \dots, M$, $i = 1, 2, \dots, N$. debemos definir las restricciones para ε_1 .

De la ecuación (2.28), tenemos

$$\frac{1}{\epsilon_1(z)} = -\frac{\pi}{\epsilon_2} \frac{1}{f_i(z)} \frac{\partial V_1^i}{\partial x}(z) = -\frac{\pi}{\epsilon_2} \frac{1}{g_i(z)} \frac{\partial V_1^i}{\partial y}(z); \quad (3.50)$$

donde las funciones $f_i(z)$ y $g_i(z)$ $i = 1, 2, \dots, N$, están definidos en (3.27) y (3.28).

Usando (3.26) y (3.50) obtenemos las siguientes restricciones

$$-\frac{\epsilon_2}{\pi \epsilon_{min}} \leq \frac{1}{f_i(z)} \frac{\partial V_1^i}{\partial x}(z) \leq -\frac{\epsilon_2}{\pi \epsilon_{max}}; \quad (3.51)$$

$$-\frac{\epsilon_2}{\pi \epsilon_{min}} \leq \frac{1}{g_i(z)} \frac{\partial V_1^i}{\partial y}(z) \leq -\frac{\epsilon_2}{\pi \epsilon_{max}}; \quad (3.52)$$

donde $i = 1, 2, \dots, N$ y $z \in \Omega_1$.

3.1.4. Cuarto paso: Minimización del funcional.

En el cuarto paso debemos encontrar los coeficientes A_k^i de (3.39), y para conseguirlo minimizaremos (3.49) sujeto a las restricciones (3.51)-(3.52). Si sustituimos (3.39) en (3.51) y (3.52) llegamos a

$$-\frac{\epsilon_2}{\pi \epsilon_{min}} \leq \sum_{k=1}^M A_k^{(i)} \left(\frac{1}{f_i(z)} \frac{\partial W_k}{\partial x}(z) \right) \leq -\frac{\epsilon_2}{\pi \epsilon_{max}}, \quad (3.53)$$

$$-\frac{\epsilon_2}{\pi \epsilon_{min}} \leq \sum_{k=1}^M A_k^{(i)} \left(\frac{1}{g_i(z)} \frac{\partial W_k}{\partial y}(z) \right) \leq -\frac{\epsilon_2}{\pi \epsilon_{max}}. \quad (3.54)$$

A partir de (3.53) y (3.54) obtenemos

$$\frac{\epsilon_2^2}{\pi^2 \epsilon_{max}} \leq \left| \sum_{k=1}^M A_k^{(i)} \left(\frac{1}{f_i(z)} \frac{\partial W_k}{\partial x}(z) \right) \right|^2 \leq \frac{\epsilon_2^2}{\pi^2 \epsilon_{min}}; \quad (3.55)$$

$$\frac{\epsilon_2^2}{\pi^2 \epsilon_{max}^2} \leq \left| \sum_{k=1}^M A_k^{(i)} \left(\frac{1}{g_i(z)} \frac{\partial W_k}{\partial y}(z) \right) \right|^2 \leq \frac{\epsilon_2^2}{\pi^2 \epsilon_{min}^2}. \quad (3.56)$$

Luego, si escribimos

$$\frac{1}{f_i(z)} \frac{\partial W_k}{\partial y}(z) = \sum_{j=1}^M \alpha_{jk}^{(i)} W_j(z), \quad (3.57)$$

$$\frac{1}{g_i(z)} \frac{\partial W_k}{\partial y}(z) = \sum_{j=1}^M \beta_{jk}^{(i)} W_j(z), \quad (3.58)$$

3. ESQUEMA DEL ALGORITMO PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA INVERSO

donde

$$\alpha_{jk}^i = \left\langle \frac{1}{f_i(z)} \frac{\partial W_k}{\partial y}(z), W_j \right\rangle \quad \text{y} \quad \beta_{jk}^i = \left\langle \frac{1}{g_i(z)} \frac{\partial W_k}{\partial y}(z), W_j \right\rangle;$$

son los coeficientes de Fourier de las funciones

$$\frac{1}{f_i(z)} \frac{\partial W_k}{\partial y}(z) \quad \text{y} \quad \frac{1}{g_i(z)} \frac{\partial W_k}{\partial y}(z) \quad \text{respectivamente.}$$

