UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

División de Estudios de Posgrado

Maestría en Modelación Matemática.

Nociones de Transitividad Topológica en Productos Simétricos Generalizados

TESIS

que para obtener el grado de

Maestra en Modelación Matemática

presenta

Anahí Rojas Carrasco

Directores de tesis:

Dr. Franco Barragán Mendoza

Dr. Sergio Macías Álvarez

Huajuapan de León, Oaxaca *Septiembre de 2017*

Dedicatoria

A mis padres, Rosario Maribel y Naguib Guadalupe.

Agradecimientos

Una vez un hombre dijo que las matemáticas eran como la música, escuchar las notas de cierta melodía puede cambiar en un instante una noche por el día. Pero si al hacer sangrar las yemas de tus dedos pasando de SOL a DO siguiendo el trabajo de un gran compositor, entonces podría uno mismo construir un refugio para los enamorados. Y qué diera yo por poder sanar el alma del desdichado, uniendo las notas que una noche escuché en el silencio de mi más profundo ser.

Desde que inicié este largo camino que aún no termino de recorrer, uno de los sueños por el que desde entonces he luchado, es el de poder contribuir al engrandecimiento de la matemática y que en algún momento en alguien resuenen las enseñanzas que grandes personas me han brindado. Con este trabajo he avanzado tan sólo una pequeña parte de todo el camino que me queda por recorrer y quisiera agradecer a las personas que formaron parte de su elaboración.

A mis padres, Rosario Maribel y Naguib Guadalupe, porque por cada uno de mis sueños cumplidos, ellos han tenido que renunciar a más de dos.
A mis hermanos, Janecxi, Lenin, Yesenia y Diana Laura, que desde lejos me han estado apoyando siempre.
Al Dr. Franco Barragán Mendoza, porque nunca me dejó sola en la elaboración de este trabajo y siempre ha estado al pendiente de que no muera en mí el placer por descubrir todo lo que encierra esta bella área.
Al Dr. Sergio Macías Álvarez, por su apoyo y su confianza a lo largo de la elaboración de este trabajo.
A mis sinodales, por el tiempo dedicado a la revisión de la tesis y por sus sabias observaciones para la mejora de la misma.

SUPONGAMOS QUE

Escribo cinco líneas y los puntos, seguidos de un " entonces" me acercan al final. Escribo otras diez y una coma después de un "por lo tanto" revelan que un épsilon positivo también es negativo. De los grandes he aprendido que no hay que detenerse ni temerle a la verdad.

Anahí Rojas

Índice general

Prefacio

El tema de la tesis se encuentra dentro de las ramas de la matemática conocidas como Topología y Sistemas Dinámicos. En varios fenómenos de la naturaleza, y en la mayoría de las actividades del hombre, el movimiento de los objetos juega un papel imprescindible. La parte de la matemática que se encarga del estudio del movimiento de los objetos y su evolución a través del tiempo se le conoce como Sistemas Dinámicos. De manera intuitiva, un sistema dinámico es un fenómeno de la naturaleza, un sistema físico o un espacio de puntos, cuyo estado evoluciona con el tiempo mediante una ley determinada. Si el tiempo se considera continuo se dice que es un sistema dinámico continuo; por otra parte, si el tiempo se considera o se mide en lapsos, se dice que es un sistema dinámico discreto.

En los últimos 30 años los sistemas dinámicos discretos han tenido un gran desarrollo, obteniendo de esta manera un gran número de publicaciones, pues son muy útiles para modelar diversos problemas de otras ciencias, como en: química, física, biología, medicina y economía, vea [8], [9], [15] y [24]. Por otra parte, además de estudiar la dinámica de los objetos de manera general, podemos analizar su comportamiento respecto a la cercanía o acumulación entre éstos o respecto a ciertos conjuntos, interviniendo de esta forma la topología. La parte de la topología que estudia a los sistemas dinámicos discretos se llama Dinámica Topológica.

En este sentido, sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. La pareja formada por X y f proporcionan un modelo matemático del movimiento, esto es, proporcionan un sistema dinámico discreto, que denotamos por (X, f), cuyo comportamiento depende tanto de f como de X.

Se han definido y clasificado varios sistemas dinámicos discretos, por mencionar algunos: localmente eventualmente sobreyectivos, mezclantes, débilmente mezclantes, transitivos, totalmente transitivos, fuertemente transitivos, caóticos, minimales e irreducibles. Varios de estos sistemas fueron introducidos para espacios métricos y han sido ampliamente estudiados (ver [1], [10] y [24]). En [7], se muestra la relación que existe entre estos sistemas, se observa que todos estos sistemas son transitivos. Particularmente, el concepto de sistema dinámico discreto transitivo, actualmente conocido como transitividad topológica, fue introducido en el año 1920 por G. D. Birkhoff [10], para espacios métricos. Desde entonces, este concepto ha sido estudiado ampliamente (ver [1] y [24]) y a través del tiempo, esta noción ha sido generalizada a espacios topológicos. Además, se han dado otras definiciones muy similares, las cuales están relacionadas o son equivalentes a la transitividad topológica (ver [2] y [25]), entre éstas tenemos: órbita-transitividad, estrictamente órbita-transitividad y ω-transitividad.

En la literatura es común encontrar el estudio sólo de la dinámica individual o puntual. Sin embargo, en matemáticas y en varios fenómenos de la naturaleza se tiene la necesidad de conocer la dinámica de un subconjunto, lo cual motiva a estudiar las propiedades dinámicas en hiperespacios. Un *hiperespacio* de un espacio topológico X es una colección de subconjuntos de X considerada con alguna topología. La teoría de los hiperespacios tiene sus orígenes alrededor de 1900, con los trabajos de F. Hausdorff [18] y L. Vietoris [28].

Dado un espacio topológico X y $n \in \mathbb{N}$, entre los hiperespacios más conocidos se encuentra el hiperespacio $\mathcal{F}_n(X)$ el cual está formado por los subconjuntos de X que tienen a lo más n puntos. El hiperespacio $\mathcal{F}_n(X)$ fue introducido originalmente por K. Borsuk y S. Ulam en 1931 para espacios topológicos, el cual denominaron el n-ésimo producto simétrico de X [11]. Este hiperespacio tuvo sus orígenes en la teoría de continuos, más tarde se analizaron en espacios métricos y posteriormente se inició su estudio en espacios topológicos, ver ([23] y [26]).

Además, si $f : X \to X$ es una función, se define la función inducida $\mathcal{F}_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ por $\mathcal{F}_n(f)(A) = f(A)$, para cada $A \in \mathcal{F}_n(X)$. Se han estudiado varias clases de funciones y su relación con sus respectivas funciones inducidas [5], [6] y [20]. También, es de resaltar que existen varios resultados en cuanto a propiedades dinámicas en hiperespacios, cuando X es un continuo [7], [16] y [20]. Recientemente, en [17], C. Good y S. Macías investigan algunas propiedades topológicas del n-ésimo producto simétrico $\mathcal{F}_n(X)$, cuando X es un espacio topológico de Hausdorff.

Este último trabajo, nos motivó a estudiar propiedades dinámicas, relacionadas con la transitividad topológica, de la función inducida $\mathcal{F}_n(X)$ en el n-ésimo producto simétrico $\mathcal{F}_n(X)$, cuando X es un espacio topológico T_1, propiedades como: localmente eventualmente sobreyectiva, mezclante, débilmente mezclante, transitiva, totalmente transitiva, fuertemente transitiva, caótica, minimal, irreducible, órbita-transitiva, estrictamente órbita-transitiva y ω-transitiva, entre otras.

Para ello, hemos organizado nuestro trabajo de la siguiente manera:

En el primer capítulo, además de presentar los conceptos básicos de topología que necesitaremos para una mejor comprensión del tema, introducimos también, los primeros conceptos relacionados con los sistemas dinámicos discretos. Se definen tipos de sistemas dinámicos más conocidos, entre éstos los transitivos. Además, en este capítulo se da una aplicación de éstos en la modelación matemática.

En el segundo capítulo se introducen otras nociones relacionadas con la transitividad topológica, las cuales fueron introducidas recientemente en [25], entre éstas: órbita-transitiva, estrictamente órbita-transitiva y ω-transitiva. Analizaremos sus relaciones en general, posteriormente daremos condiciones al espacio y a la función para así obtener algunos otros resultados, como se hace en [25].

En el tercer capítulo se inicia el análisis de la dinámica colectiva a través del estudio del n-ésimo producto simétrico para un espacio topológico T_1. Se define una topología para este hiperespacio y se estudian tanto propiedades topológicas como dinámicas.

Finalmente, en el capítulo cuatro, considerando un espacio topológico T_1, digamos X, y una función $f : X \to X$, se estudia el n-ésimo producto simétrico $\mathcal{F}_n(X)$ y la función inducida $\mathcal{F}_n(f)$, para analizar las relaciones entre f y $\mathcal{F}_n(f)$, cuando f o $\mathcal{F}_n(f)$ es: localmente eventualmente sobreyectiva, mezclante, débilmente mezclante, transitiva, totalmente transitiva, fuertemente transitiva, caótica, minimal, irreducible, órbita-transitiva, estrictamente órbita-transitiva y ω-transitiva, entre otras.

Es importante mencionar que, hasta donde sabemos, el problema tratado en el último capítulo sólo se había considerado cuando X es un espacio métrico (o un continuo). Nosotros nos hemos aventurado a generalizar estas ideas, considerando espacios topológicos T_1.

Nociones de Transitividad Topológica en Productos Simétricos Generalizados

Anahí Rojas Carrasco

Septiembre de 2017

Capítulo 1

Dinámica topológica

En este capítulo, presentamos los conceptos básicos que utilizamos a lo largo del desarrollo de la tesis. También se introducen los primeros conceptos de dinámica topológica. Se revisa el concepto de órbita, el cual es uno de los conceptos clave de nuestro trabajo. Se dan a conocer los tipos de sistemas dinámicos discretos que revisaremos y se estudia la relación de éstos con la modelación matemática.

1.1. Notaciones y conceptos básicos

En esta sección introducimos los conceptos básicos que se utilizan a lo largo del trabajo de tesis. Además, se repasan caracterizaciones de algunos de los conceptos que revisamos, con el fin de facilitar el trabajo de demostración en resultados posteriores.

Puesto que uno de los objetivos del trabajo es generalizar algunos resultados a espacios topológicos generales, lo primero que presentamos es el concepto de espacio topológico.

Definición 1.1.1. Sean X un conjunto y $\mathcal{P}(X)$ la colección de los subconjuntos de X. Se dice que $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una ***topología*** sobre X si cumple:

(1) $\emptyset \in \tau$ y $X \in \tau$.

(2) Si $U, V \in \tau$, entonces $U \cap V \in \tau$.

(3) Sea I un conjunto. Si $U_\alpha \in \tau$, para cada $\alpha \in I$, entonces $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau$.

Los elementos de τ se llaman ***abiertos*** y la pareja (X, τ) la llamamos ***espacio topológico***.

Cuatro topologías importantes son las siguientes.

Ejemplo 1.1.2. Sea X un conjunto. La colección $\mathcal{P}(X)$ de todos sus posibles subconjuntos, define una topología para X. Esta topología se conoce como ***topología discreta*** y a la pareja $(X, \mathcal{P}(X))$ como ***espacio discreto***.

Ejemplo 1.1.3. Sea X un conjunto. La colección $\{X, \emptyset\}$ define una topología sobre X. Esta topología se conoce como ***topología indiscreta*** y a la pareja $(X, \{X, \emptyset\})$ como ***espacio indiscreto***.

Ejemplo 1.1.4. Sea $X = \{1, 2\}$. Notemos que para este conjunto existe un total de cuatro topologías. Estas son:

$$\tau_1 = \{\emptyset, X\}; \ \ \tau_2 = \{\emptyset, X, \{1\}\}; \ \ \tau_3 = \{\emptyset, X, \{2\}\}; \ \ \tau_4 = \mathcal{P}(X).$$

Al espacio topológico (X, τ_2) se le llama ***espacio de Sierpiński***.

Ejemplo 1.1.5. Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Al conjunto A se le da una topología denotada y definida por $\tau_A = \{U \cap A : U \in \tau\}$. A la topología τ_A se le llama ***topología restringida*** y al espacio topológico (A, τ_A), se le llama ***subespacio topológico*** de (X, τ).

Un caso particular de los espacios topológicos son los espacios métricos.

Definición 1.1.6. Un ***espacio métrico*** es un conjunto no vacío X junto con una función $d : X \times X \to [0, \infty)$, la cual satisface las siguientes condiciones:

(1) Para cada x y y en X, $d(x, y) \geq 0$.

(2) Para cada x y y en X, $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

(3) Para cada x y y en X, $d(y, x) = d(x, y)$.

(4) Para cada x, y y z en X, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. A esta propiedad se le conoce como la ***desigualdad del triángulo***.

A la función d se le llama ***métrica*** en X. A la pareja (X, d) se le llama espacio métrico. Si no hay riesgo de confusión, lo denotamos simplemente por X.

Ejemplo 1.1.7. Todo espacio métrico es un espacio topológico [12, Ejemplo 2.3.6].

Definición 1.1.8. Dado un conjunto X, definimos una ***sucesión o sucesión infinita*** de elementos de X como una función:

$$x : \mathbb{N} \to X.$$

Si x es una sucesión, representamos el valor de x en i por x_i, en lugar de $x(i)$. Además, denotaremos a la función x como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Definición 1.1.9. Sean (X, d) un espacio métrico y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de X. Se dice que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***converge*** a $x \in X$, si para todo $\epsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$d(x, x_n) < \epsilon \, , \text{para cada} \, n \geq N.$$

En este caso, x se llama el ***límite*** de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Y lo denotamos por $x_n \to x$ o $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Definición 1.1.10. Sea (X,d) un espacio métrico. Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de X se dice que es una ***sucesión de Cauchy*** en (X,d) si tiene la propiedad de que, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$d(x_n, x_m) < \epsilon, \text{ para todo } n, m \geq N.$$

El espacio métrico (X,d) se dice que es ***completo*** si toda sucesión de Cauchy en X es convergente.

Definición 1.1.11. Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Se dice que A es ***cerrado*** en X, si $X \backslash A$ es abierto en X.

Sabemos que existen conjuntos que constan de un único punto, sin embargo, estos conjuntos y el espacio topológico que inducen, no tienen propiedades interesantes para nuestro estudio, es por ello que en este trabajo consideramos espacios topológicos con más de un punto. A continuación se introduce la definición formal de estos conjuntos.

Definición 1.1.12. Sea X un conjunto. Se dice que X es ***no degenerado*** si tiene más de un punto.

En un espacio topológico no degenerado, existen puntos con propiedades particulares con las que otros puntos no cuentan. A estos puntos con propiedades especiales es importante darles un nombre especial.

Definición 1.1.13. Sean X un espacio topológico, $A \subseteq X$ y $a \in X$. Se dice que a es un ***punto adherente*** de A si para cada subconjunto abierto V de X tal que $a \in V$, se cumple que $V \cap A \neq \emptyset$. Al conjunto de todos los puntos adherentes de A en X lo denotamos por $cl_X(A)$ y se llama ***adherencia o clausura*** de A en X. Si no hay confusión se escribe $cl(A)$.

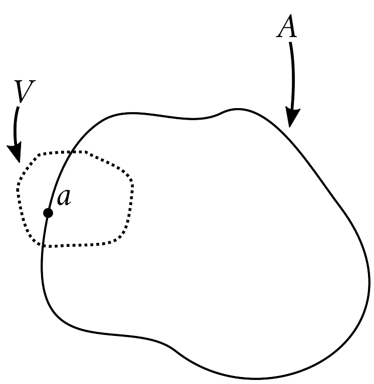


Figura 1.1: Punto de adherencia de un conjunto A.

Ejemplo 1.1.14. Sean X un conjunto y $A \subseteq X$ no vacío. Consideremos el espacio indiscreto $(X, \{X, \emptyset\})$. Se cumple que todo punto $a \in X$ es adherente a A.

En muchas ocasiones es importante conocer las propiedades que satisface un conjunto en particular. Es por ello que en el siguiente teorema, damos a conocer las propiedades que cumple la clausura de un conjunto en general. Una prueba se puede consultar en [12, Proposición 4.3.10].

Teorema 1.1.15. Sean X un espacio topológico y E y F subconjuntos de X. Las siguientes proposiciones son verdaderas.

(1) $cl(E)$ es cerrado en X.

(2) Si $F \subseteq X$ es cerrado en X y $E \subseteq F$, entonces $cl(E) \subseteq F$.

(3) Si $E \subseteq F$, entonces $cl(E) \subseteq cl(F)$.

(4) $cl(E) = \bigcap\{F \subseteq X : F \text{ es cerrado en } X \text{ y } E \subseteq F\}$.

(5) $cl(E \cup F) = cl(E) \cup cl(F)$.

(6) $cl(E \cap F) \subseteq cl(E) \cap cl(F)$.

La prueba del siguiente resultado se puede consultar en [27, Teorema 17.4]

Teorema 1.1.16. Sean X un espacio topológico y $B \subseteq A \subseteq X$. Se cumple que:

$$cl_A(B) = cl_X(B) \cap A.$$

Existen, además, subconjuntos para los cuales se cumple que su clausura contiene a todo el espacio. A estos conjuntos les daremos un nombre especial.

Definición 1.1.17. Sean X un espacio topológico y $E \subseteq X$. Se dice que E es ***denso*** en X si $cl_X(E) = X$.

Ejemplo 1.1.18. En el espacio euclidiano $\mathbb{R}$, el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ y el de los números irracionales $\mathbb{I}$ son densos en $\mathbb{R}$ [12, Ejemplo 4.4.3].

Una caracterización importante de los conjuntos densos es la siguiente [12, pág. 173].

Teorema 1.1.19. Sean X un espacio topológico y $E \subseteq X$. E es denso en X si y sólo si para cada $U \subseteq X$ abierto en X y diferente del vacío, se cumple que $U \cap E \neq \emptyset$.

Otras propiedades que satisfacen ciertos puntos de un espacio topológico son las siguientes.

Definición 1.1.20. Sean X un espacio topológico, $A \subseteq X$ y $a \in A$. Se dice que el punto a es un ***punto interior*** de A si existe un subconjunto abierto V de X tal que $a \in V \subseteq A$. Al conjunto de los puntos interiores de A lo denotamos por $\operatorname{int}_X(A)$ y lo llamamos ***interior*** de A en X. Esto es, $\operatorname{int}(A) = \{a \in A : a \text{ es punto interior de } A\}$.

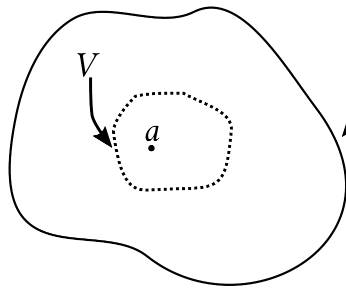


Figura 1.2: Punto interior de un conjunto A.

Ejemplo 1.1.21. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ con la topología $\tau = \{\emptyset, \{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$. Luego, el punto $2 \in X$ es un punto interior del conjunto $\{2, 3\}$ pues existe el conjunto abierto $\{2\}$ en X tal que $2 \in \{2\} \subseteq \{2, 3\}$.

Definición 1.1.22. Sean X un espacio topológico, $A \subseteq X$ y $x \in X$. Se dice que x es un ***punto de acumulación o punto límite*** de A si para cada subconjunto abierto V de X tal que $x \in V$, se cumple que $V \cap (A \backslash \{x\}) \neq \emptyset$. Al conjunto de los puntos de acumulación de X lo llamamos ***conjunto derivado de*** A y lo denotamos por A', es decir, $A' = \{x \in X : x \, \text{es punto de acumulación de} \, A\}$.

Ejemplo 1.1.23. En el Ejemplo 1.1.21, el punto $3 \in X$ es un punto de acumulación del conjunto $A = \{2, 3\}$. Ya que $\{2, 3\} \cap (A \backslash \{3\}) = \{2\}$ y $\{1, 2, 3\} \cap (A \backslash \{3\}) = \{1, 2\}$.