Si sustituimos (3.57) y (3.58) en (3.55) y (3.56), de forma respectiva, e integramos sobre Ω_1 en cada lado de las desigualdades, obtenemos

$$\frac{\epsilon_2^2 R_1^2}{2\pi^2 \epsilon_{max}} \leq \sum_{j=1}^M \left| \sum_{k=1}^M A_k^{(i)} \alpha_{jk}^{(i)} \right|^2 \leq \frac{\epsilon_2^2 R_1^2}{2\pi^2 \epsilon_{min}}; \quad (3.59)$$

$$\frac{\epsilon_2^2 R_1^2}{2\pi^2 \epsilon_{max}} \leq \sum_{j=1}^M \left| \sum_{k=1}^M A_k^{(i)} \beta_{jk}^{(i)} \right|^2 \leq \frac{\epsilon_2^2 R_1^2}{2\pi^2 \epsilon_{min}}; \quad (3.60)$$

para $i = 1, 2, \dots, N$.

De tal forma que la minimización del funcional (3.61) sujeto a las restricciones (3.59) y (3.60) es equivalente a resolver los siguientes N problemas:

$$\min_{v \in \mathbb{R}^M} |F_i \vec{a}_i|_M^2 + |D \vec{a}_i - \vec{b}_i|_M^2; \quad (3.61)$$

sujetos a las restricciones

$$\frac{\epsilon_2 R_1}{\sqrt{2\pi} \epsilon_{max}} \leq |A_i \vec{a}_i|_M \leq \frac{\epsilon_2 R_1}{\sqrt{2\pi} \epsilon_{min}}; \quad (3.62)$$

$$\frac{\epsilon_2 R_1}{\sqrt{2\pi} \epsilon_{max}} \leq |B_i \vec{a}_i|_M \leq \frac{\epsilon_2 R_1}{\sqrt{2\pi} \epsilon_{min}}; \quad (3.63)$$

donde $|\cdot|_M$ denota la norma de un vector en \mathbb{R}^M , $F_i = (f_{mn}^{(i)})$, $D = (D_{mn})$, $A_i = (a_{mn}^{(i)})$, $B_i = (b_{mn}^{(i)})$, $\vec{a}_i = (A_1^i, A_2^i, \dots, A_M^i)$, $\vec{b}_i = (F_1^{(i)}, F_2^{(i)}, \dots, F_M^{(i)})$, $i, m, n = 1, 2, \dots, N$.

Los datos dados en (1.11) han sido utilizados para encontrar los coeficientes de $V_2^{(i)}$ en (3.1) hasta $\frac{(N-2)}{2}$. Los elementos de las matrices y vectores dados antes contienen estos coeficientes. Cuando ϵ_{min} se supone suficientemente pequeño y ϵ_{max} suficientemente grande, el problema de optimización (3.61)-(3.63) se transforma en un problema de optimización sin restricciones. Se puede verificar que el gradiente del funcional en (3.61) está dado por

$$2 \left\{ (F_i^* F_i + D^* D + N^* N) \vec{a}_i - (D^* \vec{b}_i + N^* \vec{c}_i) \right\}; \quad (3.64)$$

donde el índice superior $*$ denota a la matriz transpuesta.

3. ESQUEMA DEL ALGORITMO PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA INVERSO

Como la matriz $F_i^* F_i + D^* D + N^* N$ es definida positiva, excepto en el caso poco común cuando los determinantes de F_i , D y N son simultáneamente cero, entonces generalmente (3.64) tiene solución única donde el funcional (3.61) alcanza su mínimo global.

En la quinta etapa, después de calcular los coeficientes de A_k^i , por medio de la solución del problema (3.61)-(3.63), $\epsilon_1(z)$ puede ser obtenido a partir de (2.28) y para cada $i = 1, 2, \dots, N$ tenemos

$$\epsilon_1^{(i)}(z) = \frac{\epsilon_2}{\pi} \frac{\left| \int_{|\xi|=R_1} \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial n_1}(\xi) \nabla_\xi \ln |z - \xi| ds_\xi \right|}{|\nabla V_1^{(i)}(z)|}. \quad (3.65)$$

Ahora, podemos definir

$$\epsilon_1(z) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \epsilon_1^{(i)}(z); \quad (3.66)$$

donde los números α_i son elegidos a partir de las condiciones $0 \leq \alpha_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$.

$\sum_{i=1}^N \alpha_i \epsilon_1^{(i)}(z)$ es la combinación convexa de $\epsilon_1^{(i)}$ que mejor aproxima a los datos experimentales. Una manera sencilla de recuperar a ϵ_1 es tomando $\alpha_i = \frac{1}{N}$, $i = 1, 2, \dots, N$ en (3.66).

Si tenemos la partición $(W_k)_{k=1}^{\tilde{M}}$ de $|z| < R_1$, entonces la expresión (3.66) puede ser utilizada para obtener un valor promedio ϵ_1^k de $\epsilon_1(z)$ para cada elemento de la partición.

Es posible comprobar que podemos tomar $M = \tilde{M}$ e igual al máximo número de elementos de una partición en la cual cada componente W_k es tal que el instrumento usado para medir las capacitancias mutuas puede detectar el cambio de ϵ_1^k en W_k .

Conclusiones

En esta tesis se presentó un método alternativo de solución para el problema inverso de TCE para flujos bifásicos, el cual es un problema que tiene aplicaciones importantes en el área de ingeniería llamada tomografía de procesos, este método pretende ser una buena alternativa que mejore en tiempo y exactitud a los métodos tradicionales de solución del mismo problema de TCE, por ejemplo algunos métodos son iterativos y en su método de solución el problema directo debe ser resuelto en cada iteración, mientras que en el método propuesto la mayoría de los cálculos se realizan sólo una vez, como resultado se obtiene un algoritmo no iterativo.

La forma de la función $\psi_{\theta_0}^{(i)}(\theta)$ se puede modificar, ya que su forma depende del voltaje inducido en el electrodo i -ésimo. En este caso el algoritmo de solución propuesto continúa siendo válido.

Entre los posibles trabajos que se pueden realizar a futuro están los siguientes:

La implementación numérica del método propuesto.

Saber si se pueden utilizar otro tipo de espacios diferentes a los espacios de Sobolev donde se pueda plantear la solución del problema.

Buscar otras formas para aproximar a las funciones $\psi_{\theta_0}^{(i)}(\theta)$, $V_k^{(i)}$, $\frac{\partial V_k^{(i)}}{\partial n_k}$ $k = 1, 2, 3$ y por lo tanto a ε_1 . En este sentido, establecer criterios para obtener el valor $n(\delta)$ de la ecuación 3.18.

Aplicar el algoritmo propuesto para casos particulares de la distribución de la permitividad y, en esos casos, obtener la cantidad necesaria del número de mediciones que hacen falta para resolver el problema inverso.

Apéndice A

Espacios de Sobolev.

Los siguientes conceptos se utilizan a lo largo de la tesis y pueden consultarse de manera detallada en [17], [18], [19], [20] y [21].

A.1. Derivada débil o generalizada

Antes de definir a los espacios de Sobolev, definiremos el concepto de derivada débil.

Definición A.1 Supongamos que $u, v \in L^1_{loc}(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$, U abierto y que α es un multi-índice. Diremos que v es la α -ésima derivada débil de u y la denotaremos como $D^\alpha u = v$ si satisface la siguiente igualdad:

$$\int_U u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v \phi dx$$

para cualquier función test $\phi \in C_c^\infty(U)$. Donde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es un multi-índice de orden $k = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = |\alpha|$.

Proposición A.1 (Unicidad de las derivadas débiles). Una α -ésima derivada débil de u , si existe, entonces es única casi en todas partes (o equivalentemente es única excepto en un conjunto de medida cero).