Definición 1.1.24. Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Se dice que $x \in A$ es un ***punto aislado*** de A si existe un subconjunto abierto U de X tal que $U \cap A = \{x\}$.

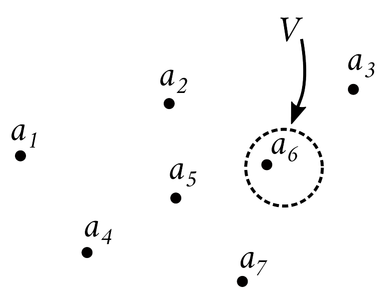


Figura 1.3: Conjunto $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$ formado por puntos aislados.

Ejemplo 1.1.25. En el Ejemplo 1.1.21, el punto $2 \in X$ es un punto aislado del conjunto $A = \{2, 3\}$ ya que existe el subconjunto abierto $\{2\}$ en X tal que $\{2\} \cap A = \{2\}$.

Observación 1.1.26. Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Se tiene que x es un punto aislado de X si y sólo si existe un subconjunto abierto U de X tal que $U = \{x\}$.

El siguiente resultado se puede consultar en [13, pág. 59].

Teorema 1.1.27. Sean X un espacio topológico y $x \in X$. x es un punto aislado de X si y sólo si $\{x\}$ es un subconjunto abierto de X.

Ejemplo 1.1.28. Sea (X, τ) como en el Ejemplo 1.1.21. Luego, el punto $2 \in X$ es un punto aislado, ya que $\{2\} \in \tau$.

Dos caracterizaciones que más adelante vamos a utilizar son las siguientes.

Proposición 1.1.29. Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. A es abierto en X si y sólo si $\text{int}(A) = A$.

Una prueba de la Proposición 1.1.29, se puede consultar en [13, Proposición 2.9] y para la Proposición 1.1.30, se puede consultar [13, Proposición 2.6].

Proposición 1.1.30. Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. A es cerrado en X si y sólo si $A = cl(A)$.

Dado un conjunto X, existen varias subcolecciones de conjuntos que no son una topología para dicho conjunto, sin embargo, algunos de estas pueden ayudar a construir una topología para tal conjunto. Lo cual se muestra en el Teorema 1.1.31.

Teorema 1.1.31. Sean X un espacio topológico y β una colección de subconjuntos de X. Si β satisface:

(1) $X = \bigcup\{B : B \in \beta\}$,

(2) Si $B_1, B_2 \in \beta$ y $x \in B_1 \cap B_2$, entonces existe $B_3 \in \beta$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$,

entonces $\tau_\beta = \{\emptyset\} \cup \{E \subseteq X : E \,\text{es unión de elementos de}\, \beta\}$ es una topología en X.

Cuando uno se centra en el estudio de alguna propiedad que involucre a la colección de los subconjuntos abiertos de un espacio topológico, es de muchísima ayuda restringirse a sólo una pequeña parte de ésta sin perder generalidad. Es aquí cuando aparecen los conceptos de base y subbase.

Definición 1.1.32. Sea (X, τ) un espacio topológico. Una subcolección β de τ es una ***base*** para τ si para cada elemento $A \in \tau$, existe $\mathcal{A} \subseteq \beta$ tal que $A = \bigcup \mathcal{A}$.

Definición 1.1.33. Sean (X, τ) un espacio topológico y $\delta \subseteq \tau$. Se dice que δ es una ***subbase*** para τ si para cada $A \in \tau \backslash \{\emptyset\}$ y cada $x \in A$, existe $\mathcal{A} \subseteq \delta$ finita y no vacía tal que $x \in \bigcap \mathcal{A} \subseteq A$.

Un resultado muy conocido, cuya demostración se puede consultar en [13, Proposición 1.18], es el siguiente.

Teorema 1.1.34. Sea (X, τ) un espacio topológico. Una subcolección β de la topología τ en X es una base de τ si y sólo si para cada $A \in \tau \backslash \{\emptyset\}$ y cada $x \in A$, existe $B \in \beta$ con la propiedad de que $x \in B \subseteq A$.

Sabemos que existen espacios topológicos de los cuales podemos estudiar sus propiedades. Sin embargo, el estudio de ciertos espacios topológicos con propiedades especiales resulta, la mayoría de las veces muy interesante. A continuación introducimos la definición de algunos de estos espacios topológicos y también damos un ejemplo de cada uno de ellos con la finalidad de que el concepto quede lo más claro posible.

Definición 1.1.35. Sea X un espacio topológico. Se dice que X es un ***espacio topológico*** $\boldsymbol{T_0}$ si para cada par de puntos distintos x y y en X, existe un subconjunto abierto U de X tal que $x \in U$ y $y \notin U$.

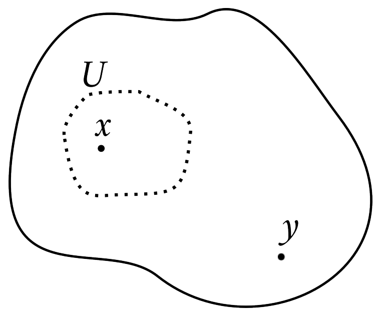


Figura 1.4: Espacio T_0.

Ejemplo 1.1.36. Sea $X = \{1, 2, 3\}$. Consideremos la siguiente colección de subconjuntos de X, $\tau = \{X, \emptyset, \{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$. Notemos que τ define una topología para X. Más aún, X con la topología τ es un espacio topológico T_0.

Ejemplo 1.1.37. Sean $X = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\} \subseteq [0, 1]$ con la métrica usual y $Y = [0, 1]$ con la topología $\tau = \{[0, t) : t \in (0, 1]\} \cup \{\emptyset, Y\}$. Luego, el espacio $X \times Y$ es T_0 [25, Ejemplo 2.10].

Definición 1.1.38. Sea X un espacio topológico. Se dice que X es un ***espacio topológico*** $\boldsymbol{T_1}$ si para cualesquiera dos puntos distintos x y y en X, existen subconjuntos abiertos U y V de X tales que $x \in U \backslash V$ y $y \in V \backslash U$.

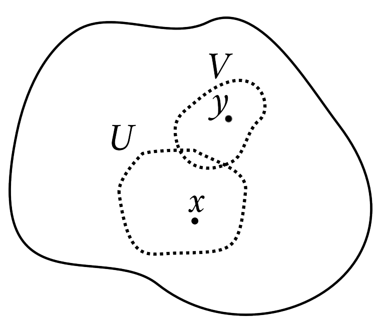


Figura 1.5: Espacio T_1.

Ejemplo 1.1.39. Sea $X = \{1, 2, 3\}$. Consideremos la siguiente colección de subconjuntos de X, $\tau = \{X, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$. Notemos que τ define una topología para X. Más aún, X con dicha topología es un espacio topológico T_1.

Ejemplo 1.1.40. Sea $X = \mathbb{R}$ y $\tau = \{A \subseteq X : A = \emptyset \text{ o } X \backslash A \text{ es finito}\}$. Se cumple que (X, τ) es un espacio topológico T_1.

Para revisar una prueba del Teorema 1.1.41, sugerimos consultar [13, Corolario 5.7].

Teorema 1.1.41. Un espacio topológico X es T_1 si y sólo si todo subconjunto finito de X es un subconjunto cerrado en X.

En particular, los conjuntos con un solo punto son subconjuntos cerrados en un espacio X que sea T_1.

Invitamos al lector a revisar nuevamente la propiedad que tienen los espacios topológicos T_1. Como habrán notado ya, los subconjuntos abiertos de la definición, pueden o no tener intersección vacía. Sin embargo, cuando se da el caso en el que $U \cap V = \emptyset$, se da a este espacio topológico un nombre distinto.

Definición 1.1.42. Sea X un espacio topológico. Se dice que X es un ***espacio topológico de Hausdorff o T_2*** si para cualesquiera par de puntos distintos x y y de X, existen abiertos U y V de X tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

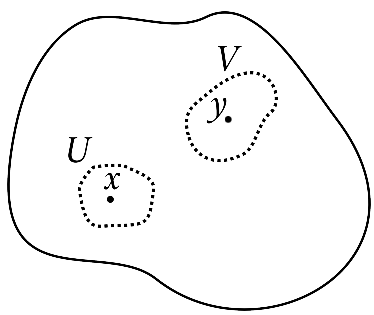


Figura 1.6: Espacio T_2.

Ejemplo 1.1.43. Consideremos al espacio topológico (X, τ) del Ejemplo 1.1.39. Como se podrá verificar fácilmente, este espacio topológico tiene la propiedad de Hausdorff.

No es difícil verificar que todo espacio topológico T_2 es T_1 y todo espacio topológico T_1 es T_0 (ver Figuras 1.4, 1.5 y 1.7).

En las Definiciones 1.1.42 y 1.1.38, se toman puntos en el espacio y se garantiza la existencia de un par de subconjuntos abiertos con ciertas propiedades. Algo todavía más interesante y sorprendente es saber que algunos espacios satisfacen esta propiedad pero ahora separando puntos de subconjuntos cerrados.

Definición 1.1.44. Sea X un espacio topológico. Se dice que X es un ***espacio topológico regular*** si para cada subconjunto cerrado $F \subseteq X$ y para cada $x \in X \backslash F$, existen subconjuntos abiertos U y V de X tales que $F \subseteq U$, $x \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

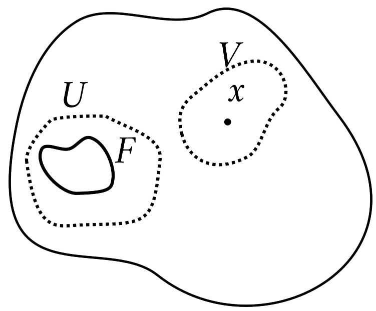


Figura 1.7: Espacio Regular.

Definición 1.1.45. Se dice que un espacio topológico X es T_3 si es regular y T_1.

Notemos que, de la definición se tiene que todo espacio T_3 es un espacio T_2.
A continuación se da un ejemplo de un espacio topológico que es T_3.

Ejemplo 1.1.46. Cualquier espacio métrico es un espacio T_3.

Ejemplo 1.1.47. Sea $X = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \subseteq [0, 1]$, con la métrica usual. Luego, X es un espacio T_3.

En un espacio topológico existen subconjuntos que contienen algún subconjunto abierto del espacio, como es el caso de los subconjuntos abiertos en los cuales siempre podemos encontrar un subconjunto abierto, en este caso $\text{int}(U) \subseteq U$. Una propiedad todavía más fuerte resulta cuando un subconjunto no sólo contiene un subconjunto abierto si no que además contiene la clausura de este abierto. La prueba del siguiente resultado se puede consultar en [27, Lema 31.1]

Proposición 1.1.48. Sea X un espacio topológico. El espacio X es regular si y sólo si para cualquier $x \in X$ y cualquier subconjunto abierto U de X tal que $x \in U$, existe un subconjunto abierto V de X tal que $x \in V$ y $cl(V) \subseteq U$.

Como muestra la Proposición 1.1.48, dado un conjunto abierto U en un espacio topológico T_1 y regular, para cada elemento $x \in U$ podemos hallar un subconjunto V abierto en X tal que $x \in V \subseteq cl(V) \subseteq U$. Existen otros espacios en los cuales sólo se puede garantizar la existencia de algún subconjunto V de X con esta propiedad.

Definición 1.1.49. Sea X un espacio topológico. Se dice que X es ***pseudo-regular*** si para cualquier conjunto abierto y no vacío U de X existe un subconjunto abierto y no vacío V de U tal que $cl(V) \subseteq U$.

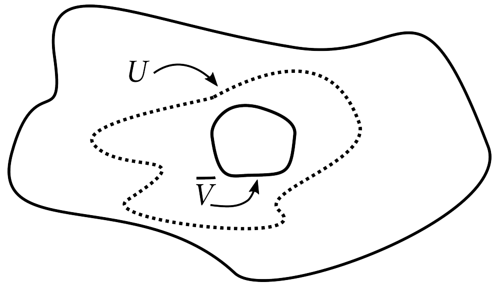


Figura 1.8: Espacio pseudo-regular.

De la definición, claramente se tiene que cada espacio regular es pseudo-regular. Sin embargo, a continuación se da un ejemplo de un espacio pseudo-regular que no es regular. A los interesados en conocer los detalles en el desarrollo del Ejemplo 1.1.50, se les invita a consultar [25, Ejemplo 5.4].

Ejemplo 1.1.50. Sean los subconjunto X_n (con n un natural) del plano $\mathbb{R}^2$, donde:
$X_0 = \{(r, 0) \in \mathbb{R}^2 : 0 < r < 1\}$ y
$X_n = \{(\frac{k}{2^n}, \frac{1}{2^n}) \in \mathbb{R}^2 : k = 1, 3, \cdots, 2^n - 1\}$, para $n \in \mathbb{N}$.

Sea $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$. Definimos la proyección $p : X \to \mathbb{R}$ por $p(r, s) = r$, para cualquier $(r, s) \in X$. Sea

$$\mathcal{B} = \{U_{abc} : 0 \leq a < b \leq 1 \text{ y } c > 0\} \cup \{U_{abcx} : c > 0,\ x \in X \backslash X_0 \text{ y } 0 \leq a < p(x) < b \leq 1\}.$$

Donde:
$U_{abc} = \{(r, s) \in X : a < r < b,\ 0 \leq s < c\}$ y $U_{abcx} = (U_{abc} \backslash \{(p(x), 0)\}) \cup \{x\}$.
Luego, existe una única topología τ en X tal que $\mathcal{B}$ es una base para τ. Además, (X, τ) es pseudo-regular pero no es regular.

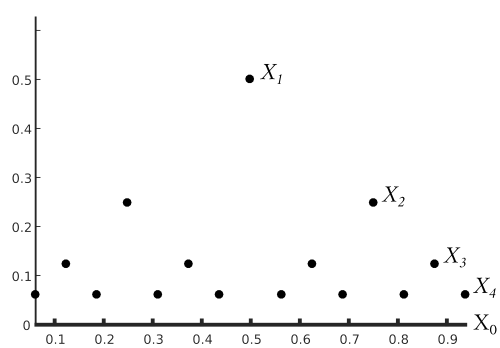


Figura 1.9: Representación gráfica del espacio X definido en el Ejemplo 1.1.50.

Muchos conceptos en matemáticas tienen un significado muy similar al que se le da en el lenguaje coloquial. Como es el caso del concepto de vecindad.

Definición 1.1.51. Sean X un espacio topológico, $V \subseteq X$ y $x \in V$. Se dice que V es ***vecindad de*** x en X si existe un subconjunto abierto U de X tal que $x \in U \subseteq V$. A la colección de vecindades de x en X le llamamos ***sistema de vecindades del punto*** x y lo denotamos por $\mathcal{V}(x)$.

Podemos considerar al punto x como una persona, al conjunto U como el cuarto que renta dicha persona en una vecindad V. Esta vecindad V, será la vecindad de la persona x, si existe un cuarto por el cual paga el alquiler.

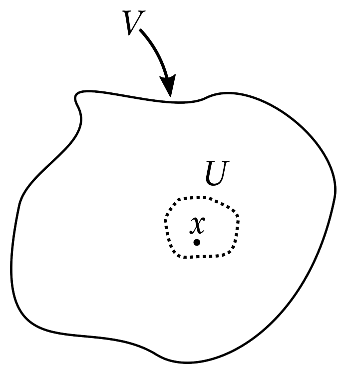


Figura 1.10: Vecindad de x.

Definición 1.1.52. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{V}(x)$. Se dice que $\mathcal{B}(x)$ es una ***base de vecindades de*** x en X si para cada $V \in \mathcal{V}(x)$ podemos encontrar $B \in \mathcal{B}(x)$ tal que $B \subseteq V$.

Definición 1.1.53. Sea (X, τ) un espacio topológico. Se dice que X es:

(1) ***Primero numerable*** si cada punto $x \in X$ tiene una base de vecindades numerable.

(2) ***Segundo numerable*** si existe una base numerable para τ.

Otro concepto muy importante dentro de la topología es el de conexidad, intuitivamente, podemos imaginarnos un espacio conexo, como un espacio que consta de una sóla pieza. Veamos la definición formal.

Definición 1.1.54. Sea X un espacio topológico. Se dice que X es ***disconexo*** si existen subconjuntos abiertos y no vacíos U y V de X tales que $X = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$. Si X no es disconexo, se dice que es ***conexo***.

Una prueba del Teorema 1.1.55 se puede consultar en [27, Proposición 6.1.7].

Teorema 1.1.55. Sea X un espacio topológico. X es conexo si y sólo si los únicos subconjuntos abiertos y cerrados de X son X y $\emptyset$.

Existen puntos que no son aislados en un espacio topológico, pero sí lo son en un subconjunto del espacio total [25, Definición 2.2].

Definición 1.1.56. Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Se dice que x es un punto ***casi aislado*** de X si existe un subconjunto denso A de X tal que $x \in A$ y x es un punto aislado en A.

Cuando uno piensa en estos dos conceptos, nos aventuramos a asegurar que todo punto aislado es casi aislado pues el nombre de estos dos puntos lo sugiere. Aunque la prueba de este resultado es inmediata, a continuación damos el resultado formal e incluimos su demostración.

Teorema 1.1.57. Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Si x es un punto aislado en X, entonces x es un punto casi-aislado en X.

Demostración. Supongamos que x es un punto aislado de X. Ya que X es un subconjunto denso de X y $x \in X$, se tiene que x es un punto casi aislado de X. ■

Con el fin de que el lector quede convencido de que los conceptos de punto aislado y casi-aislado, no son equivalentes de manera general, damos a continuación un ejemplo en el cual un punto es casi-aislado pero no aislado.

Ejemplo 1.1.58. Sea $Y = [0, 1]$ con la topología $\tau = \{[0, t) : t \in (0, 1]\} \cup \{\emptyset, Y\}$. Luego, el 0 es un punto casi aislado de Y. En efecto, ya que si U es un subconjunto abierto en (Y, τ), entonces $U = [0, t)$, para algún $t \in (0, 1]$. Así, $U \cap \{0\} \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\{0\}$ es un subconjunto denso de Y y el punto 0 es aislado en $\{0\}$. Usando los mismos argumentos se tiene que el 0 no es un punto aislado de Y. Más aún, como $\text{ínf}(A) = 0$ para cualquier subconjunto denso A de Y, se sigue que Y no tiene más puntos casi aislados que 0. Con $\text{ínf}(A)$ denotamos al elemento ínfimo del conjunto A, [25, Ejemplo 2.3].

En el siguiente resultado presentamos algunas caracterizaciones del concepto de punto casi-aislado que son de gran ayuda en el desarrollo del trabajo de tesis.

Lema 1.1.59. Sea X un espacio topológico. Se cumple que:

(1) Un punto $x \in X$ es un punto casi aislado de X si y sólo si $\text{int}(cl(\{x\})) \neq \emptyset$. Además, $x \in \text{int}(cl(\{x\}))$.

(2) X no tiene puntos casi aislados si y sólo si para cualquier subconjunto abierto y no vacío U de X, todo subconjunto denso de U contiene al menos dos puntos.