Demostración: Suponga que existen v y $\tilde{v} \in L^1_{loc}(U)$ que satisfacen la igualdad

$$\int_U u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U \tilde{v} \phi dx,$$

para toda función $\phi \in C_c^\infty(U)$. Entonces

$$\int_U (v - \tilde{v}) \phi dx = 0$$

para toda función $\phi \in C_c^\infty(U)$; de donde $v - \tilde{v} = 0$ casi en todas partes. Lo cual implica que $v = \tilde{v}$.

A.1.1. Propiedades elementales de las derivadas débiles

Teorema. A1 (Propiedades de las derivadas débiles)

Si $u, v \in W^{k,p}(U)$, $|\alpha| \leq k$. Entonces

- (i) $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(U)$ y $D^\alpha(D^\beta u) = D^\beta(D^\alpha u) = D^{\alpha+\beta}u$ para cualesquiera multi-índices α, β con $|\alpha| + |\beta| \leq k$.
- (ii) Para cualesquiera $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(U)$ y $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$, $|\alpha| \leq k$.
- (iii) Si V es un subconjunto abierto de U , entonces $u \in W^{k,p}(V)$.

A.2. Definición de espacios de Sobolev

Sea $1 \leq p \leq \infty$ y sea k un entero no negativo, $U \subset \mathbb{R}^n$, U abierto. Definiremos ciertos espacios de funciones, cuyos elementos tienen derivadas débiles de varios ordenes incluidas en varios espacios L^p .

Definición A.2 El espacio de Sobolev $W^{k,p}(U)$ consiste de todas las funciones localmente sumables $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ tales que para cada multi-índice α con $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha u$ existe en el sentido débil y pertenece a $L^p(U)$.

Y se denotan de la siguiente manera:

$$W^{k,p}(U) = \{u \in L^p(U) : D^\alpha u \in L^p(U), \text{ para toda } \alpha \text{ tal que } |\alpha| \leq k\}$$

De la misma manera

$$W_{loc}^{k,p}(U) = \{u \in L_{loc}^p(U) : D^\alpha u \in L_{loc}^p(U), \text{ para toda } \alpha \text{ tal que } |\alpha| \leq k\}$$

Definición A.3 Espacio de Sobolev en el conjunto $(0, 2\pi)$.

Para $r \geq 0$, el espacio de Sobolev $H^r(0, 2\pi)$ de orden r se define como el conjunto:

$$H^r(0, 2\pi) = \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \exp(ikt) : \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + k^2)^r |a_k|^2 < \infty \right\}$$

Donde

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \exp(-iks) ds, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad f(s) \in L^2(0, 2\pi).$$

Notar que $H^0(0, 2\pi) = L^2(0, 2\pi)$.

Teorema. A2 El espacio de Sobolev $H^r(0, 2\pi)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno definido por:

$$\langle x, y \rangle_{H^r} := \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + k^2)^r a_k \bar{b}_k$$

donde:

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \exp(ikt) \quad y \quad y(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \exp(ikt)$$

La norma en $H^r(0, 2\pi)$ está dada por:

$$\|x\|_{H^r} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + k^2)^r |a_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Definición A.4 Para $r \geq 0$, se denota por $H^{-r}(0, 2\pi)$ al espacio dual de $H^r(0, 2\pi)$, es decir el espacio de todas las funcionales lineales y acotadas sobre $H^r(0, 2\pi)$

Teorema. A3 Para $r > s$, $H^r(0, 2\pi)$ es un subespacio denso de $H^s(0, 2\pi)$. El operador inclusión de $H^r(0, 2\pi)$ en $H^s(0, 2\pi)$ es compacto.