Demostración. (1) Supongamos que $x \in X$ es un punto casi aislado de X. Veamos que $\text{int}(cl(\{x\})) \neq \emptyset$. Por hipótesis, existe un subconjunto denso A de X tal que x es un punto aislado en A. Esto es, existe un subconjunto abierto U en X tal que $U \cap A = \{x\}$. Veamos que $A \backslash U \subseteq A \backslash \{x\}$. Sea $y \in A \backslash U$. Luego, $y \in A$ y $y \notin U$. Esto es, $y \notin A \cap U = \{x\}$. Así, $y \notin \{x\}$. Consecuentemente, $y \in A \backslash \{x\}$. Por lo tanto, $A \backslash U \subseteq A \backslash \{x\}$. Ahora veamos que $A \backslash \{x\} \subseteq A \backslash U$. Sea $y \in A \backslash \{x\}$. Luego, $y \in A$ y $y \notin \{x\}$. De aquí, $y \in A$ y $y \notin A \cap U$. Así, $y \notin U$. De lo anterior, resulta que, $y \in A \backslash U$. Por lo tanto, $A \backslash \{x\} \subseteq A \backslash U$. Así, $A \backslash \{x\} = A \backslash U$. De aquí:

$$cl(A \backslash \{x\}) = cl(A \backslash U) \subseteq cl(X \backslash U) = X \backslash U \tag{1.1.1}$$

Notemos también que:

$$X = cl(A) = cl(\{x\} \cup (A \backslash \{x\})) = cl(\{x\}) \cup cl(A \backslash \{x\}). \tag{1.1.2}$$

De (1.1.1) y (1.1.2), se tiene que:

$$U \subseteq X \backslash cl(A \backslash \{x\}) = [cl(\{x\}) \cup cl(A \backslash \{x\})] \backslash cl(A \backslash \{x\}) \subseteq cl(\{x\}).$$

Nuevamente ya que U es un subconjunto abierto de X, se tiene que $U \subseteq \text{int}(cl(\{x\}))$ y, como $U \neq \emptyset$, se tiene que $\text{int}(cl(\{x\})) \neq \emptyset$.

Recíprocamente, supongamos que $V = \text{int}(cl(\{x\})) \neq \emptyset$. Veamos que x es un punto casi aislado de X. Sea $z \in V$. Luego, existe un subconjunto abierto U de X tal que $z \in U \subseteq cl(\{x\})$. De aquí que $U \cap \{x\} \neq \emptyset$. En consecuencia, $x \in U$. Por lo tanto, $x \in \text{int}(cl(\{x\}))$, esto es, $x \in V$. Sea $A = \{x\} \cup X \backslash V$. Ya que V es un conjunto abierto y $A \cap V = \{x\}$, se tiene que x es un punto aislado de A. Más aún, puesto que $X = V \cup X \backslash V \subseteq cl(\{x\}) \cup cl(X \backslash V) = cl(\{x\} \cup X \backslash V) = cl(A)$, se tiene que A es un subconjunto denso en X. Por lo tanto, x es un punto casi aislado de X.

(2) Supongamos que X no tiene puntos casi aislados y veamos que para cualquier subconjunto abierto y no vacío U de X, todo subconjunto denso de U contiene al menos dos puntos. Nuevamente la prueba se hará por contrarrecíproco. Supongamos que existe un subconjunto abierto y no vacío U de X y un punto $x \in U$ tal que $\{x\}$ es un subconjunto denso en U. Esto es, $cl(\{x\}) = U$. Puesto que U es un conjunto abierto, $U \subseteq \text{int}(cl\{x\})$. Luego, ya que $U \neq \emptyset$, se tiene que $\text{int}(cl(\{x\})) \neq \emptyset$. Así, por parte la (1) de este lema, se tiene que x es un punto casi aislado.

Ahora supongamos que para cualquier subconjunto abierto y no vacío U de X, todo subconjunto denso de U contiene al menos dos puntos y veamos que X no tiene puntos casi aislados. La prueba se hará por contrarrecíproco. Sea $x \in X$ un punto casi aislado. Por la parte (1) de este lema, se tiene que $\text{int}(cl(\{x\})) \neq \emptyset$. Veamos que $\text{int}(cl(\{x\})) = cl(\{x\})$. Sea $V \cap \text{int}(cl(\{x\}))$ un subconjunto abierto no vacío de $\text{int}(cl(\{x\}))$. Luego, existe $z \in V \cap \text{int}(cl(\{x\}))$. De aquí, $V \cap \{x\} \neq \emptyset$. En consecuencia, $x \in V$. Además, $x \in \text{int}(cl(\{x\}))$. Por lo tanto, $x \in V \cap \text{int}(cl(\{x\}))$. Así, $cl(\{x\}) = \text{int}(cl(\{x\}))$. Esto es, $\{x\}$ es un subconjunto denso del subconjunto abierto y no vacío $\text{int}(cl\{x\})$.

De (1) y (2), se tiene el resultado. ■

Después de revisar las relaciones que hay entre los conceptos de punto casi aislado y punto aislado, de manera natural surge la inquietud de saber las condiciones bajo las cuáles estos dos conceptos son equivalentes. Esto nos lleva a presentar el siguiente resultado.

Lema 1.1.60. Sea X un espacio topológico T_1. Un punto $x \in X$ es un punto aislado de X si y sólo si x es un punto casi aislado de X.

Demostración. En virtud del Lema 1.1.59, es suficiente verificar que si x es punto casi aislado de X, entonces x es un punto aislado de X.

Supongamos que $x \in X$ es un punto casi aislado de X. Por el Lema 1.1.59, parte (1), se tiene que $\text{int}(cl(\{x\})) \neq \emptyset$. Por hipótesis, ya que X es un espacio T_1, por el Teorema 1.1.41, $cl(\{x\}) = \{x\}$. De aquí que $\text{int}(cl(\{x\})) = \text{int}(\{x\}) \neq \emptyset$. Lo cual implica que $\{x\}$ es un subconjunto abierto de X. Por lo tanto, por el Teorema 1.1.27, x es un punto aislado de X. ■

Existen espacios topológicos en los cuales no es posible encontrar puntos aislados, como es el caso de los conjuntos conexos que anteriormente definimos.

Teorema 1.1.61. Sea X un espacio topológico T_1. Si X es conexo, entonces X no tiene puntos aislados.

Demostración. Supongamos que existe $x_0 \in X$ tal que x_0 es un punto aislado de X. Del Teorema 1.1.27, se sigue que $\{x_0\}$ es un subconjunto abierto de X. Luego, como X es un espacio T_1, se sigue que el conjunto $\{x_0\}$ es además un subconjunto cerrado. Por lo tanto, por el Teorema 1.1.55 , X no es conexo. Así, se tiene el resultado. ■

En la Definición 1.1.22, se requiere la existencia de un subconjunto abierto U de X tal que $(A \backslash \{x\} \cap U) \neq \emptyset$. Es interesante saber que existe un resultado que nos asegura en adición, que esta intersección además de ser no vacía, es un subconjunto infinito [27, Teorema 17.9]. Veamos esto de manera formal.

Teorema 1.1.62. Sean X un espacio topológico T_1, $A \subseteq X$ y $x \in X$. Si x es un punto de acumulación de A, entonces el conjunto $V \cap (A \backslash \{x\})$ es infinito, para cualquier vecindad V de x.

Definición 1.1.63. Sea X un espacio topológico. Se dice que X es ***perfecto*** si no tiene puntos aislados.

Ejemplo 1.1.64. Del Teorema 1.1.61 se tiene que los espacios conexos T_1 son perfectos.

Una propiedad fuerte que tienen ciertos espacios topológicos es la de compacidad. Antes de dar la definición formal, tratamos de explicar este concepto con un ejemplo sencillo.

Imaginemos que asistimos a un concierto de la banda de rock Bizzonte y al llegar al lugar nos damos cuenta de que el lugar no está techado de manera uniforme. Después de una hora de concierto, la lluvia hace que los asistentes se muevan de sus mesas y busquen refugio en las partes del lugar donde sí hubo oportunidad de techar. A los pocos minutos te das cuenta de que bastaron cubrir ciertas partes del bar para que esa noche todos los asistentes lograran quedar protegidos de la lluvia. Esto nos lleva a la conclusión de que si esa noche un número más grande de gente hubiera llegado a escuchar a Bizzonte, no hubiera sido posible para los dueños del bar proteger de la lluvia a todos sus clientes. Así, podemos decir que el conjunto de personas que asistieron al concierto, forman un conjunto compacto porque fue posible cubrirlos con un número finito de partes techadas. Ahora veamos la definición formal de espacio compacto.

Definición 1.1.65. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{U}$ una colección de subconjuntos de X. Se dice que $\mathcal{U}$ es una ***cubierta*** de X si $X = \bigcup \mathcal{U}$. Si, además, cada uno de los elementos de $\mathcal{U}$ es un subconjunto abierto de X, se dice que $\mathcal{U}$ es una ***cubierta abierta*** de X.

Definición 1.1.66. Sean X un espacio topológico, $\mathcal{U}$ una cubierta de X y $\mathcal{V}$ una subcolección de $\mathcal{U}$. Se dice que $\mathcal{V}$ es una ***subcubierta*** de $\mathcal{U}$ para X si $\bigcup \mathcal{V} = X$.

Definición 1.1.67. Sea X un espacio topológico. Se dice que X es ***compacto*** si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita.

Algunos ejemplos de conjuntos compactos son los siguientes.

Ejemplo 1.1.68. El intervalo cerrado $[a, b]$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ [13, Ejemplo 7.2].

Ejemplo 1.1.69. Cualquier espacio X que contenga un número finito de puntos es, trivialmente, compacto, pues cualquier cubierta abierta tendrá una subcubierta finita.

También existen subconjuntos que no cumplen esta propiedad, veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.1.70. El intervalo $(0, 1]$ no es compacto ya que la cubierta abierta

$$\mathcal{A} = \left\{ \left(\frac{1}{n}, 1 \right] : n \, \text{es un natural} \right\},$$

no contiene subcubiertas finitas para el intervalo $(0, 1]$ ([27, pág. 187]).

Cuando estudiamos las propiedades de un espacio topológico, nos preguntamos en qué subconjuntos de este espacio se preservan dichas propiedades. Tal es el caso de los espacios compactos. Sea X un espacio compacto, nos interesan los subconjuntos de X que preservan dicha propiedad.

Teorema 1.1.71. Sean X un espacio topológico compacto y A un subconjunto de X. Si A es cerrado en X, entonces A es compacto.

Una prueba del Teorema 1.1.71, se encuentra en [13, Proposición 7.5]. Otra propiedad relacionada a la compacidad y que más adelante utilizamos es la siguiente.

Teorema 1.1.72. Sean X un espacio topológico compacto y $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una familia de subconjuntos cerrados y no vacíos de X tales que $X_{n+1} \subseteq X_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Si $Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$, entonces $Y \neq \emptyset$.

Demostración. La prueba la haremos por contradicción. Supongamos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = \emptyset$. Luego, $X = X \backslash (\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n)$. De aquí, $\bigcup_{n=1}^{\infty} (X \backslash X_n) = X$. Puesto que X es compacto y $X \backslash X_n$ es abierto, para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $X_{n_1}, \ldots, X_{n_k}$ tales que $X = \bigcup_{j=1}^{k} (X \backslash X_{n_j})$. Sea $m = \text{máx}\{n_1, \ldots, n_k\}$. Luego, $X = X \backslash X_m$. De aquí, $X_m = \emptyset$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \neq \emptyset$. ■

Otro resultado referente a la compacidad es el que se muestra en el Teorema 1.1.73 y una prueba de su demostración se encuentra en [27, Teorema 28.1]

Teorema 1.1.73. Sea X un espacio métrico. Si X es compacto, entonces todo subconjunto infinito de X posee un punto de acumulación en X.

Definición 1.1.74. Sea X un espacio topológico. Se dice que X es ***parcialmente compacto y pseudo-regular*** si existe un subconjunto abierto y no vacío U de X tal que $cl(U)$ es un subespacio de X compacto y pseudo-regular.

Ejemplo 1.1.75. El espacio topológico definido en el Ejemplo 1.1.50, es parcialmente compacto y pseudo-regular.

Una herramienta poderosa para el estudio de los espacios topológicos son ciertas funciones con propiedades especiales. El estudio de ellas nos ayuda por ejemplo, a conocer las propiedades de un espacio topológico a partir de las propiedades que se conocen de otro espacio topológico.

Definición 1.1.76. Una función entre conjuntos $f : X \to Y$ se dice que es:

(1) ***Inyectiva (o uno a uno)*** si para cualesquiera $a_1, a_2 \in X$, se tiene que si $a_1 \neq a_2$, entonces $f(a_1) \neq f(a_2)$.

(2) ***Sobreyectiva o suprayectiva*** si $f(X) = Y$.

(3) ***Biyectiva*** si es a la vez inyectiva y sobreyectiva.

Definición 1.1.77. Sea X un conjunto. La función $id_X : X \to X$ dada por $id_X(z) = z$, para cada $z \in X$ se llama ***función identidad*** en X.

En el Teorema 1.1.78, se enumeran algunas propiedades básicas que cumplen las funciones, respecto a imagen e imagen inversa de uniones e intersecciones de familias de conjuntos. Su prueba se puede consultar en [13, Proposición A.18] y [13, Proposición A.19].

Teorema 1.1.78. Sea $f : X \to Y$ una función entre conjuntos. Consideremos $\{A_i : i \in I\}$ y $\{B_j : j \in J\}$ familias de conjuntos en X y Y, respectivamente. Se cumplen las siguientes propiedades:

(1) $f\left(\bigcap\{A_i : i \in I\}\right) \subseteq \bigcap\{f(A_i) : i \in I\}$.

(2) $f\left(\bigcup\{A_i : i \in I\}\right) = \bigcup\{f(A_i) : i \in I\}$.

(3) $f^{-1}\left(\bigcap\{B_i : i \in I\}\right) = \bigcap\{f^{-1}(B_i) : i \in I\}$.

(4) $f^{-1}\left(\bigcup\{B_i : i \in I\}\right) = \bigcup\{f^{-1}(B_i) : i \in I\}$.

(5) $f(f^{-1}(B_i)) \subseteq B_i$, la igualdad ocurre si f es sobreyectiva.

(6) $A_i \subseteq f^{-1}(f(A_i))$, la igualdad ocurre si f es inyectiva.

Además, existen funciones que se pueden definir a partir de una función ya definida, tal es el caso de la función restricción.

Definición 1.1.79. Sean X y Y conjuntos, $C \subseteq X$ y $f : X \to Y$ una función. La función $g : C \to Y$ tal que $g(c) = f(c)$, para todo $c \in C$ se llama la ***restricción*** de f a C y se denota por $f|_C$.

Existen muchas funciones con propiedades muy interesantes y que, además, nos ayudan en el estudio de los espacio topológicos y sus propiedades. De todas estas, nosotros nos centramos en las funciones continuas.

Definición 1.1.80. Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Se dice que f es ***continua en un punto*** $x_0 \in X$ si para cualquier subconjunto abierto A de Y que contiene a $f(x_0)$, existe un subconjunto abierto B de X que contiene a x_0 y que satisface $f(B) \subseteq A$. Se dice que f es ***continua en*** X si es continua en cada punto de X. En la Figura 1.11, se da una idea geométrica de esta definición.

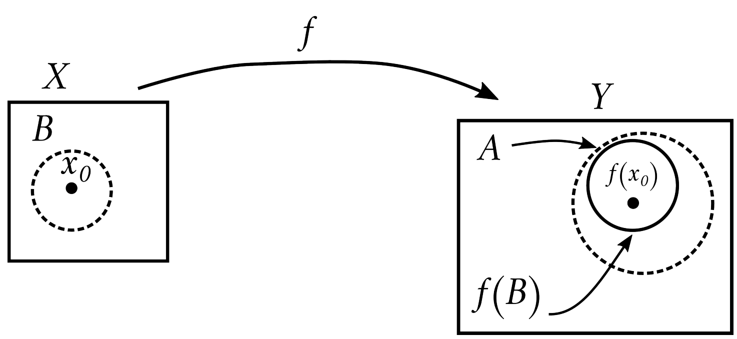


Figura 1.11: Función continua en el punto x_0.

La prueba del siguiente resultado se puede consulta en [27, Teorema 18.1].

Teorema 1.1.81. Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Las siguientes condiciones son equivalentes.

(1) f es continua.

(2) Para cualquier abierto U de Y, $f^{-1}(U)$ es abierto en X.

(3) $f^{-1}(F)$ es cerrado en X, para cualquier cerrado F de Y.

(4) $f(cl_X(A)) \subseteq cl_Y(f(A))$, para cualquier $A \subseteq X$.

Veamos las consecuencias del Teorema 1.1.81 en los siguientes dos ejemplos.

Ejemplo 1.1.82. Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Si X tiene la topología discreta, entonces $f^{-1}(B)$ es abierto en X para cualquier subconjunto B de Y, así, por el Teorema 1.1.81, f es continua.

Ejemplo 1.1.83. Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Si Y tiene la topología indiscreta, entonces f es continua.

Teorema 1.1.84. Sean X y Y espacios topológicos, A un subespacio de X y $f : X \to Y$ una función. Si f es continua, entonces $f\mid_A$ es continua.

Definición 1.1.85. Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función biyectiva. Se dice que f es un ***homeomorfismo*** si tanto f como su inversa f^{-1} son continuas. Los espacios topológicos X y Y son llamados ***homeomorfos*** si existe un homeomorfismo entre ellos.

Definición 1.1.86. Sea X un espacio topológico. Se dice que X es ***parcialmente completable*** si existe un subconjunto abierto y no vacío U de X tal que $cl(U)$ es homeomorfo a un espacio métrico completo.

En [25, Ejemplo 5.5], se da un ejemplo de un espacio parcialmente completable.

Para concluir con esta sección, introducimos un subconjunto que se define a partir de subconjuntos dados y que más adelante vamos a utilizar en nuestro trabajo.

Definición 1.1.87. Sea $\{(X_i, \tau_i)\}_{i=1}^{n}$ una colección de espacios topológicos no vacíos. Definimos y denotamos su ***producto cartesiano*** como el conjunto:

$$\prod_{i=1}^{n} X_i = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_j \in X_j \,, \text{para cada}\, j \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Este espacio es considerado con la topología producto, la cual, tiene como base la colección $\beta = \{U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n : U_i \in \tau_i, \text{ para cada}\, i \in \{1, \ldots, n\}\}$ [27, pág. 98].

La prueba del siguiente resultado se puede consultar en [13, Teorema 7.13].

Teorema 1.1.88. Sea $\{(X_i, \tau_i)\}_{i=1}^{n}$ una colección no vacía de espacios topológicos no vacíos. El producto $\Pi_{i=1}^{n} X_i$ es un espacio compacto si y sólo si el espacio X_i es compacto para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

1.2. Iteración de funciones

En esta sección vamos a trabajar lo que se conoce como dinámica puntual. Pero antes de empezar, damos las notaciones básicas que necesitamos.

Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. Para $k \in \mathbb{N}$, la k-ésima iteración de f se define como la composición reiterada de f consigo misma k veces y la denotamos por f^k. Esto es, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$ y en general $f^{k+1} = f \circ f^k$. Se entiende que $f^1 = f$ y se define $f^0 = id_X$ la función identidad de X. Debe quedar claro que $f^k \circ f^s = f^{k+s}$ y $(f^k)^s = f^{ks}$.

Para $A \subseteq X$ y k un entero, denotamos por $f^k(A)$ a la imagen de A bajo f^k cuando $k \geq 0$ y la preimagen bajo $f^{|k|}$ cuando $k < 0$. En el caso del conjunto que consta de un único punto x, escribimos $f^{-k}(x)$ para denotar al conjunto $f^{-k}(\{x\})$, para $k > 0$.

Consideremos por ejemplo la función definida por $f(x) = 2x$. Luego:

$$
\begin{aligned}
f^2(x) &= f(f(x)) = 2^2x, \\
f^3(x) &= f(f^2(x)) = 2^3x, \\
&\vdots \\
f^k(x) &= f(f^{k-1}(x)) = 2^kx.
\end{aligned}
$$

Dos teoremas que más adelante vamos a utilizar en varios de los resultados que se presentan en este trabajo, son los siguientes.

Teorema 1.2.1. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función, $k, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y U y V subconjuntos no vacíos de X. Se cumple que $f^k(U) \cap f^{-m}(V) \neq \emptyset$ si y sólo si $f^m(U) \cap f^{-k}(V) \neq \emptyset$.