Observaciones

En el caso particular en que $k = 0$, se tiene

$$W^{0,p}(U) = L^p(U) = \left\{ u : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : \left(\int_U |u|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

Si $k = 1$

$$W^{1,p}(U) = \left\{ u \in L^p(U) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(U), \quad \text{para toda } 1 \leq i \leq n \right\}.$$

Si $k = 2$

$$W^{2,p}(U) = \left\{ u \in L^p(U) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(U), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(U), \quad \text{para toda } 1 \leq i \leq n \right\}.$$

El caso $p = 2$, es un caso importante ya que la norma $\|u\|_{W^{k,2}(U)}$ procede del producto escalar

$$\langle u, v \rangle_{H^k(U)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(U)}.$$

Notación: Se acostumbra escribir

$$H^k(U) = W^{k,2}(U) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

La letra H se usa debido a que $H^k(U)$ es un espacio de Hilbert. Notar que $H^0(U) = L^2(U)$.

Definición A.5 Si $u \in W^{k,p}(U)$, se define su norma como el número

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_U |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } 1 \leq p < \infty; \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \max_U |D^\alpha u|, & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Definición A.6 (i) Sean $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$, $u \in W^{k,p}(U)$. Diremos que u_m converge a u en $W^{k,p}(U)$, y se escribirá

$u_m \rightarrow u$ en $W^{k,p}(U)$ siempre que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m - u\|_{W^{k,p}(U)} = 0.$$

(ii)Escribiremos

$$u_m \rightarrow u \quad \text{en} \quad W_{loc}^{k,p}(U),$$

para indicar que

$$u_m \rightarrow u \quad \text{en} \quad W^{k,p}(V),$$

para cada $V \subset U$

Definición A.7 Se define la clausura del conjunto $C_c^\infty(U)$ en $W^{k,p}(U)$ como el conjunto $W_0^{k,p}(U)$.

De esta forma $u \in W_0^{k,p}(U)$ si y solamente si existen funciones $u_m \in C_c^\infty(U)$ tales que $u_m \rightarrow u$ en $W^{k,p}(U)$. Interpretaremos al conjunto $W_0^{k,p}(U)$ como el conjunto formado por aquellas funciones $u \in W^{k,p}(U)$ tales que

$$D^\alpha u = 0 \quad \text{en} \quad \partial U \quad \text{para toda} \quad |\alpha| \leq k - 1.$$

Notación Se acostumbra escribir $H_0^k(U) = W_0^{k,2}(U)$.

Observación : Si $n = 1$ y U es un intervalo abierto en \mathbb{R} , entonces $u \in W^{1,p}(U)$ si y solamente si u es igual, casi en todas partes a una función absolutamente continua cuya derivada ordinaria (la cual existe casi en todas partes) pertenece a $L^p(U)$. Tal caracterización es solamente para $n = 1$. En general una función puede pertenecer a un espacio de Sobolev y ser discontinua, no acotada o ambas cosas a la vez.

Teorema A.1 Los espacios de Sobolev satisfacen las siguientes proposiciones.

Sea U un abierto tal que $U \subset \mathbb{R}^n$; $0 \leq k$ y $1 \leq p \leq \infty$. Entonces:

1.- $W^{k,p}(U)$ es un espacio de Banach, además si $p = 2$ entonces

$W^{k,2}(U) = H^k(U)$ es un espacio de Hilbert.

2.- $W^{k,p}(U)$ es un espacio separable si $1 \leq p < \infty$

Definición A.8 Un espacio X se dice que es separable si contiene un subconjunto D numerable y denso en X , esto es: $\overline{D} = X$

3.- $W^{k,p}(U)$ es un espacio reflexivo si $1 < p < \infty$

Definición A.9 Se dice que un espacio X es reflexivo, si existe un isomorfismo isométrico entre X y X^{**} , es decir diremos que X es reflexivo si es isométricamente isomorfo a su doble dual.