Demostración. Supongamos que $f^k(U) \cap f^{-m}(V) \neq \emptyset$. Sea $z \in f^k(U) \cap f^{-m}(V)$. Luego, existe $a \in U$ tal que $f^k(a) = z$ y $f^m(z) \in V$. De aquí, $f^m(a) \in f^m(U)$ y $f^m(f^k(a)) = f^{m+k}(a) = f^{k+m}(a) = f^k(f^m(a)) \in V$. Así, $f^m(a) \in f^{-k}(V)$. Por lo tanto, $f^m(a) \in f^m(U) \cap f^{-k}(V)$. Así, $f^m(U) \cap f^{-k}(V) \neq \emptyset$.

Ahora supongamos que $f^m(U) \cap f^{-k}(V) \neq \emptyset$. Sea $z \in f^m(U) \cap f^{-k}(V)$. Luego, existe $u \in U$ tal que $f^m(u) = z$ y $f^k(z) \in V$. De aquí, $f^k(u) \in f^k(U)$ y $f^k(f^m(u)) = f^m(f^k(u)) \in V$. Sea $z_0 = f^k(u)$. Luego, $z_0 \in f^k(U) \cap f^{-m}(V)$. Por lo tanto, $f^k(U) \cap f^{-m}(V) \neq \emptyset$. ■

Teorema 1.2.2. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y $k \in \mathbb{N}$. Si $f^k(x) = x$, entonces $f^{km}(x) = x$, para cada $m \in \mathbb{N}$.

Demostración. La prueba se hará por inducción. Para $m = 1$ es claro que se cumple. Supongamos que se cumple para m y veamos que se cumple para $m + 1$. Notemos que $f^{k(m+1)}(x) = f^{km}(f^k(x))$. Luego, puesto que $f^k(x) = x$ y, por hipótesis de inducción, $f^{km}(x) = x$, se sigue que $f^{k(m+1)}(x) = x$. Así, se tiene el resultado. ■

Definición 1.2.3. Sean X un espacio topológico y $(G, *)$ un semi grupo, un ***sistema dinámico*** es una función continua $\phi : G \to X$ que satisface lo siguiente:

(1) $\phi(0, x) = x$, para cada $x \in X$, donde 0 es el neutro en G.

(2) $\phi(t, \phi(s, x)) = \phi(t * s, x)$, para cada $t, s \in G$ y para cada $x \in X$.

Generalmente, al espacio X se le llama ***espacio fase***, al semi grupo G se le llama ***conjunto de parámetros*** y la función ϕ se le conoce como ***ley determinística*** .

1.3. Órbitas

Uno de los conceptos más importantes dentro del estudio de los sistemas dinámicos es el de órbita de un punto. Es por esto que dedicamos una sección al estudio de estos conjuntos.

Definición 1.3.1. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. La ***órbita de un punto*** $x \in X$ ***bajo*** f, denotada por $\mathcal{O}(x, f)$, es el conjunto $\{x, f(x), f^2(x), \ldots\}$. Esto es: $\mathcal{O}(x, f) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$.

La interpretación que se le da a la órbita de un punto $\mathcal{O}(x, f)$ es la siguiente: En el tiempo $n = 0$ un objeto se encuentra en la posición x; en el tiempo $n = 1$ el objeto ha cambiado de posición y ahora se encuentra en la posición $f(x)$; en el tiempo $n = 2$ el objeto vuelve a cambiar de posición y ahora se encuentra en la posición $f(f(x)) = f^2(x)$; etcétera, ver Figura 1.12.

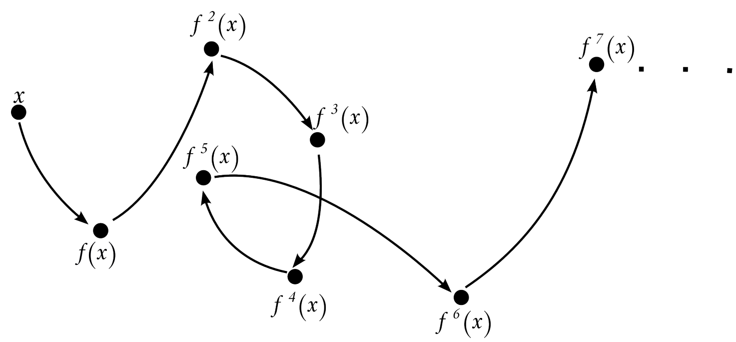


Figura 1.12: Órbita del punto x.

Ejemplo 1.3.2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x + 1$. Luego, la órbita de $x_0 = 1$ bajo f es el conjunto $\{1, 2, 3, \ldots\}$. En la Figura 1.13 se muestra el comportamiento de la órbita del punto $x_0 = 1$.

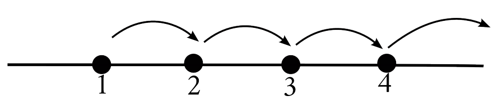


Figura 1.13: Representación gráfica de la órbita del punto $x_0 = 1$ bajo $f(x) = x + 1$.

Notemos que, en la Definición 1.3.1, la órbita de un punto puede ser un conjunto infinito o bien un conjunto finito. Cuando un punto genera una órbita finita, recibe un nombre especial.

Definición 1.3.3. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y $x_0 \in X$. Decimos que x_0 es un ***punto periódico*** de f si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x_0) = x_0$. Al conjunto de todos los puntos periódicos de f lo denotamos con $Per(f)$.

Ejemplo 1.3.4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 1$. Luego, $x_0 = 0$ es un punto periódico ya que $f^2(x_0) = f(f(x_0)) = f(-1) = 0$. Y la órbita de x_0 es $\{0, -1\}$.

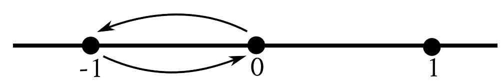


Figura 1.14: Representación gráfica de la órbita de $x_0 = 0$ bajo $f(x) = x^2 - 1$.

La Definición 1.3.3 nos menciona la existencia de un número natural que satisface cierta propiedad, sin embargo no nos habla de la unicidad de este número natural. De hecho, este número natural no es único. Sin embargo, es necesario considerar alguno de estos naturales como el periodo de un punto periódico.

Definición 1.3.5. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y $x_0 \in Per(f)$. Decimos que x_0 tiene ***periodo*** k si:

$$k = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : f^n(x_0) = x_0\}.$$

Notemos que si x_0 es un punto periódico bajo f de periodo k con $k \geq 2$, entonces para cada $1 \leq j < k$ se tiene que $f^j(x_0)$ es distinto de x_0. Además, si x_0 es un punto periódico de f de periodo k, a su respectiva órbita se le llama ***órbita periódica***. En la Figura 1.15, se muestra una órbita periódica.

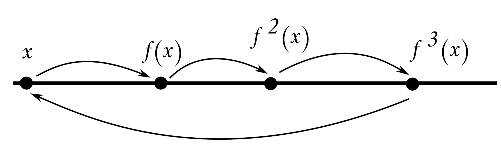


Figura 1.15: x es un punto periódico, de periodo cuatro.

Ejemplo 1.3.6. Sean, $X = \mathbb{R}$ y $f : X \to X$ dada por $f(x) = -x^3$. Notemos que $x = 1$ es un punto periódico de f de periodo dos.

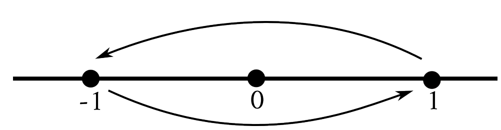


Figura 1.16: $x = 1$ es un punto periódico, de periodo dos.

Definición 1.3.7. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y $x \in X$. Se dice que x es un ***punto preperiódico de*** f si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^N(x) \in Per(f)$. En este caso se dice que x tiene ***órbita preperiódica***. A estos puntos también se les denomina ***eventualmente periódicos***.

Observación 1.3.8. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y $x \in X$. Si $f^N(x) \in Per(f)$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(f^N(x)) = f^N(x)$. De aquí, $f^{n+N}(x) = f^N(x)$. Por ejemplo, para $N = 3$ y $n = 4$, se tiene que $f^{4+3}(x) = f^4(f^3(x)) = f^3(x)$. Ver Figura 1.17.

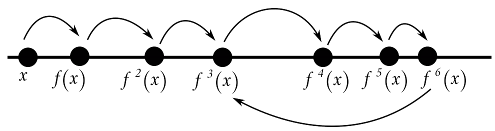


Figura 1.17: x es un punto preperiódico.

Ejemplo 1.3.9. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 1$. Luego, $x_0 = 1$ es un punto preperiódico de f ya que $f^2(f(1)) = 0 = f(1)$. Ver Figura 1.18.

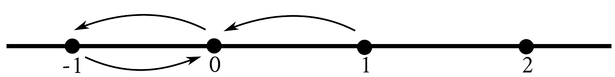


Figura 1.18: $x_0 = 1$ es un punto preperiódico.

En el Ejemplo 1.3.9, el punto $x_0 = 1$ no es periódico ya que $\mathcal{O}(1, f) = \{1, 0, -1\}$. Esto nos lleva a la conclusión de que, en general, no todo punto preperiódico es periódico.

También existen puntos cuya órbita consiste de un único punto. Y a estos puntos al igual que a los puntos periódicos se les da un nombre especial.

Definición 1.3.10. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y $x_0 \in X$. Se dice que x_0 es un ***punto fijo*** de f si $f(x_0) = x_0$. O bien, x_0 es punto fijo si $x_0 \in Per(f)$ y tiene periodo uno.

Ejemplo 1.3.11. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^2$. Luego, los puntos fijos de f son $1, 0$ y -1. Sin embargo, sólo 1 y 0 son puntos fijos de g.

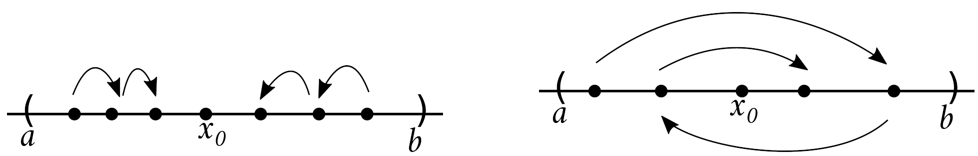
Notemos que para la función $f(x) = -\frac{1}{2}x$ existe un único punto fijo $x_0 = 0$. Ahora, consideremos la órbita del punto $x = 1$, $\mathcal{O}(x, f) = \{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \ldots\}$. Observemos que los elementos de esta órbita se aproximan cada vez más al punto fijo de la función. Por otro lado, si consideramos la función $g(x) = -2x$, cuyo punto fijo es también $x_0 = 0$, observamos que en este caso, $\mathcal{O}(1, g) = \{1, -2, 4, -8, 16, -32, \ldots\}$. Nos damos cuenta de que los puntos de la órbita se alejan cada vez más del punto fijo. Esto nos lleva a clasificar los puntos fijos de acuerdo a sus respectivas órbitas.

Definición 1.3.12. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función continua y x_0 un punto fijo.

(1) Decimos que x_0 es ***un punto fijo atractor*** si existe un abierto U de X con $x_0 \in U$ tal que para cada $x \in U$, $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_0$.

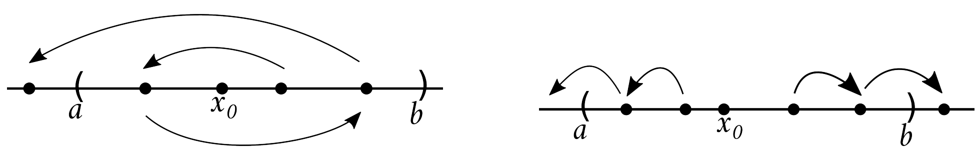
(2) Decimos también que x_0 es ***un punto fijo repulsor*** si existe un abierto U de X con $x_0 \in U$ tal que para cada $x \in U$, $x \neq x_0$, existe $n \in \mathbb{N}$, $n = n(x)$, tal que $f^n(x) \notin U$. En las Figuras 1.19 y 1.20, se muestra gráficamente el comportamiento de estos puntos.

Inicialmente, estos conceptos se dan para espacios métricos no vacíos, compactos y conexos mejor conocidos como continuos. Sin embargo, puesto que en nuestro trabajo estamos considerando espacios topológicos más generales, de igual forma damos una definición más general de estos dos conceptos.



(a) $| x_0 |< 1$ (b) $| x_0 |> 1$

Figura 1.19: Puntos fijos atractores.



(a) $| x_0 |< 1$ (b) $| x_0 |> 1$

Figura 1.20: Puntos fijos repulsores.

Una prueba de la Proposición 1.3.13, se puede consultar en [24, pág. 15].

Proposición 1.3.13. Sea $X = \mathbb{R}$, A un intervalo en $\mathbb{R}$ y $x_0 \in A$ tal que $f(x_0) = x_0$. Supongamos que f es derivable en x_0. Se cumple lo siguiente:

(1) Si $| f'(x_0) |< 1$, entonces x_0 es un punto fijo atractor.

(2) Si $| f'(x_0) |> 1$, entonces x_0 es un punto fijo repulsor.

Proposición 1.3.14. Sea $f : X \to X$ una función continua y sean x_0 y y_0 dos puntos en X. Si la órbita de x_0 converge a y_0, es decir, $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = y_0$, entonces y_0 es un punto fijo de f.

Demostración. Supongamos que la órbita de x_0 converge a y_0. Esto es, $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = y_0$. Luego, ya que f es una función continua, se tiene que:

$$f(y_0) = f(\lim_{n\to\infty} f^n(x_0)) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x_0).$$

puesto que $\{f^{n+1}(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ es una subsucesión de la sucesión $\{f^n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$, se tiene que $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = y_0$. ■

Un último concepto que revisamos en esta sección es el de punto transitivo.

Definición 1.3.15. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. Un punto $x \in X$ es llamado un ***punto transitivo*** de f si la órbita $\mathcal{O}(x, f)$ es densa en X.

Lema 1.3.16. Sean X un espacio topológico sin puntos casi aislados, $f : X \to X$ una función, $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$. x es un punto transitivo de f si y sólo si $f^n(x)$ es un punto transitivo de f.

Demostración. Supongamos que x es un punto transitivo. Veamos que $f^n(x)$ es también un punto transitivo. La prueba se hará por inducción. Veamos que se cumple para $n = 1$. Sea U un subconjunto abierto y no vacío en X. Supongamos que $cl(\{x\}) = U$. Luego, $\{x\}$ es un subconjunto denso de U. Así, por el Lema 1.1.59, parte (2), se tiene que $\{x\}$ tiene por lo menos dos puntos. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $cl(\{x\}) \neq U$. Notemos que $U \setminus cl(\{x\}) \neq \emptyset$. En efecto, ya que al no ser $\{x\}$ un subconjunto denso de U, existe un subconjunto abierto y no vacío V en U tal que $V \cap \{x\} = \emptyset$. Puesto que $V \neq \emptyset$, existe $z \in V$ tal que $z \in U \setminus cl(\{x\})$. Además, $U \setminus cl(\{x\})$ es un conjunto abierto. En efecto, ya que $U \setminus cl(\{x\}) = (X \setminus cl(\{x\})) \cap U$. Por lo tanto, $U \setminus cl(\{x\})$ es un subconjunto abierto en X. Así, $(U \setminus cl(\{x\})) \cap \mathcal{O}(x, f) \neq \emptyset$. Consecuentemente, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x) = f^{k-1}(f(x)) \in U \setminus cl(\{x\}) \subseteq U$. Esto es, $U \cap \mathcal{O}(f(x), f) \neq \emptyset$. O bien, $f(x)$ es también un punto transitivo. Ahora supongamos que se cumple para n y veamos que se satisface para $n + 1$. Por hipótesis inductiva, se tiene que $f^n(x)$ es un punto transitivo. Así, del caso base se tiene que $f(f^n(x)) = f^{n+1}(x)$ es también un punto transitivo. Esto prueba la primera parte del resultado.

Recíprocamente, supongamos que $f^n(x)$ es un punto transitivo. Así:

$$X \subseteq cl(\mathcal{O}(f^n(x), f)) \subseteq cl(\mathcal{O}(x, f)).$$

Por lo tanto, x también es un punto transitivo de f. ■

1.4. Análisis gráfico de órbitas

El análisis gráfico muchas veces nos ayuda a conocer el comportamiento de la órbita de un punto. En esta sección explicamos el procedimiento para poder analizar gráficamente la órbita de un punto, de una función de una variable real y valores reales.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Supongamos que conocemos la gráfica de la función f. Nosotros deseamos conocer el comportamiento de la órbita de un punto $x_0 \in \mathbb{R}$

mediante la gráfica de f. Lo primero que se hace es dibujar la recta $y = x$ y la gráfica de f. Hemos visto que los puntos de intersección de la recta $y = x$ con la gráfica de f son los puntos fijos de f. Para encontrar la órbita del punto x_0, comenzamos en el punto $(x_0, 0)$ y desde este punto, dibujamos una recta paralela al eje y desde el punto $(x_0, 0)$ a la gráfica de f. Cuando esta recta toca a la gráfica de f, hemos alcanzado el punto $(x_0, f(x_0))$ (Figura 1.21, (a)). A continuación, dibujamos una recta paralela al eje x, desde este último punto hasta la gráfica de la recta $y = x$. Al trazar esta recta, hemos alcanzado el punto en la recta $y = x$, $(f(x_0), f(x_0))$ (Figura 1.21, (b)). Así, el siguiente punto de la órbita de x_0 es $f(x_0)$. Continuando con este proceso, dibujamos una recta paralela al eje y, del punto $(f(x_0), f(x_0))$ de la recta $y = x$ a la gráfica de f, esto nos sitúa en el punto $(f(x_0), f^2(x_0))$ (Figura 1.21, (c)). Luego, al dibujar una recta paralela al eje x, del punto anterior hasta la gráfica de la recta $y = x$, alcanzamos el punto $(f^2(x_0), f^2(x_0))$ (Figura 1.21, (d)), directamente sobre el siguiente punto de la órbita de x_0. Siguiendo este procedimiento se lograr obtener el comportamiento de la órbita de manera gráfica.

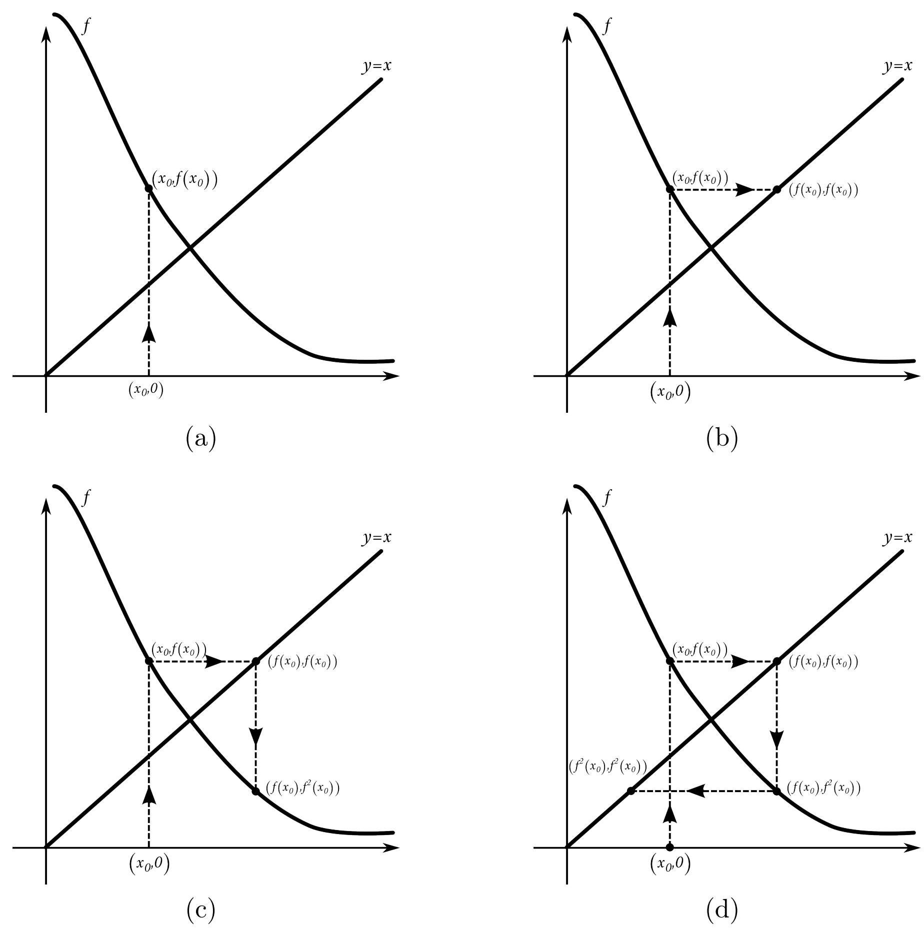


Figura 1.21: Dibujando los primeros elementos de la órbita de x_0.