4.- Si $k < l$ entonces $W^{l,p}(U) \subset W^{k,p}(U)$

Observación Si $k = 0$ se acostumbra escribir $W^{0,p}(U) = L^p(U)$ y entonces de acuerdo a la proposición (4) del teorema anterior, se cumple lo siguiente:

Para $0 \leq k$ $W^{k,p}(U) \subseteq W^{0,p}(U) = L^p(U)$

Las demostraciones estan basadas en gran medida en las propiedades de los espacios $L^p(U)$ Por ejemplo para probar que $W^{k,p}(U)$ es reflexivo se debe hallar un isomorfismo isométrico entre $L^p(U)$ y $(L^p(U))^{**}$ el cual al restringirlo al subespacio $W^{k,p}(U)$ también sea isomorfismo isométrico entre $W^{k,p}(U)$ y $(W^{k,p}(U))^{**}$

Definición A.10 Identidades de Green en \mathbb{R}^2 :

Sea D una superficie de \mathbb{R}^2 con frontera Γ contenida en un abierto U . Sean u, v funciones de clase C^2 definidas en U . Se verifica,

$$\begin{aligned} \int_D v \Delta u dS + \int_D \langle \text{gradu}, \text{grad}v \rangle dS &= \int_\Gamma v \frac{du}{d\vec{n}} ds, \\ \int_D (v \Delta u - u \Delta v) dS &= \int_\Gamma v \frac{du}{d\vec{n}} ds - \int_\Gamma u \frac{dv}{d\vec{n}} ds, \\ \int_D \Delta u dS &= \int_\Gamma \frac{du}{d\vec{n}} ds. \end{aligned}$$

Donde $\frac{du}{d\vec{n}} = D_{\vec{n}}u = \langle \text{gradu}, \vec{n} \rangle$ es la derivada normal de u a lo largo del vector unitario \vec{n} normal a S .

Definición A.11 Función de Green para el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en el disco de radio a .

Mediante el método de las imagenes en un disco de radio a , centrado en el origen del sistema de coordenadas polares, tomando los puntos interiores $M(r, \varphi)$ y $A(\varrho, \psi)$ y el punto $C(a, \varphi)$ en la circunferencia del disco.

$$G(r, \varphi, \varrho, \psi) = \frac{1}{4\pi} \ln \left(\frac{a^4 - 2a^2 r \varrho \cos(\varphi - \psi) + r^2 \varrho^2}{a^2(r^2 - 2r \varrho \cos(\varphi - \psi) + \varrho^2)} \right)$$

Sea r la transformación restricción tal que

$$\begin{aligned} r : C^\infty(\Omega) &\longrightarrow C^\infty(\partial\Omega) \\ u &\longrightarrow u|_{\partial\Omega}. \end{aligned}$$

Teorema. A4 La transformación restricción r se extiende a una transformación acotada y sobreyectiva R tal que:

$$R : H^t(\Omega) \longrightarrow H^{t-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \quad \forall t > \frac{1}{2}.$$

El núcleo de la transformación restricción R es el conjunto $H_0^1(\Omega) \cap H^t(\Omega)$. Más aún la transformación R tiene transformación inversa derecha la cual es acotada, es decir, dada cualquier $f \in H^{t-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ existe un elemento $u \in H^t(\Omega)$ tal que $Ru = f$, y

$$\|u\|_{H^t(\Omega)} \leq C \|f\|_{H^{t-\frac{1}{2}}}$$

Donde $H_0^t(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$ con la norma de $H^t(\Omega)$.

Es esencial que $t > \frac{1}{2}$ ya que no hay una extensión continua correspondiente a $t \leq \frac{1}{2}$.

En el caso particular $t = 1$ se tiene el siguiente resultado.

Teorema. A5 Teorema de la traza:

El operador traza τ tiene una extensión a un operador acotado de $H^1(\Omega)$ hacia $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, donde $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ se identifica con el espacio de Sobolev $H^{\frac{1}{2}}(0, 2\pi)$ de funciones periódicas (ver definición A.3).

$$\tau : H^1(\Omega) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

τ es sobreyectiva y además posee inversa por la derecha, es decir existe un operador lineal acotado E tal que:

$$E : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \longrightarrow H^1(\Omega)$$

y que cumple $\tau \circ E = I$ en $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, es decir E es inversa por la derecha de τ .

Teorema. A6 Sea Γ un subconjunto abierto no vacío de $\partial\Omega$. Existe una constante $C = C(\Omega, \Gamma)$ tal que $\forall u \in H^1(\Omega)$

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|Ru\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \right)$$

Teorema de representación de Riesz (o teorema de representación para espacios de Hilbert).

Teorema. A7 Sea H un espacio de Hilbert con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$; entonces la transformación de H hacia su espacio dual H^* , definida por

$$\begin{aligned} G_H : H &\longrightarrow H^* \\ f &\longrightarrow G_H f = \langle \cdot, f \rangle_H \end{aligned}$$

Es un isomorfismo.

Teorema. A8 La transformación

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : H^1(\Omega) &\longrightarrow H^{-1}(\Omega) \times H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \\ u &\longrightarrow \mathcal{F}(u) = \begin{pmatrix} L_\varepsilon u \\ Ru \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es un isomorfismo. Esto es, para cualesquiera $F \in H^{-1}(\Omega)$ y $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ existe una única $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\mathcal{F}(u) = \begin{pmatrix} F \\ f \end{pmatrix}$$

Esta solución u satisface la desigualdad

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(\|F\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|f\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \right)$$

donde $H^{-1}(\Omega)$ es el espacio dual de $H_0^1(\Omega)$.

A la función u se le llama la solución débil del problema de Dirichlet.

Definición A.12 La transformación Dirichlet-Neumann se define de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} \Lambda_\varepsilon : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) &\longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \\ f &\longrightarrow \Lambda_\varepsilon f = (\varepsilon \nabla u) \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega} = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial\Omega} \end{aligned}$$

donde \vec{n} denota el vector unitario normal exterior a $\partial\Omega$.

Teorema. A9 Si Suponemos que $\varepsilon \in C^1(\bar{\Omega})$. Entonces la transformación Dirichlet-Neumann, Λ_ε , se extiende a una transformación acotada

$$\Lambda_\varepsilon : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

.

Definición A.13 Se define el valor principal de una función $f(x)$ la cual tiene una singularidad real $x_0 \in \mathbb{R}$ como:

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{x_0-\epsilon} f(x)dx + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{x_0+\epsilon}^{+\infty} f(x)dx$$

en caso de que dicho límite exista.

Teorema. A10 Valor Principal de una función definida en \mathbb{C} .

Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica en un dominio abierto Ω , donde:

$$\{z \in \mathbb{C} / \text{Im}z \geq 0\} - \{z_1, z_2, \dots, z_n\} \subseteq \Omega$$

y z_1, z_2, \dots, z_n son singularidades de f , ubicadas en el eje real y todas son polos simples. Si existen constantes $R > 0$, $c > 0$ y $a > 1$, tales que:

$$|f(z)| \leq \frac{c}{|z|^a} \text{ para } \text{Im}z \geq 0 \text{ y } |z| \geq R,$$

entonces el valor principal de Cauchy de $f(x)$ denotado por $v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ existe, y su valor esta dado por la siguiente fórmula de residuos.

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{\text{Im}z_j > 0} \text{res}(f; z_j) + \pi i \sum_{\text{Im}z_j = 0} \text{res}(f; z_j), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Definición A.14 Residuo de una función $f(z)$

Supongamos que $f(z)$ es una función analítica definida en una vecindad de $z_0 \in \mathbb{C}$ (no necesariamente en z_0) con expansión en serie de Laurent.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n, \quad 0 < |z| < r$$

Se define el residuo de $f(z)$ (más correctamente de la forma diferencial compleja $f(z)dz$) como el coeficiente de $\frac{1}{z}$ en la serie de Laurent de $f(z)$, es decir:

$$\text{res}(f(z)dz; z_0) = \text{res}(f(z); z_0) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z)dz = a_{-1}$$

donde Γ denota cualquier curva cerrada simple, la cual rodea a z_0 en sentido positivo, y donde no hay otra singularidad de $f(z)$ dentro y sobre la curva Γ .