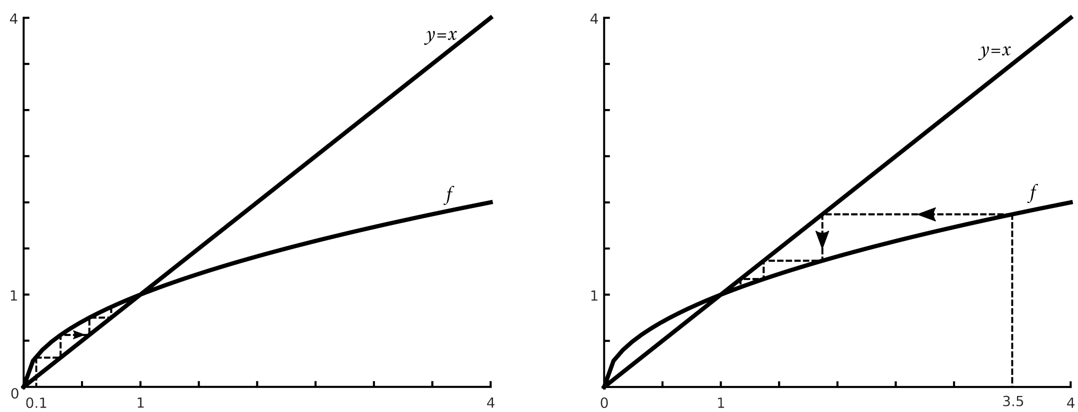
El resultado es conocido como "escalera" o "red de araña" y nos proporciona una ilustración del comportamiento de la órbita de x_0. Para entender mejor el proceso, observemos la Figura 1.21.

A partir de ahora, para no caer en confunción, en cada red de araña que presentamos, vamos a etiquetar a la gráfica de la función identidad $y = x$ y a la gráfica de f correspondiente a cada ejemplo. Además, con líneas punteadas, indicamos la dirección en la que se mueve la órbita de un punto.

A continuación ponemos en práctica el proceso explicado anteriormente para analizar el comportamiento de los puntos fijos de dos funciones en particular. De cada ejemplo, incluimos la red de araña que resulta.

Es importante mencionar que en algunos ejemplos no ponemos la gráfica completa de la función, sólo ponemos la parte de la gráfica que nos convenga.

Ejemplo 1.4.1. En la Figura 1.22, se muestra un análisis gráfico de la función f definida por $f(x) = \sqrt{x}$. Notemos que para cualquier punto positivo x_0, obtenemos una red de araña la cual nos lleva al punto de intersección de la gráfica de f con la diagonal, el cual es el punto fijo $x = 1$.



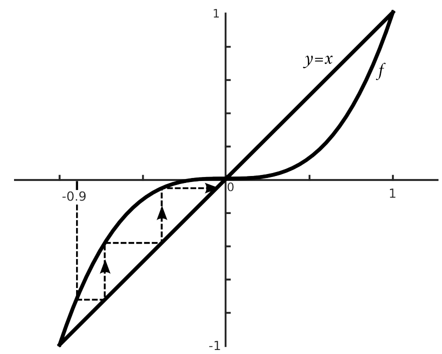
(a) Representación gráfica de la órbita de $x = 0.1$ bajo $f(x) = \sqrt{x}$.

(b) Representación gráfica de la órbita de $x = 3.5$ bajo $f(x) = \sqrt{x}$.

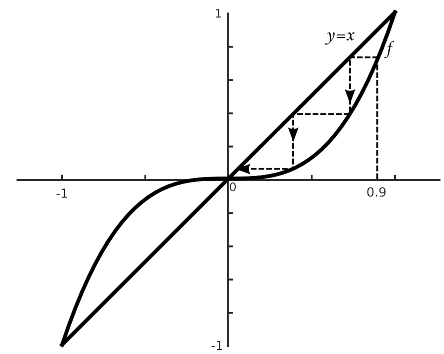
Figura 1.22: Análisis gráfico del punto fijo de $f(x) = \sqrt{x}$.

Veamos un último ejemplo del desarrollo de este análisis gráfico, para despuês explicar otro método que se conoce para saber la naturaleza de los puntos fijos, esto es, saber si son repulsores o atractores.

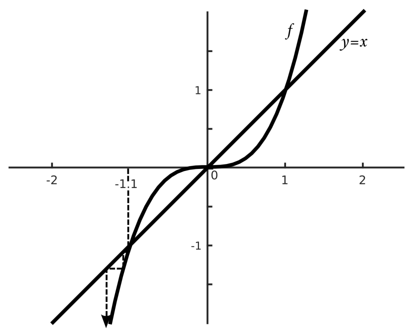
Ejemplo 1.4.2. Ahora, consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$. La gráfica de f nos dice que existen tres puntos fijos, los cuales son $0, 1$ y -1. Al analizar la gŕafica de esta función, se observa que si $\mid x_0 \mid< 1$, entonces la órbita de x_0 tiende a cero, como se observa en la Figura 1.23 (a). Sin embargo si $\mid x_0 \mid> 1$, la órbita de x_0 tiende a $\pm\infty$ como se observa en la Figura 1.23 (b).



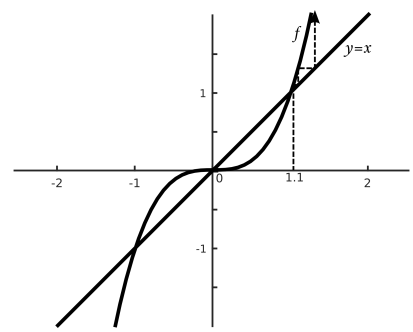
(a) Representación gráfica de la órbita de $x = -0.9$ bajo $f(x) = x^3$



(b) Representación gráfica de la órbita de $x = 0.9$ bajo $f(x) = x^3$



(c) Representación gráfica de la órbita de $x = -1.1$ bajo $f(x) = x^3$



(d) Representación gráfica de la órbita de $x = 1.1$ bajo $f(x) = x^3$

Figura 1.23: Análisis gráfico de los puntos fijos de $f(x) = x^3$.

El análisis gráfico de las órbitas es muy útil para conocer su comportamiento, sin embargo, no es un método riguroso y en algunas ocasiones no es posible hacer uso de él.

Otro método para describir las órbitas de un sistema dinámico consiste en representar las órbitas sobre la línea real y este método se conoce como ***retrato fase*** del sistema dinámico. Para el caso en que se trabaja con una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, este método no nos da más información. Sin embargo en el caso de dos dimensiones, cuando no es posible hacer un análisis gŕafico como el que se describió anteriormente, este método es confiable para analizar el comportamiento de las órbitas.

Para dar una idea general del método, representamos los puntos fijos con puntos sólidos y a las órbitas con líneas continuas.

Ejemplo 1.4.3. Hemos visto que los puntos fijos de la función $f(x) = x^3$ son $0, 1$ y -1. Además, si $\mid x_0 \mid < 1$, entonces $f^n(x_0)$ tiende a cero y si $\mid x_0 \mid > 1$, entonces $f^n(x_0)$ tiende a $\pm\infty$. Así, el retrato fase para esta función, queda como se muestra en la Figura 1.24.

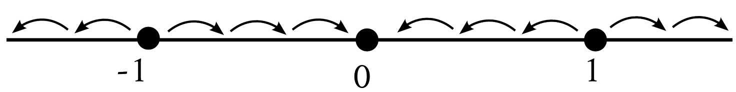


Figura 1.24: Retrato fase de $f(x) = x^3$.

Como otro ejemplo, consideremos a la función $f(x) = x^2$. Los puntos fijos de f son 0 y 1. Observemos que si $x_0 < 0$, entonces $f(x_0) > 0$ y todas las sucesiones de puntos de la órbita de x_0 son positivas. Así, el retrato fase de $f(x) = x^2$ queda como se muestra en la Figura 1.25.

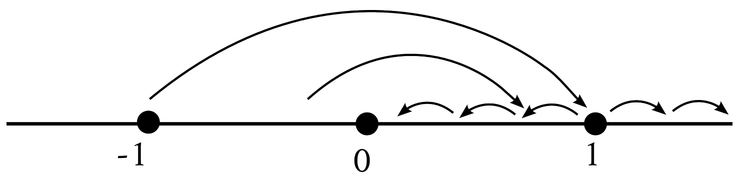


Figura 1.25: Retrato fase de $f(x) = x^2$.

En la Definición 1.3.12, vimos que hay dos tipos de puntos fijos, los puntos fijos atractores y los puntos fijos repulsores. A continuación hacemos un análisis gráfico de los puntos fijos de la función $f(x) = x^2$ y vemos de qué naturaleza son.

Hemos visto que esta función tiene dos puntos fijos, dichos puntos son 0 y 1. Notemos que para un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\mid x_0 \mid < 1$, la órbita $\mathcal{O}(x_0, f)$ se aproxima a cero. Por ejemplo la órbita del $x_0 = 0.1$ es:

$$\{0.1, 0.01, 0.0001, 0.00000001, \ldots\}.$$

De hecho, para un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq x_0 < 1$, no importa que tan cerca esté de uno, la órbita $\mathcal{O}(x_0, f)$ se aleja cada vez más de 1 y se aproxima a 0. Por ejemplo, la órbita del punto x_0 =0.9 es:

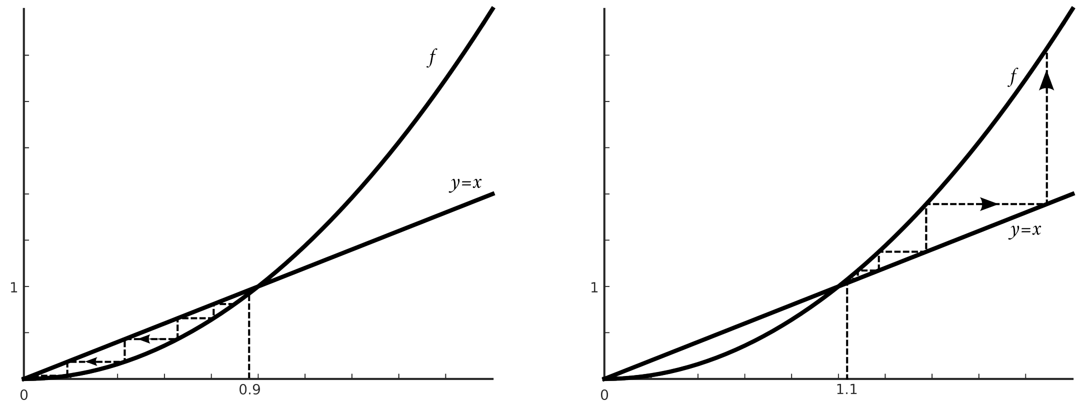
$$\{0.9, 0.81, 0.6561, 0.430467, \ldots, 0.185302, \ldots, 0.034336, \ldots, 0.00117, \ldots\}.$$

Más precisamente, si $0 \leq x_0 < 1$, entonces $f^n(x_0)$ tiende a cero cuando n tiende a infinito.

Por otro lado, si $x_0 > 1$, entonces la órbita de x_0 se aleja de 1. Por ejemplo, la órbita del punto 1.1 es:

$$\{1.1, 1.21, 1.4641, 2.1436, \ldots, 4.5950, \ldots, 21.114, \ldots, 445.79, \ldots\}.$$

Si $-1 < x_0 \leq 0$, entonces $f^n(x_0)$ tiende a cero cuando n tiende a infinito y, por lo tanto, la órbita se aleja de 1. Así, si $x_0 > 1$, entonces $f^n(x_0)$ se va a infinito cuando n tiende a infinito y, por lo tanto, la órbita se aleja de 1. Claramente, puntos que están cerca del cero, tienen órbitas que son atractoras a cero. Mientras que puntos cercanos a 1, tienen órbitas que se alejan del uno. Este análisis se muestra de manera gráfica en la Figura 1.26.



(a) Representación gráfica de la órbita de $x_0 = 0.9$ bajo $f(x) = x^2$.

(b) Representación gráfica de la órbita de $x_0 = 1.1$ bajo $f(x) = x^2$.

Figura 1.26: Análisis gráfico de los puntos fijos de $f(x) = x^2$.

A los interesados en conocer más sobre el análisis gráfico de órbitas, les sugerimos revisar [14], donde se elaboran códigos utilizando Matlab para generar estas gráficas. Cabe mencionar que en esta tesis se utilizó el código que se presenta en dicho trabajo para generar la gráfica de las Figuras 1.26, 1.23 y 1.22, hasta este momento.

1.5. Tipos de sistemas dinámicos discretos

Un sistema dinámico se nombra de acuerdo a las propiedades que satisface la función que lo define. En esta sección se introducen algunos tipos de sistemas dinámicos discretos que se conocen y, además, estudiamos las relaciones que existen entre ellos. Es importante mencionar que cuando estudiemos un cierto tipo de sistema dinámico, sólo nos referiremos a la función. Por ejemplo, si analizamos alguna propiedad de una función transitiva, en realidad estaremos analizando un sistema dinámico transitivo. También hay que mencionar que los sistemas dinámicos que presentamos en esta sección generalmente son estudiados en espacios métricos. Sin embargo, en nuestro trabajo analizamos las propiedades que se siguen cumpliendo en espacios topológicos. Sin más introducción, pasamos a las definiciones.

Definición 1.5.1. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. Se dice que f es:

(1) ***Localmente eventualmente sobreyectiva*** si para cada subconjunto abierto no vacío U de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) = X$.

(2) ***Mezclante*** si para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$, para cada $k \geq N$.

(3) ***Débilmente mezclante*** si para cualesquiera subconjuntos abiertos y no vacíos U_1, U_2, V_1 y V_2 de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2\}$.

(4) ***Transitiva*** si para cada par de subconjuntos abiertos y no vacíos U y V de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

(5) ***Totalmente transitiva*** si f^s es transitiva, para cada $s \in \mathbb{N}$.

(6) ***Fuertemente transitiva*** si para cada subconjunto abierto y no vacío U de X, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $X = \bigcup_{k=0}^{s} f^k(U)$.

(7) ***Caótica*** si f es transitiva y $Per(f)$ es denso en X.

(8) ***Minimal*** si no existe un subconjunto propio A de X el cuál es no vacío, cerrado y $f(A) = A$.

(9) ***Irreducible*** si el único subconjunto cerrado A de X tal que $f(A) = X$ es $A = X$.

(10) ***Semi-abierta*** si para cada subconjunto abierto y no vacío U de X, existe un subconjunto abierto y no vacío V de X tal que $V \subseteq f(U)$.

(11) ***Turbulenta*** si existen subconjuntos compactos y no degenerados C y K de X tales que $C \cap K$ tiene a lo más un punto y $K \cup C \subseteq f(K) \cap f(C)$.

Por ahora sólo vamos a analizar las relaciones que existen entre éstas clases de funciones, más adelante, nos ocuparemos de los ejemplos.

Es importante mencionar que el concepto de transitividad es manejado por otros autores como ***conjunto-abierto-transitiva*** [25] o $\boldsymbol{TT_+}$ [2]. Sin embargo, el término más conocido y manejado es el de transitividad y es por eso que adoptamos este término en nuestro trabajo.

Analizar las relaciones que existen entre ciertas clases de funciones, es un tema muy interesante, ya que se pueden empezar a mezclar propiedades, y de cada mezcla obtener un resultado interesante. Referente a las clases de funciones definidas previamente, en [7], se muestran las relaciones entre éstas, cuando el espacio fase es un continuo y la función es continua. En este trabajo se considera el espacio fase como un espacio topológico y la función se considera de manera general.

Los Teoremas 1.5.2, 1.5.3 y 1.5.4, se tienen directamente de la definición.

Teorema 1.5.2. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. Si f es irreducible, entonces f es sobreyectiva.

Teorema 1.5.3. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. Si f es caótica, entonces f es transitiva.

Teorema 1.5.4. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. Si f es totalmente transitiva, entonces f es transitiva.

Demostración. Supongamos que f es fuertemente transitiva. Luego, f^s es transitiva, para cada $s \in \mathbb{N}$. En particular para $s = 1$, se tiene que f es transitiva. ■

Teorema 1.5.5. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. Si f es fuertemente transitiva, entonces f es transitiva.

Demostración. Supongamos que f es totalmente transitiva. Sean U y V subconjuntos abiertos y no vacíos de X. Por hipótesis, existe $s_1 \in \mathbb{N}$ tal que $X = \bigcup_{k=0}^{s_1} f^k(U)$. De aquí, $V \subseteq X \subseteq \bigcup_{k=0}^{s_1} f^k(U)$. Puesto que $V \neq \emptyset$, existe $x \in V$ tal que $x \in \bigcup_{k=0}^{s_1} f^k(U)$. Luego, existe $k_0 \in \{0, 1, 2, \ldots, s_1\}$ tal que $x \in f^{k_0}(U)$. Se sigue que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{k_0}(U) \cap V \neq \emptyset$. Por lo tanto, f es transitiva. ■

Ahora vamos a analizar las funciones mezclantes y débilmente mezclantes. Como su nombre lo sugiere, la relación que existe entre estas dos funciones, es la siguiente.

Teorema 1.5.6. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. Si f es mezclante, entonces f es débilmente mezclante.

Demostración. Supongamos que f es mezclante. Sean U_1, U_2, V_1 y V_2 subconjuntos abiertos y no vacíos de X. Por hipótesis, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U_1) \cap V_1$, para cada $k \geq N_1$ y existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$, para cada $k \geq N_2$. Sea $k = N_1 + N_2$. Luego, $k > N_1$ y $k > N_2$. De aquí, $f^k(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^k(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$. Por lo tanto, f es débilmente mezclante. ■

Teorema 1.5.7. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. Si f es localmente eventualmente sobreyectiva, entonces f es sobreyectiva.

Demostración. Supongamos que f es localmente eventualmente sobreyectiva. Sea $x \in X$. Por hipótesis, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(X) = X$. De aquí, existe $y \in X$ tal que $f^k(y) = x$. Luego, $f(f^{k-1}(y)) = x$. Esto es, existe $a = f^{k-1}(y) \in X$ tal que $f(a) = x$. Por lo tanto, f es sobreyectiva. ■

Teorema 1.5.8. Sea X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. Si f localmente eventualmente sobreyectiva, entonces f es transitiva.

Demostración. Supongamos que f es localmente eventualmente sobreyectiva y veamos que f es transitiva. Sean U y V subconjuntos abiertos y no vacíos de X. Por hipótesis, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) = X$. De aquí, $f^k(U) \cap V = X \cap V = V \neq \emptyset$. Por lo tanto, f es transitiva. ■

Observemos que en el Teorema 1.5.8, no fue posible tener el resultado para una función totalmente transitiva, sin embargo, si la función es mezclante, entonces f es totalmente transitiva.

Teorema 1.5.9. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función. Si f es mezclante, entonces f es totalmente transitiva.

Demostración. Supongamos que f es mezclante. Sea $s \in \mathbb{N}$. Veamos que f^s es transitiva. Sean U y V subconjuntos abiertos y no vacíos de X. Por hipótesis, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$, para cada $k \geq N$. Se tienen los siguientes casos:

Caso (i) $s \geq N$. En este caso, $f^s(U) \cap V \neq \emptyset$.

Caso (ii) $s < N$. En este caso, $(s \cdot N) \geq N$. De aquí, $f^{sN}(U) \cap V = [f^s]^N(U) \cap V \neq \emptyset$.

De los casos (i) y (ii), se tiene el resultado. ■

En el Teorema 1.5.9, si se debilita la hipótesis y se pide que f sea débilmente mezclante, entonces f cumple una propiedad menos general, pero igual de interesante. Veamos esto en el Teorema 1.5.10.

Teorema 1.5.10. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. Si f es débilmente mezclante, entonces f es transitiva.

Demostración. Supongamos que f es débilmente mezclante y veamos que f es transitiva. Sean U y V subconjuntos abiertos y no vacíos de X. Pongamos $U_1 = U_2 = U$ y $V_1 = V_2 = V$. Luego, por hipótesis, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2\}$. Por lo tanto, f es transitiva. ■

De los Teoremas 1.5.6 y 1.5.10, se tiene el siguiente resultado.

Corolario 1.5.11. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. Si f mezclante, entonces f es transitiva.

En los teoremas anteriores, analizamos los resultados que se tienen si suponemos que una función es débilmente mezclante o mezclante. ¿Pero qué propiedades debe cumplir una función para ser mezclante?

Teorema 1.5.12. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. Si f es localmente eventualmente sobreyectiva, entonces f es mezclante.

Demostración. Supongamos que f es localmente eventualmente sobreyectiva y veamos que f es mezclante. Sean U y V subconjuntos abierto y no vacíos de X. Luego, puesto que f es localmente eventualmente sobreyectiva, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) = X$. Además, por el Teorema 1.5.7, f es sobreyectiva. Así, $f^{k+1}(U) = f(X) = X$, $f^{k+2}(U) = f(f^{k+1}(U)) = f(X) = X$. Continuando con este proceso, se tiene que para cada $n \geq k$, $f^n(U) = X$. De aquí, ya que $V \subseteq X$, $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$, para cada $n \geq k$. Por lo tanto, f es mezclante. ■

En el diagrama de la Figura 1.27 se resumen las relaciones que hay entre las clases de funciones de la Definición 1.5.1, cuando X es un espacio topológico y f cualquier función. En el diagrama, una flecha entre dos funciones indica que existe una relación entre ella y la dirección de la flecha nos dice la inclusión que se tiene entre estas dos clases de funciones. Además, por conveniencia, en el diagrama escribimos L.E. sobreyectiva en lugar de localmente eventualmente sobreyectiva.

$$\begin{tikzcd}
\text{Irreducible} \arrow[dr] & \text{L.E. sobreyectiva} \arrow[r] \arrow[d] & \text{Mezclante} \arrow[r] \arrow[d] & \text{Débilmente Mezclante} \\
 & \text{Sobreyectiva} & \text{Totalmente transitiva} \arrow[d] & \\
 & \text{Caótica} \arrow[r] & \text{Transitiva} & \text{Fuertemente transitiva} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Figura 1.27: Relaciones entre funciones, caso general.

Ahora estudiamos algunos otros resultados que no se tienen de manera general pero que, sin embargo, se cumplen bajo ciertas condiciones adicionales sobre el espacio o la función.

Una propiedad que satisface una función débilmente mezclante y continua, es la siguiente.

Teorema 1.5.13. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función continua y $n \in \mathbb{N}$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

(1) f es débilmente mezclante.

(2) Para cada $m \geq 2$ y para cualesquiera abiertos no vacíos $U_1, U_2, \ldots, U_m, V_1, V_2, \ldots, V_m$ de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

(3) Para cualesquiera subconjuntos abiertos y no vacíos U, V_1, V_2 de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2\}$.

Demostración. (1)$\Rightarrow$(2)

Supongamos que f es débilmente mezclante y veamos que para cada $m \geq 2$ y para cualesquiera abiertos no vacíos $U_1, U_2, \ldots, U_m, V_1, V_2, \ldots, V_m$ de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Sea $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 2$. Si $m = 2$, por hipótesis, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U_1) \cap V_1$ y $f^k(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$ y terminamos.

Supongamos que $N > 2$ y que para cada $m \leq N$ se cumple la afirmación. Consideremos $U_1, U_2, \ldots, U_N, U_{N+1}, V_1, V_2, \ldots, V_N, V_{N+1}$ abiertos y no vacíos de X. Por hipótesis de inducción, para U_1, V_1, U_2, V_2, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$ y $f^k(V_1) \cap V_2 \neq \emptyset$. Por el Teorema 1.2.1, se tiene que $U_1 \cap f^{-k}(U_2) \neq \emptyset$ y $V_1 \cap f^{-k}(V_2) \neq \emptyset$. Pongamos $U = U_1 \cap f^{-k}(U_2)$ y $V = V_1 \cap f^{-k}(V_2)$. Dado que f es continua, se tiene que f^k es continua. De aquí, V y U son subconjuntos abiertos en X. Consideremos ahora la colección $U, U_3, \ldots, U_N, U_{N+1}, V, V_3, \ldots, V_N, V_{N+1}$. Notemos que ahora tenemos $N - 1$ parejas de abiertos en X. Así, por hipótesis de inducción, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $f^l(U_l) \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{3, 4, \ldots, N+1\}$ y $f^l(U) \cap V \neq \emptyset$. Notemos además que $V \subseteq V_1$ y $U \subseteq U_1$. Dado que $f^l(U) \cap V \neq \emptyset$, $V \subseteq V_1$ y $U \subseteq U_1$. Se tiene que $f^l(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$. Veamos ahora que $f^l(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$. En efecto, dado que $f^l(U) \cap V \neq \emptyset$, existe $u \in U$ tal que $f^l(u) \in V$. Puesto que $V \subseteq f^{-k}(V_2)$, se tiene que $f^l(u) \in f^{-k}(V_2)$. Así, $f^{l+k}(u) \in V_2$. Por otro lado, $U \subseteq f^{-k}(U_2)$, de aquí, $f^k(u) \in U_2$. Así, $f^{k+l}(u) \in f^l(U_2)$. Consecuentemente, $f^{k+l}(u) \in f^l(U_2) \cap V_2$. Con todo lo anterior, se tiene que (1) implica (2).

(2)$\Rightarrow$(3)

Supongamos que para cada $m \geq 2$ y para cualesquiera subconjuntos abiertos y no vacíos $U_1, U_2, \ldots, U_m, V_1, V_2, \ldots, V_m$ de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Sean U, V_1, V_2 abiertos y no vacíos en X. Luego, por hipótesis, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2\}$. Así, se cumple (3).

(3)$\Rightarrow$(1)

Ahora supongamos que para cualesquiera subconjuntos abiertos y no vacíos U, V_1, V_2 de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2\}$. Veamos que f es débilmente mezclante. Sean U_1, U_2, V_1, V_2 subconjuntos abiertos y no vacíos de X. Por hipótesis, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$ y $f^k(U_1) \cap V_2 \neq \emptyset$. Luego, por el Teorema 1.2.1, se tiene que $U_1 \cap f^{-k}(U_2) \neq \emptyset$ y $U_1 \cap f^{-k}(V_2) \neq \emptyset$. Hagamos $U = U_1 \cap f^{-k}(U_2)$ y $V = U_1 \cap f^{-k}(V_2)$. Ya que f es una función continua, se tiene que f^k es también una función continua y así, U y V son subconjuntos abiertos en X. Consideremos ahora los abiertos U, V_1 y V. Luego, por hipótesis, se tiene que existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $f^l(U) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^l(U) \cap V \neq \emptyset$. Puesto que $U \subseteq U_1$ y $f^l(U) \cap V_1 \neq \emptyset$, se sigue que $f^l(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$. Finalmente, veamos que $f^l(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$. En efecto, ya que $f^l(U) \cap V \neq \emptyset$, existe $u \in U$ tal que $f^l(u) \in V$. Como $V \subseteq f^{-k}(V_2)$, se tiene que $f^l(u) \in f^{-k}(V_2)$. De aquí, $f^{l+k}(u) \in V_2$. Por otro lado, dado que $U \subseteq f^{-k}(U_2)$, se sigue que $f^k(u) \in U_2$. Luego, $f^{k+l}(u) \in f^l(U_2)$. Dado que $f^{l+k}(u) \in V_2$ y $f^{l+k}(u) \in f^l(U_2)$, resulta que $f^l(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$. Así, se tiene el resultado. ■

Ahora bien, en el Teorema 1.5.9, vimos que toda función mezclante es totalmente transitiva. Sin embargo, no fue posible dar un resultado semejante si considerábamos una función débilmente mezclante. Ahora veremos que podemos cambiar la hipótesis "f mezclante" por "f débilmente mezclante y continua" para obtener un resultado parecido al Teorema 1.5.9. Una herramienta clave en la demostración de este hecho es el Teorema 1.5.13.

El siguiente resultado es una generalización que hemos hecho del Teorema [14, 3.1.17].

Teorema 1.5.14. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. Si f es débilmente mezclante, entonces f es totalmente transitiva.

Demostración. Supongamos que f es débilmente mezclante. Sea $s \in \mathbb{N}$. Veamos que f^s es transitiva. Sean U y V subconjuntos abierto y no vacíos de X. Hay que probar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(f^s)^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Por el Teorema 1.1.81, ya que V es un subconjunto abierto y no vacío de X, se tiene que para cada $i \in \{0, 1, \ldots, s\}$, $f^{-i}(V)$ es abierto y no vacío de X. Por el Teorema 1.5.13, parte (2), existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap f^{-i}(V) \neq \emptyset$, para cada $i \in \{0, 1, \ldots, s\}$. Pongamos $k = qs + r$, donde $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $r \leq s - 1$. De aquí, $0 < s - r \leq s$. Luego, $f^k(U) \cap f^{-(s-r)}(V) \neq \emptyset$. Por el Teorema 1.2.1, $U \cap f^{-k}(f^{-(s-r)}(V)) \neq \emptyset$. Esto es, $U \cap f^{-(k+s-r)}(V) \neq \emptyset$. Así:

$$U \cap f^{-((qs+r)+s-r)}(V) = U \cap f^{-s(q+1)}(V) \neq \emptyset.$$

Nuevamente, por el Teorema 1.2.1, $f^{s(q+1)}(U) \cap V \neq \emptyset$. Sea $n = q+1$. Luego, $(f^s)^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Por lo tanto, f es totalmente transitiva. ■

En un espacio topológico sin puntos aislados, las funciones transitivas se caracterizan como se muestra en el Teorema 1.5.15.

Teorema 1.5.15. Sean X un espacio topológico sin puntos aislados, $f : X \to X$ una función y $x \in X$. Si x es un punto transitivo, entonces f es transitiva.

Demostración. Supongamos que x es un punto transitivo. Sean U y V dos subconjuntos abiertos y no vacíos de X. Como $\mathcal{O}(x, f)$ es un subconjunto denso de X, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(x) \in U$. Además, por el Teorema 1.3.16, se tiene que $f^m(x)$ es un punto transitivo. De aquí, $V \cap \mathcal{O}(f^m(x), f) \neq \emptyset$. Esto es, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(f^m(x)) \in V$. Luego, $f^m(x) \in f^{-k}(V)$. Por lo tanto, $U \cap f^{-k}(V) \neq \emptyset$. Así, por el Teorema 1.2.1, f es transitiva. ■

Puesto que los espacios conexos y T_1 no tienen puntos aislados, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 1.5.16. Sean X un espacio topológico conexo y T_1, $f : X \to X$ una función y $x \in X$. Si x es un punto transitivo, entonces f es transitiva.

Observemos que la hipótesis de que X no tiene puntos aislados, en el Teorema 1.5.15, no se puede omitir. Pues existen sistemas dinámicos que tienen órbitas densas y que sin embargo no son transitivos.

Ejemplo 1.5.17. Sean X como en el Ejemplo 1.1.37, con la métrica usual y $f : X \to X$ definida por:

$$f(0) = 0 \text{ y } f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Se cumple que $cl(\mathcal{O}(1, f)) = X$ y, sin embargo, f no es transitiva.

Además, si consideramos una función continua, también podemos dar una caracterización de las funciones minimales.

Teorema 1.5.18. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. f es minimal si y sólo si $cl(\mathcal{O}(x, f)) = X$, para cada $x \in X$.

Demostración. Supongamos que, para cada $x \in X$, $cl(\mathcal{O}(x, f)) = X$. Veamos que f es minimal. La prueba se hará por contradicción. Supongamos que existe $M \subseteq X$ propio, no vacío y cerrado tal que $f(M) = M$. Luego, el conjunto $X \backslash M$ es abierto y no vacío en X. Sea $x_0 \in M$, por hipótesis, $cl(\mathcal{O}(x_0, f))$ es denso en X. Así, $\mathcal{O}(x_0, f) \cap X \backslash M \neq \emptyset$. De aquí, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x_0) \in X \backslash M$. Consecuentemente, $f^k(x_0) \notin M$. Por otro lado, ya que $f(M) \subseteq M$, se sigue que $f(x_0) \in M$, $f^2(x_0) \in f(M) \subseteq M$. En general, $f^k(x_0) \in M$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, no puede existir un subconjunto M con estas propiedades. Así, f es minimal.

Ahora supongamos que f es minimal. Veamos que para cada $x \in X$, $cl(\mathcal{O}(x, f)) = X$. Sea $x \in X$, notemos que $\mathcal{O}(x, f) \neq \emptyset$. Luego, $cl(\mathcal{O}(x, f))$ es un subconjunto no vacío y cerrado de X. Más aún, ya que f es continua, se tiene que $f(cl(\mathcal{O}(x, f))) \subseteq cl(f(\mathcal{O}(x, f))) \subseteq cl(\mathcal{O}(x, f))$. Por hipótesis, ya que f es minimal, $cl(\mathcal{O}(x, f)) = X$. Finalmente, como $x \in X$ se tomó arbitrario, se tiene que para cada $x \in X$, $\mathcal{O}(x, f)$ es denso en X. Así, se tiene el resultado. ■

Veamos la importancia del Teorema 1.5.18.

Teorema 1.5.19. Sean X un espacio topológico compacto y $f : X \to X$ una función continua. Si f es minimal, entonces f es irreducible.

Demostración. La prueba se hace por contrarrecíproco. Supongamos que f no es irreducible y veamos que f no es minimal. Puesto que f no es irreducible, existe un subconjunto propio y cerrado A de X tal que $f(A) = X$. Notemos que si $f(X) \neq X$, entonces $X \nsubseteq f(X)$. De aquí, $f(A) \nsubseteq f(X)$. Lo cual es una contradicción. Así, podemos suponer que $f(X) = X$. Pongamos $g = f|_A$ y $V = \bigcap_{k=0}^{\infty} f^{-k}(A) = \bigcap_{k=0}^{\infty} g^{-k}(A)$. Veamos que V es un subconjunto compacto no vacío de X. Para verificar esto, haremos uso del Teorema 1.1.72. Notemos que para cada $k \in \mathbb{N}$, puesto que f es continua y A un subconjunto cerrado, por el Teorema 1.1.81 , $g^{-k}(A)$ es un subconjunto cerrado y no vacío en X. Luego, ya que X es compacto, por el Teorema 1.1.71, $g^{-k}(A)$ es compacto, para cada $k \in \mathbb{N}$. Por otro lado, puesto que $g(A) = X$, si $x \in X$, entonces existe $z \in A$ tal que $g(z) = x$. Así, g es sobreyectiva. Luego, ya que $A \subseteq g(A)$, $g^{-1}(A) \subseteq g^{-1}(g(A))$. Como g es sobreyectiva, por el Teorema 1.1.78, $g^{-1}(A) \subseteq A$. Consecuentemente, para cada $k \in \mathbb{N}$, $g^{-k}(A) \subseteq g^{-(k-1)}(A)$. Finalmente, por el Teorema 1.1.72, se tiene que V es un subconjunto no vacío. Además, ya que A es un subconjunto cerrado en X, se tiene que V es cerrado en X, así, V es compacto.

Ahora, sean $v \in V$ y $U = X \setminus A$. Luego, U es un subconjunto abierto de X. Supongamos que $\mathcal{O}(v, f) \cap U \neq \emptyset$. De aquí, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $f^l(v) \in U$ y $f^l(v) \notin A$. Por otro lado, ya que $v \in V$, $v \in f^{-l}(A)$. Esto es, $f^l(v) \in A$, pero esto es una contradicción. Por lo tanto, $\mathcal{O}(v, f) \cap U = \emptyset$. Lo cual implica que existe $v \in X$ tal que $\mathcal{O}(v, f)$ no es un subconjunto denso en X. Por el Teorema 1.5.18, f no es minimal. ■

Observemos que en el diagrama de la Figura 1.27, no aparecen las funciones minimales, esto se debe a que no es posible dar una relación entre las funciones minimales y las funciones fuertemente transitivas para cualquier espacio topológico y cualquier función. Sin embargo, en un espacio compacto y para una función continua, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.5.20. Sean X un espacio topológico compacto y $f : X \to X$ una función continua. Si f es minimal, entonces f es fuertemente transitiva.

Demostración. Supongamos que f es minimal y veamos que f es fuertemente transitiva. Sea U un subconjunto abierto y no vacío de X. Por demostrar que existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $X = \bigcup_{k=0}^{s} f^k(U)$. Sea $x \in X$. Puesto que f es minimal, por el Teorema 1.5.18, se tiene que $\mathcal{O}(x, f) \cap U \neq \emptyset$. Luego, existe $m_x \in \mathbb{N}$ tal que $f^{m_x}(x) \in U$. De aquí,

$f^{-m_x}(f^{m_x}(x)) \subseteq f^{-m_x}(U)$. Por el Teorema 1.1.78, $x \in f^{-m_x}(U)$. Así, $X = \bigcup\{f^{-m_x}(U) : x \in X\}$. Como f es continua, por el Teorema 1.1.81, $f^{-m_x}(U)$ es abierto en X, para cada $x \in X$. Luego, puesto que X es un espacio compacto, existen $x_1, \ldots, x_r \in X$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^{r} f^{-m_{x_i}}(U)$. Pongamos $s = \text{máx}\{m_{x_1}, \ldots, m_{x_r}\}$. De aquí, $X = \bigcup_{k=0}^{s} f^{-k}(U)$.

Por otro lado, puesto que f es sobreyectiva, $f(X) = X$. Así, $f^s(X) = X$. Esto es:

$$X = f^s\left(\bigcup_{k=0}^{s} f^{-k}(U)\right).$$

Observemos que:

$$\begin{aligned} f^s\left(\bigcup_{k=0}^{s} f^{-k}(U)\right) &= f^s(U \cup f^{-1}(U) \cup \cdots \cup f^{s-1}(U) \cup f^s(U)) \\ &= f^s(U) \cup f^{s-1}(U) \cup \cdots \cup f(U) \cup U. \end{aligned}$$

Así, $X = \bigcup_{k=0}^{s} f^k(U)$. Por lo tanto, f es fuertemente transitiva. ■

Finalmente, para poder dar una relación entre una función irreducible y las funciones semi-abiertas, es necesario tener presente el resultado del Teorema 1.5.21.

Teorema 1.5.21. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. f es semi-abierta si y sólo si la imagen inversa de todo subconjunto denso es también un subconjunto denso.

Demostración. Supongamos que f es semi-abierta. Sea $D \subseteq X$ un subconjunto denso. Veamos que $f^{-1}(D)$ es un subconjunto denso en X. Sea U un subconjunto abierto en X. Por hipótesis, ya que f es semi-abierta, existe $V \subseteq X$ abierto y no vacío tal que $V \subseteq f(U)$. Como D es denso, por el Teorema 1.1.19, se tiene que $V \cap D \neq \emptyset$. De aquí que $f(U) \cap D \neq \emptyset$. Luego, existe $z \in f(U) \cap D$. Esto es, existe $u \in U$ tal que $f(u) = z \in D$. Consecuentemente, $u \in U \cap f^{-1}(D)$. De aquí, $U \cap f^{-1}(D) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $f^{-1}(D)$ es denso en X.