Referencias

- [1] M. Cheney, D. Isaacson, **An overview of inversion algorithms for impedance imaging**, Contemporary Mathematics, 122, 29 (1991).
- [2] A. Fraguera, C. Gamio and D. Hinestroza, **The inverse problem of electrical capacitance tomography and its application to gas-oil 2-phase flow imaging**, WSEAS Transactions on Systems, 1(2), 130 (2002).
- [3] A. Fraguera, S. Gómez and J. Oliveros **A new method for the solution of the inverse problem of electrical capacitance tomography and its application to image reconstruction of multiphase flows**. Proceedings of the 5th International Conference on Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice, Cambridge, UK, (2005).
- [4] A. Fraguera, C. Gamio and D. Hinestroza, **An inversion algorithm for the capacitance tomography imaging of two-phase flow regimes**. Proceedings of the 4^a International Conference on Inverse Problems in Engineering, Rio de Janeiro, Brazil, (2002).
- [5] S. Gomez, M. Ono, C. Gamio and A. Fraguera, **Reconstruction of capacitance tomography images of simulated two-phase flow regimes**, submitted to ANM (2002).
- [6] E. A. Hammer and G. A. Johansen, **Process tomography in the oil industry: state of the art and future possibilities**, Measurement and Control, 30, 212 (1997).
- [7] A. Kirsch, **An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems**, AMS 120, Springer, New York, (2011).
- [8] R. Thorn, G. A. Johansen and E. A. Hammer, **Recent Developments in Three-phase flow measurement**, Measurement Science and Technology, 8, 691 (1997).
- [9] W. Q. Yang, M. S. Beck and M. Byars, **Electrical Capacitance Tomography: from design to applications**, Measurement and Control, 28, 261 (1995).
- [10] W. Q. Yang, A. L. Stott, M. S. Beck and C. G. Xie, **Development of capacitance tomographic imaging systems for oil pipeline measurements**, Review of Scientific Instruments, 66, 4326 (1995).

- [11] Pierre Grangeat, **Tomography**, WILEY (2009). First published in France in 2002 by Hermes Science/Lavoisier entitled: La Tomographie and la Tomographie Médicale ©LAVOISIER 2002. First published in Great Britain and the United States in 2009 by ISTE Ltd and John Wiley & Sons, Inc.
- [12] Edited by Mi Wang, **Industrial Tomography Systems and Applications**, Woodhead Publishing Series in Electronic and Optical Materials: Number 71, (2015).
- [13] William H. Hayt Jr. and John A. Buck **Teoría Electromagnética** séptima edición, Mc Graw Hill, (2006).
- [14] John R. Reitz, Frederick J. Milford, Robert W. Christy **Fundamentos de la Teoría Electromagnética** cuarta edición, Addison- Wesley Iberoamericana, (1999).
- [15] J. L. Fernández Marrón, J. Alberdi Primicia, J. M. Barcala Riveira, ”**Desarrollo de Algoritmos de Reconstrucción de Imágenes en Tomografía de Capacitancia Eléctrica**” (2007).
- [16] U. F. Kocks, C. N. Tomé, H. R. Wenk, **Texture and Anisotropy: Preferred Orientations in Polycrystals and their Effect on Materials Properties**, Cambridge University Press (1998).
- [17] Lawrence C. Evans, **Partial Differential Equations**, American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics Volume 19, Second Edition (2010).
- [18] Hervé Le Dret, Brigitte Lucquin, **Partial Differential Equations: Modeling, Analysis and Numerical Approximation**, Birkhäuser (2016).
- [19] Giovanni Leoni, **A First Course in Sobolev Spaces**, American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics Volume 105 (2009).
- [20] Robert A. Adams, **Sobolev Spaces**, Academic Press (1975).
- [21] Sandro Salsa, **Partial Differential Equations in action From Modelling to Theory**, Springer, Unitext, La Matematica per il 3+2 Volume 86 Second Edition (2015).
- [22] Victor Isakov, **Inverse Problems for Partial Differential Equations** Second Edition, Springer, Applied Mathematical Sciences, Volume 127 (2006).
- [23] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, **Electrodinámica de los medios continuos**, Reverté, Curso de Física Teórica, Volumen 8 (1981).
- [24] Yuri A. Melnikov, Max Y. Melnikov, **Green’s Functions Construction and Applications**, De Gruyter Studies in Mathematics 42, (2012).