Para mostrar el recíproco, supongamos que existe $D \subseteq X$ denso para el cual el conjunto $f^{-1}(D)$ no es denso en X. Luego, existe $W \subseteq X$ abierto tal que $W \cap f^{-1}(D) = \emptyset$. Bajo estas hipótesis veamos que f no es semi-abierta. Sea $V \subseteq X$. Puesto que D es un subconjunto denso, por el Teorema 1.1.19, se tiene que $V \cap D \neq \emptyset$. Luego, existe $z \in V \cap D$. Si $V \subseteq f(W)$, entonces $z \in f(W)$ y $z \in D$. Así, existe $a \in W$ tal que $f(a) = z$ y $f(a) \in D$. De aquí, $a \in W \cap f^{-1}(D)$. Esto contradice el hecho de que $W \cap f^{-1}(D) = \emptyset$. Por lo tanto, $V \nsubseteq f(W)$. Consecuentemente, f no es semi-abierta. ■

Teorema 1.5.22. Sean X un espacio compacto y de Hausdorff y $f : X \to X$ una función continua. Si f es irreducible, entonces f es semi-abierta.

Demostración. Supongamos que f es irreducible. La prueba de este resultado se hará con ayuda del Teorema 1.5.21. Sea D un subconjunto denso de X, veamos que $f^{-1}(D)$ es denso en X. Por el Teorema 1.5.2, se tiene que $f(f^{-1}(D)) = D$. Notemos, además, que si $A \subseteq X$, como f es continua, $f(cl(A)) \subseteq cl(f(A))$. Más aún, como X es compacto, el conjunto $cl(A)$ es compacto y puesto que f es continua, se tiene que $f(cl(A))$ es compacto. De aquí, ya que X es compacto y de Hausdorff, se tiene que $f(cl(A))$ es cerrado. De donde, $f(cl(A)) = cl(f(A))\ cl(f(cl(A))) = f(cl(A))$. En particular, $cl(f(A)) \subseteq f(cl(A))$. Por lo tanto, $f(cl(f^{-1}(D))) = cl(f(f^{-1}(D))) = cl(D) = X$. Por el Teorema 1.5.21, se tiene que f es una función semi-abierta. ■

En el diagrama de la Figura 1.28, se resumen los resultados que se obtuvieron en esta sección. Notemos que en este nuevo diagrama, ya aparecen las funciones minimales y semi-abiertas. Además, ya fue posible dar una relación entre las funciones débilmente mezclantes y totalmente transitivas. Más adelante, daremos algunos ejemplos de estas clases de funciones. Cabe mencionar que existen otros resultados, además, de los que presentamos en nuestro trabajo, sin embargo, no es el objetivo de la tesis estudiar cada uno de ellos, es por esto que hemos incluído tan sólo algunos de estos resultados. Por comodidad, hemos denotado a las funciones débilmente mezclantes por Déb. M., a las funciones fuertemente transitivas por F. transitivas y a las funciones totalmente transitivas por T. transitivas.

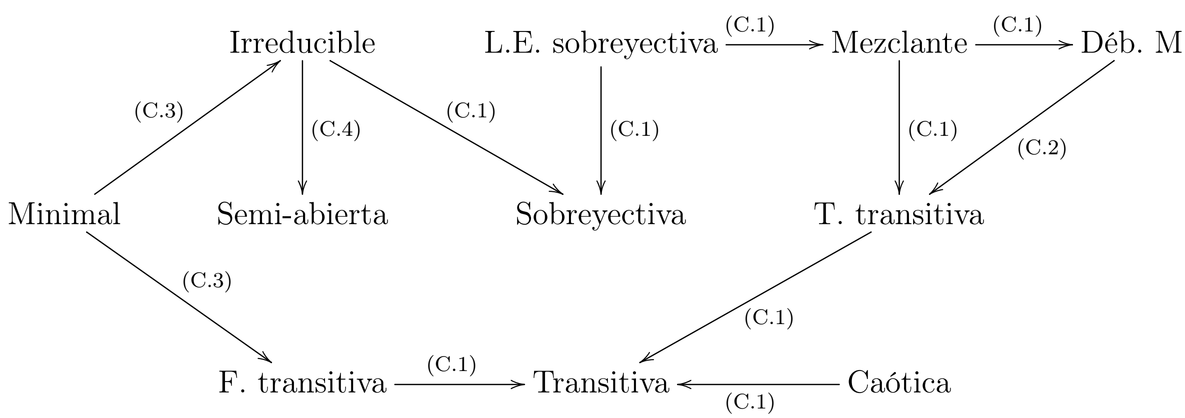


Figura 1.28: Relaciones entre funciones, con dominio compacto (y/o de Hausdorff) y f continua.

En el diagrama, las condiciones (C.1), (C.2), (C.3) y (C.4) son como sigue:

(C.1) Para cualquier espacio topológico X y para cualquier función $f : X \to X$.

(C.2) Para cualquier espacio topológico X y para cualquier función continua $f : X \to X$.

(C.3) Para cualquier espacio topológico X compacto y para cualquier función continua $f : X \to X$.

(C.4) para cualquier espacio topológico X compacto y Hausdorff y para cualquier función continua $f : X \to X$.

1.6. Tres funciones: tienda, logística y rotación irracional

Tres funciones muy importantes dentro del estudio de los sistemas dinámicos son: la tienda, la logística y la rotación irracional. En esta sección damos la definición de cada una de ellas y, además, analizamos sólo algunas de las muchísimas propiedades que éstas satisfacen. También, hacemos uso de los resultados que se resumen en el diagrama de la Figura 1.28 para mostrar que estas tres funciones pertenecen a algunas de estas clases de funciones.

Empezaremos analizando una de las funciones más conocidas y estudiadas dentro de los sistemas dinámicos.

Definición 1.6.1. Sea $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por:

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si} \quad x \leq \frac{1}{2}; \\ 2 - 2x, & \text{si} \quad x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Esta función se conoce como ***la función tienda***.

El nombre de esta función se debe a la forma que tiene su gráfica. Como podemos ver en la Figura 1.29, es muy parecida a una tienda de campaña.

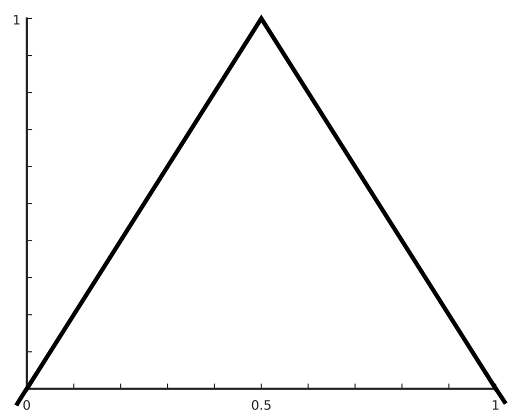


Figura 1.29: Gráfica de la función tienda.

Puesto que la parte interesante de la dinámica inducida por $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sucede en el intervalo $[0, 1]$, de aquí en adelante centramos nuestra atención en el estudio de las órbitas de T que inician en puntos de este intervalo. Es decir, nos dedicamos al estudio de la restricción de T al intervalo $[0, 1]$, $T : [0, 1] \to [0, 1]$.

Lo que se observa de manera inmediata es que esta función es continua. Además, esta función tiene dos puntos fijos. A continuación nos ocupamos de calcular dichos puntos.

De acuerdo a la Definición 1.3.10, buscamos a los puntos $x \in [0,1]$ tales que $T(x) = x$. Consideremos los siguientes casos:

Caso (i) $x \in [0, \frac{1}{2}]$. En este caso, $T(x) = 2x$. Por otro lado, $T(x) = x$. Esto implica que $2x = x$, de donde $x = 0$.

Caso (ii) $x \in [\frac{1}{2}, 1]$. En este caso, $T(x) = 2 - 2x$. Por otro lado, $T(x) = x$. Se sigue que $2 - 2x = x$, consecuentemente, $x = \frac{2}{3}$.

Así, se tiene que $x = 0$ y $x = \frac{2}{3}$ son los únicos puntos fijos de $T : [0,1] \to [0,1]$.

Lo que ahora haremos es demostrar la existencia de un punto periódico de T de periodo dos. Notemos lo siguiente:

$$T\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$T\left(T\left(\frac{1}{2}\right)\right) = T(1) = 0$$

$$T\left(T\left(T\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right) = T(0) = 0$$

$$\vdots$$

$$T^n\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \text{ para cada}\, n \geq 2.$$

De aquí, $T^n(\frac{1}{2}) = 0$, para cada $n \geq 2$ y $T^m(1) = 0$, para cada $m \geq 1$. Así, los puntos $\frac{1}{2}$ y 1 no son puntos periódicos. Por lo tanto, $\{\frac{1}{2}, 1\} \cap Per(T) = \emptyset$. Además, ya que 0 y $\frac{2}{3}$ son puntos fijos de T, si x_0 es un punto periódico de periodo dos para T, entonces cumple que $x_0 \notin \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right\}$.

Sea $x_0 \in (0, \frac{1}{2})$ tal que $T(x_0) \neq x_0$ y $T^2(x_0) = x_0$. Podemos observar que un punto x_0 que cumple estas dos condiciones, satisface que $T(x)$ es mayor que $\frac{1}{2}$. Luego, puesto que $x_0 \in (0, \frac{1}{2})$, se tiene que $T(x_0) = 2x_0$. Luego, ya que $T(x_0) \in (\frac{1}{2}, 1)$, $T^2(x_0) = T(T(x_0)) = T(2x_0) = 2 - 2(2x_0)$.

Como $T(x_0) = x_0$, se tiene que $2 - 4x_0 = x_0$. De aquí, $x_0 = \frac{2}{5}$. La órbita de este punto es:

$$\mathcal{O}(x_0, T) = \left\{\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \dots\right\}.$$

Por lo tanto, $\frac{2}{5} \in Per(f)$ y su periodo es 2. Ver Figura 1.30.

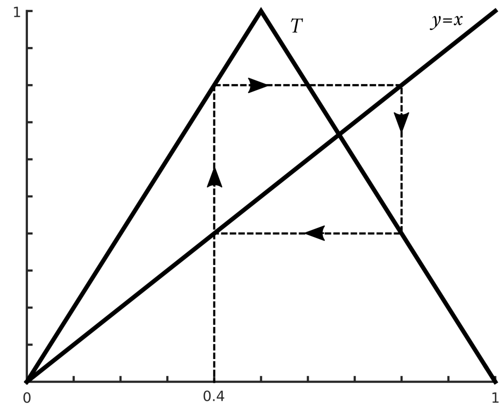


Figura 1.30: $x = \frac{2}{5}$ es un punto periódico de periodo dos de T.

Una propiedad muy importante que satisface la función tienda es que define un sistema dinámico transitivo. Ahora nos ocupamos de desarrollar una prueba de este resultado. Cabe mencionar que un estudio detallado de la función tienda se puede consultar en [24]. Sin embargo, hemos decidido incluir los resultados convenientes para este trabajo de tesis.

Un primer resultado y quizá el más importante para el desarrollo de la demostración es el siguiente.

Proposición 1.6.2. Para todo $n \in \mathbb{N}$ y para cada $l \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$ se tiene lo siguiente:

(1) La regla de correspondencia de T^n en $\left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right]$ es

$$T^n(x) = \mu + (-1)^l 2^n x,$$

donde μ es un número entero. Por lo tanto, en cada intervalo $\left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right]$ la gráfica de T^n es un segmento de recta cuya pendiente es 2^n, si l es par, y es $-(2^n)$, si l es impar.

(2) La función T^n restringida al intervalo $\left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right]$,

$$T^n \mid_{\left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right]} : \left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right] \to [0, 1],$$

es un homeomorfismo.

Demostración. La prueba se hará por inducción. Veamos que la afirmación se cumple para $n = 1$. En este caso, $l \in \{0, 1\}$.

Si $l = 0$, entonces $T : \left[0, \frac{1}{2}\right] \to [0, 1]$ es un homeomorfismo pues $T(x) = 2x = 0 + (-1)^0 2x$.

Si $l = 1$, entonces $T : \left[\frac{1}{2}, 1\right] \to [0, 1]$ es también un homeomorfismo ya que $T(x) = 2 - 2x = 2 + (-1)^1 2x$.

Ahora supongamos que la afirmación se cumple para $n = k$. Es decir, para cada $l \in \{0, 1 \ldots, 2^k - 1\}$.

$$T^k \mid_{\left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right]}: \left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right] \to [0,1]$$

es un homeomorfismo y en cada intervalo $\left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right]$, la regla de correspondencia de T^k es:

$$T^k(x) = \mu + (-1)^l 2^k x, \text{con}\, \mu \in \mathbb{Z}.$$

Sean $n = k+1$ y $l \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^{k+1} - 1\}$.

Consideremos los siguientes casos:

Caso (i) $l \leq 2^k - 1$. En este caso, T^{k+1} se puede expresar de la siguiente manera:

$$\left[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}}\right] \xrightarrow{T} \left[\frac{l}{2^k} \frac{l+1}{2^k}\right] \xrightarrow{T^k} [0,1].$$

La primer función es un homeomorfismo ya que si $l \leq 2^k - 1$, entonces $l + 1 \leq 2^k$. Así, $\frac{l+1}{2^k} \leq 1$. Por lo tanto, $\frac{l+1}{2^{k+1}} \leq \frac{1}{2}$. De aquí, $\left[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}}\right] \subseteq [0, \frac{1}{2}]$. Además, por hipótesis de inducción, T^k es un homeomorfismo. De aquí que:

$$T^{k+1} \mid_{\left[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}}\right]}: \left[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}}\right] \to [0,1]$$

es un homeomorfismo.

Más aún,

$$x \xrightarrow{T} 2x \xrightarrow{T^k} \mu + (-1)^l 2^k 2x.$$

Por lo tanto,

$$T^{k+1}(x) = \mu + (-1)^l 2^{k+1} x.$$

Caso (ii) $2^k \leq l \leq 2^{k+1} - 1$. En este caso, T^{k+1} se puede expresar de la siguiente forma:

$$\left[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}}\right] \xrightarrow{T} \left[\frac{2^{k+1} - l - 1}{2^k}, \frac{2^{k+1} - l}{2^k}\right] \xrightarrow{T^k} [0,1].$$

Ya que $2^k \leq l$, se tiene que $\frac{2^{k+1}}{2} \leq l$. Así, $\frac{1}{2} \leq \frac{l}{2^{k+1}}$. Por otro lado, como $l \leq 2^{k+1} - 1$, tenemos que $l + 1 \leq 2^{k+1}$. Así, $\frac{l+1}{2^{k+1}} \leq 1$. Por lo tanto, $\left[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}}\right] \subseteq [\frac{1}{2}, 1]$.

Así, para este caso $T(x) = 2 - 2x$ es un homeomorfismo. Ahora, ya que $2^k \leq l \leq 2^{k+1} - 1$, tenemos que:

$$-2^k \geq -l \geq 1 - 2^{k+1}$$

$$-2^k - (1 - 2^{k+1}) \geq -l - (1 - 2^{k+1}) \geq 0$$

$$2^{k+1} - 2^k - 1 \geq 2^{k+1} - l - 1 \geq 0$$

$$2^k(2 - 1) - 1 \geq 2^{k+1} - l - 1 \geq 0$$

$$2^k - 1 \geq 2^{k+1} - l - 1 \geq 0.$$

De aquí, $2^{k+1} - l - 1 \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^k - 1\}$. Por hipótesis de inducción:

$$T^k \mid_{\left[\frac{2^{k+1}-l-1}{2^k}, \frac{2^{k+1}-l}{2^k}\right]} : \left[\frac{2^{k+1}-l-1}{2^k}, \frac{2^{k+1}-l}{2^k}\right] \to [0,1]$$

es también un homeomorfismo.

Ahora veamos cual es la regla de correspondencia de $T^{k+1}(x)$ para este caso.

Si $x \in \left[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}}\right]$, entonces:

$$T^{k+1}(x) = T^k(T(x)) = T^k(2 - 2x).$$

Por hipótesis de inducción:

$$T^k(2-2x) = \mu + (-1)^{2^{k+1}-l-1}2^k(2-2x) = \mu + (-1)^{2^{k+1}-l-1}2^{k+1} + (-1)^{2^{k+1}-l}2^{k+1}x.$$

Sea $\mu' = \mu + (-1)^{2^{k+1}-l-1}2^{k+1}$. Luego, ya que $2^{k+1} - l = 2(2^k - \frac{l}{2})$ y $l = 2(\frac{l}{2})$, se tiene que $(-1)^l = (-1)^{2^{k+1}-l}$. Así:

$$T^{k+1}(x) = \mu' + (-1)^l 2^{k+1}(x), \text{con}\, \mu' \in \mathbb{Z}.$$

De los casos, (i) y (ii), se tiene el resultado. ■

Un resultado más que vamos a necesitar para poder probar la transitividad de la función tienda es el siguiente.

Teorema 1.6.3. Sea (a, b) tal que $a < b$ y $(a, b) \subseteq [0, 1]$. Se cumple que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $T^N((a, b)) = [0, 1]$

Demostración. Como $a < b$, tenemos que $b - a > 0$. Luego, por la propiedad Arquimediana, podemos garantizar la existencia de un $N \in \mathbb{N}$ tal que $2N < b - a$. Ahora, ya que $2N > \frac{2N}{2^N}$, se tiene que $\frac{2N}{2^N} < b - a$. De aquí, $\frac{N}{2^N} < \frac{b-a}{2}$. Así, $\frac{1}{2^N} < \frac{b-a}{2}$. Por lo tanto, $\frac{1}{2^N} < \frac{b-a}{2}$. Se sigue que existe un valor l en el conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, 2^N - 1\}$ tal que

$$\left[\frac{l}{2^N}, \frac{l+1}{2^N}\right] \subseteq (a, b) \tag{1.6.1}$$

Por la Proposición 1.6.2, $T^N : \left[\frac{l}{2^N}, \frac{l+1}{2^N}\right] \to [0, 1]$ es un homeomorfismo. Consecuentemente, T^N es sobreyectiva. Esto es, $T^N\left(\left[\frac{l}{2^N}, \frac{l+1}{2^N}\right]\right) = [0, 1]$. Así, de (1.6.1), se tiene que $[0, 1] = T^N((a, b))$. ■

El Teorema 1.5.8, nos dice que toda función localmente eventualmente sobreyectiva es transitiva. Así, si logramos verificar que la función tienda es localmente eventualmente sobreyectiva, entonces habremos probado que esta función es transitiva.

Proposición 1.6.4. La función tienda es localmente eventualmente sobreyectiva en el intervalo $[0, 1]$.

Demostración. Sea U un subconjunto abierto y no vacío de $[0,1]$. Luego, existen $a, b \in [0,1]$ tales que $(a,b) \subseteq U$. De aquí, por el Teorema 1.6.3, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $T^N((a,b)) = [0,1]$. Así,

$$[0,1] \subseteq T^N((a,b)) \subseteq T^N(U).$$

Por lo tanto, $T^N(U) = [0,1]$. En consecuencia, T es localmente eventualmente sobreyectiva. ■

Del diagrama de la Figura 1.28, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1.6.5. La función tienda es mezclante, débilmente mezclante, totalmente transitiva y transitiva en el intervalo $[0,1]$.

Definición 1.6.6. Sean $4 \geq \lambda > 0$ y $L : [0,1] \to [0,1]$ la función dada por

$$L(x) = \lambda x(1-x), \text{para cada}\, x \in [0,1].$$

Esta función se conoce como ***función logística***.

Como podemos observar, para cada $\lambda > 0$, podemos considerar una función logística. En la Figura 1.31, se muestran algunas funciones logísticas para valores específicos de λ.

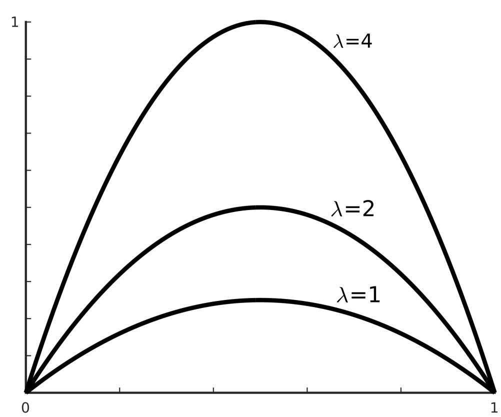


Figura 1.31: Funciones logísticas para $\lambda \in \{1,2,4\}$.

En este trabajo, nos ocupamos de la función logística para el caso $\lambda = 4$. Esto es, $L(x) = 4x(1-x)$. La gráfica de esta función se muestra en la Figura 1.32.

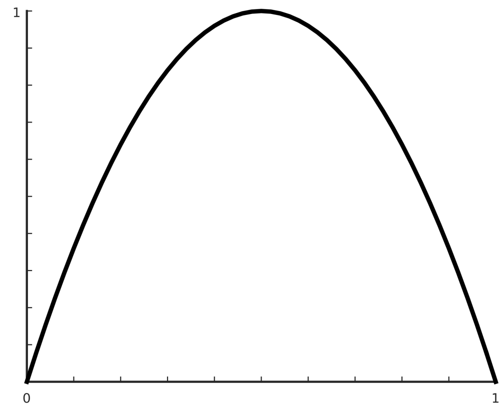


Figura 1.32: Función logistica.

Veamos cuáles son los puntos fijos de esta función. Buscamos los puntos $x_0 \in [0,1]$ tales que $L(x_0) = x_0$. O bien, $4x_0(1-x_0) = x_0$. Así, al resolver esta ecuación, se tiene que los puntos fijos de la función logística son $x_0 = 0$ y $x_0 = \frac{3}{4}$. Utilizamos el resultado de la Proposición 1.3.13 para saber si son puntos fijos repulsores o atractores.

Observemos que $L'(x) = 4 - 8x$. Luego, $\mid L'(0) \mid = 4 > 1$. De aquí, $x_0 = 0$ es un punto fijo repulsor. Ver Figura 1.33. Ahora, como $\mid L'(\frac{3}{4}) \mid = 2 > 1$, $x_0 = \frac{3}{4}$ es un punto fijo repulsor.

Observemos en la Figura 1.33, que para el punto x =0.3, la órbita $\mathcal{O}(x,f)$ se aleja del punto fijo $x_0 = 0$. En el dibujo, las flechas indican la dirección en la que se mueve la órbita de dicho punto.

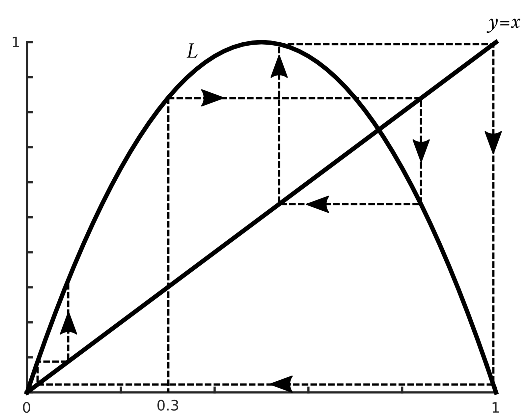


Figura 1.33: El punto $x_0 = 0$ es un punto fijo repulsor.

También, para un punto cercano a $x = \frac{3}{4}$, por ejemplo x_0 =0.8, la órbita $\mathcal{O}(x,f)$ se aleja del punto fijo $x_0 = \frac{3}{4}$. Ver Figura 1.34

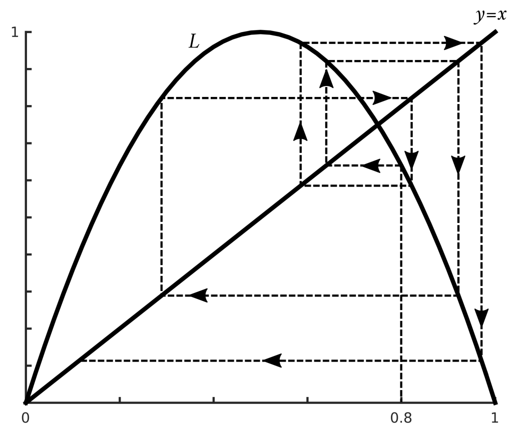


Figura 1.34: El punto $x_0 = \frac{3}{4}$ es un punto fijo repulsor.

Cuando se estudian funciones, una herramienta muy utilizada por la mayoría de los investigadores es la conjugación topológica ya que ésto les permite aprovechar las propiedades conocidas de algunas funciones para averiguar las propiedades de otras funciones. Además, por medio de la conjugación topológica, verificamos que la función logística también es transitiva.

Definición 1.6.7. Sean X y Y espacio topológicos y $f : X \to X$, $g : Y \to Y$ funciones. Se dice que f y g son conjugadas si existe un homeomorfismo $h : X \to Y$ tal que para cada punto $x \in X$, se cumple que $h(f(x)) = g(h(x))$. En tal caso se dice que f y g son ***conjugadas*** bajo h.

El hecho de que para cada punto $x \in X$, se cumpla que $h(f(x)) = g(h(x))$ se dice que el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "h"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

$$h \circ f = g \circ h$$

Proposición 1.6.8. Sean X y Y espacios topológicos, $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ funciones conjugadas. Se cumple que para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in X$, $h(f^n(x)) = g^n(h(x))$.

Demostración. La prueba se hará por inducción. Puesto que f y g son conjugadas bajo h, se tiene que el resultado se cumple para $n = 1$.

Supongamos que $h(f^n(x)) = g^n(h(x))$ y veamos que $h(f^{n+1}(x)) = g^{n+1}(h(x))$. Notemos que:

$$\begin{aligned} h(f^{n+1}(x)) &= h(f^n(f(x))) \\ &= g^n(h(f(x))) \\ &= g^n(g(h(x))) \\ &= g^{n+1}(h(x)). \end{aligned}$$

Así, se tiene el resultado. ∎

En la Proposición 1.6.9, damos una generalización de [24, Proposición 11.6].

Proposición 1.6.9. Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ funciones conjugadas. La función f es transitiva en X si y sólo si g es transitiva en Y.

Demostración. Supongamos que f es transitiva en X y veamos que g es transitiva en Y. Sean U y W subconjuntos abiertos y no vacíos de Y. Puesto que h es un homeomorfismo, $h^{-1}(U)$ y $h^{-1}(W)$ son subconjuntos abiertos y no vacíos de X. Ya que f es transitiva, se tiene que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^N(h^{-1}(U)) \cap h^{-1}(W) \neq \emptyset$. Esto es, existe $x_0 \in h^{-1}(U)$ tal que $f^N(x_0) \in h^{-1}(W)$. De aquí, $h(x_0) \in h(h^{-1}(U)) \subseteq U$ y $g^N(h(x_0)) = h(f^N(x_0)) \in W$. Esto implica que $h(x_0) \in g^N(U) \cap W$. Así, $g^N(U) \cap W \neq \emptyset$. Por lo tanto, g es transitiva. De manera análoga se verifica que f es transitiva cuando g lo es. ∎

Para probar que la función logística es transitiva, es suficiente con encontrar un homeomorfismo que satisfaga las condiciones de la Definición 1.6.7 para $f = T$ y $g = L$. El siguiente resultado se puede consultar en [24, Proposición 11.10], sin embargo por la importancia que tiene en nuestro trabajo, decidimos incluir su prueba.

Teorema 1.6.10. Las funciones $T : [0,1] \to [0,1]$ y $L : [0,1] \to [0,1]$ son conjugadas utilizando el homeomorfismo $h : [0,1] \to [0,1]$ dado por $h(x) = \operatorname{sen}^2(\frac{\pi x}{2})$, para cada $x \in [0,1]$.

Demostración. No es difícil verificar que h es un homeomorfismo [24, Ejercicio 11.4]. Veamos que $h(T(x)) = L(h(x))$.

Sea $x \in [0,1]$. Observemos que:

$$\begin{aligned} (L \circ h)(x) &= L\left(\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) \\ &= 4\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\left(1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) \\ &= 4\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\left(\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) \\ &= \left(2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)^2 \\ &= \operatorname{sen}^2\left(2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) \\ &= \operatorname{sen}^2(\pi x). \end{aligned}$$

Ahora calculemos $(h \circ T)(x)$. Consideremos dos casos:

Caso (i) $x \in [0, \frac{1}{2}]$. En este caso:

$$(h \circ T)(x) = h(2x) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi(2x)}{2}\right) = \operatorname{sen}^2(\pi x).$$

Caso (ii) $x \in [\frac{1}{2}, 1]$. En este caso:

$$\begin{aligned}
(h \circ T)(x) &= h(2-2x) \\
&= \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi(2-2x)}{2}\right) \\
&= \operatorname{sen}^2(\pi - \pi x) \\
&= (\operatorname{sen}(\pi)\cos(\pi x) - \cos(\pi)\operatorname{sen}(\pi x))^2 \\
&= (-\cos(\pi)\operatorname{sen}(\pi x))^2 = \operatorname{sen}^2(\pi x).
\end{aligned}$$

Así, se tiene el resultado. ■

Ahora, de la Proposición 1.6.9 y el Teorema 1.6.10, se tiene lo siguiente.

Ejemplo 1.6.11. La función logística L de la Definición 1.6.6 es transitiva.

Finalmente, la función rotación irracional que a continuación presentamos, es otro ejemplo de una función transitiva.

Definición 1.6.12. Sean $S^1 = \{e^{2\pi i\alpha} : \alpha \in [0,1]\}$ y θ un número irracional. Se define la ***función rotación irracional*** $R : S^1 \to S^1$ como $R(e^{2\pi i\alpha}) = e^{2\pi i\theta}(e^{2\pi i\alpha}) = e^{2\pi i(\theta+\alpha)}$, para cada $\alpha \in [0,1]$ o simplemente;

$$R(z) = (e^{2\pi i\theta})z, \text{ para cada } z \in S^1.$$

Observación 1.6.13. Considerando la función rotación irracional $R : S^1 \to S^1$, se tiene que, para cada $z \in S^1$, $d(z, R(z))$ es constante. Pues, dado $z \in S^1$:

$$\begin{aligned}
d(z, R(z)) &= \| z - e^{2\pi i\theta}z \| \\
&= \| z(1 - e^{2\pi i\theta}) \| \\
&= \| z \| \| 1 - e^{2\pi i\theta} \| \\
&= \| 1 - e^{2\pi i\theta} \| .
\end{aligned}$$

Esto es, $d(z, R(z))$ es constante, para cada $z \in S^1$.

Proposición 1.6.14. La función rotación irracional R de la Definición 1.6.12 es minimal.

Demostración. Para probar que R es minimal, usamos el Teorema 1.5.18. Esto es, mostramos que la órbita $\mathcal{O}(z, R)$ es un conjunto denso en S^1, para cada $z \in S^1$. Para verificar esta afirmación, sean $z \in S^1$ y $k, m \in \mathbb{N}$ con $k \neq m$. Supongamos que $R^k(z) = R^m(z)$. Esto es, $e^{2\pi ki\theta} = e^{2\pi mi\theta}$. Puesto que $z \neq 0$, tenemos que $\dfrac{e^{2\pi ki\theta}z}{e^{2\pi mi\theta}z} = 1$. De aquí, $e^{2\pi i\theta(k-m)} = 1$.

Esto ocurre solo si $\theta(k-m) \in \mathbb{Z}$. Ya que $\theta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, tenemos que $k-m=0$. Así, $k=m$. Lo cual es una contradicción. Esta contradicción surge de suponer que para $k \neq m$, $R^k(z) = R^m(z)$. Por lo tanto, $R^k(z) \neq R^m(z)$. Esto prueba que $z, f(z), R^2(z), \ldots$ son todos puntos diferentes, para cada $z \in S^1$. O bien, la órbita $\mathcal{O}(z,R)$ es un conjunto infinito, para cada $z \in S^1$.

Fijemos $z, y \in S^1$ y $\varepsilon > 0$. Sabemos que S^1 es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^2$. De aquí, como $\mathcal{O}(z,R)$ es un conjunto infinito en S^1, por el Teorema 1.1.73, $\mathcal{O}(z,R)$ tiene un punto de acumulación. Sea $x_0 \in \mathcal{O}(z,R)$ dicho punto. Luego, por definición, se tiene que $(B(x_0,\varepsilon)\backslash\{x_0\}) \cap \mathcal{O}(z,R) \neq \emptyset$. Más aún, por el Teorema 1.1.62, el conjunto $(B(x_0,\varepsilon)\backslash\{x_0\}) \cap \mathcal{O}(z,R)$ es infinito, para cada $z \in S^1$. De aquí, existen $m, r \in \mathbb{N}$ tales que $R^m(x_0)$ y $R^{m+r}(x_0)$ están en $B(x_0, \frac{1}{2})$ y además $x_0 \neq R^m(x_0)$ y $x_0 \neq R^{m+r}(x_0)$. Así:

$$d(R^m(z), R^{m+r}(z)) \leq d(R^m(z), x_0) + d(x_0, R^{m+r}(x_0)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Pongamos $g = R^r$. Notemos que $g(z) = R^r(z) = e^{2\pi i r\theta} z$ es también una rotación. De aquí, $d(x, g(x)) = d(R^m(z), g(R^m(z))) < \varepsilon$, para cada $x \in S^1$. Además, $\mathcal{O}(g,z) = \{z, g(z), g^2(z), \ldots\}$ son puntos en la circunferencia tales que:

$$\begin{aligned}
d(g^k(z), g^{k+1}(z)) &= d(g^k(z), g(g^k(z))) \\
&= d((R^r)^k(z), g((R^r)^k(z))) \\
&= d(R^{rk}(z), g(R^{rk}(z))) < \varepsilon
\end{aligned}$$

De aquí, $\mathcal{O}(z,g) \cap B(y,\varepsilon) \neq \emptyset$. Así, se tiene que $\mathcal{O}(z,g)$ es un subconjunto denso en S^1. Como $g = R^r$, se deduce que

$$\mathcal{O}(z, R^r) = \{z, R^r(z), R^{2r}(z), R^{3r}(z), \ldots\} \subseteq \{z, R(z), R^2(z), \ldots\} = \mathcal{O}(z,R).$$

Consecuentemente, $\mathcal{O}(z,R)$ es un subconjunto denso en S^1. ■

Usando el diagrama de la Figura 1.28 y el Teorema 1.6.14, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.6.15. La función rotación irracional R de la Definición 1.6.12, es irreducible, semi-abierta, fuertemente transitiva y transitiva.

En [3], se prueba además que R es totalmente transitiva.

Teorema 1.6.16. La función rotación irracional R de la Definición 1.6.12 es totalmente transitiva.

En la tabla de la Figura 1.35, se muestran los resultados obtenidos en esta sección.

Función	**Propiedad**
Tienda	· Localmente eventualmente sobreyectiva · Mezclante · Débilmente Mezclante · Transitiva · Totalmente Transitiva
Logística	· Transitiva
Rotación irracional	· Transitiva · Totalmente transitiva · Fuertemente transitiva · Minimal · Irreducible · Semi-abierta

Figura 1.35: Resumen de las propiedades que satisfacen las funciones T, L y R.

1.7. Sistemas dinámicos discretos en la modelación matemática

Consideremos la siguiente situación. Supongamos que depositamos \$1000 en un banco a un interés del 10 %. Nos surge la siguiente pregunta: Si dejamos esta cantidad de dinero en el banco por n años, ¿cuánto dinero tendremos en nuestra cuenta al final de este periodo? Supongamos que el 10 % de intereses es agregado a nuestra cuenta, cada año a final del año.

Este es uno de los ejemplos más simples de un proceso iterativo o sistema dinámico.

Vamos a denotar el monto que tenemos en el banco al final del año n con A_n. Nuestro problema es determinar A_n para algún número de año n. Sabemos que A_0, nuestro depósito inicial es de \$1000. Después de un año nuestro monto aumenta el 10 % de esta cantidad. Así que:

$$A_1 = A_0 + 0.1A_0 = 1.1A_0.$$

Al final del segundo año:

$$A_2 = A_1 + 0.1A_1 = 1.1A_1.$$

De aquí, $A_2 = \$1210$. Continuando con este proceso,

$$A_3 = 1.1A_2$$

$$A_4 = 1.1A_3$$

$$\vdots$$

$$A_n = 1.1A_{n-1}.$$

Ahora podemos calcular recursivamente el monto A_n en función del monto A_{n-1}. La ecuación $A_n = 1.1A_{n-1}$ es un ejemplo de un proceso iterativo. El proceso iterativo involucrado es la multiplicación por 1.1. Esto es, si se define la función $F(x) = 1.1x$, entonces nuestro monto acumulado es determinado aplicando repetidas veces la función F:

$$A_1 = F(A_0)$$
$$A_2 = F(A_1)$$
$$A_3 = F(A_2)$$

y así sucesivamente. O bien:

$$A_2 = F(F(A_0)) = F \circ F(A_0)$$

$$A_3 = F(F(F(A_0))) = F \circ F \circ F(A_0).$$

Ya que $F(x) = 1.1x$, tenemos que:

$$F(F(x_0)) = (1.1)^2 x$$

$$F(F(F(x))) = (1.1)^3 x$$

y en general:

$$\underbrace{F \circ \cdots \circ F(x)}_{n-veces} = (1.1)^n x.$$

Finalmente, para encontrar A_n únicamente hay que calcular $(1.1)^n$ y multiplicar el resultado por A_0. Por ejemplo $A_{10} = \$2593.74$ y $A_{50} = \$117{,}390.85$.

Ahora introducimos un modelo dinámico de oferta y demanda de artículos cuya producción exige un periodo de tiempo al final del cual se obtiene la producción correspondiente al periodo. Este modelo supone que el precio se determina como consecuencia de la oferta y demanda, con la particularidad de que el precio del producto lo determina el mercado al final del periodo de producción y la producción se emprende al principio del periodo a un precio que los productores suponen que se va a mantener.

1. La demanda en el momento t, la cual denotamos por $D(t)$, depende linealmente del precio que rige en el mercado, $p(t)$:

$$D(t) = a - bp(t)\,, \text{con}\, a, b > 0,\ t > 0. \tag{1.7.1}$$

2. La oferta en el momento t, la cual denotaremos por $S(t)$, depende linealmente del precio del mercado del periodo anterior, $p(t-1)$, por ello:

$$S(t) = c + dp(t-1)\,, \text{con}\, c, d > 0. \tag{1.7.2}$$

3. La demanda se iguala con la oferta en cada periodo:

$$D(t) = S(t). \tag{1.7.3}$$

Al sustituir (1.7.1) y (1.7.2) en (1.7.3), se tiene que:

$$a - bp(t) = c + dp(t-1)$$

$$a - c = dp(t-1) + bp(t)$$

$$p(t) = \frac{(a-c)}{b} - \frac{dp(t-1)}{b}.$$

Puesto que se trata de una ecuación de primer orden, sólo se necesita una condición inicial p para el precio. Así, a un precio p_0, le corresponde una cantidad ofertada para el precio $S(1)$. Esta cantidad ofertada le corresponde una demanda $D(1) = S(1)$ y, a su vez, a esta cantidad demandada le corresponde un precio $p(1)$. Al precio $p(1)$ le corresponde una cantidad ofertada en el periodo siguiente $S(2)$, dando lugar a una cantidad demandada $D(2) = S(2)$ a la que le corresponde un precio $p(2)$ y así sucesivamente.

Un punto de equilibrio (punto fijo) $p*$ satisface lo siguiente:

$$p* = \frac{a-c}{b} - \frac{d}{b}p*$$

de aquí:

$$p*\left(1 + \frac{d}{b}\right) = \frac{a-c}{b}.$$

Por lo tanto:

$$p* = \frac{a-c}{b+d}.$$

Esto tiene sentido económico sólo en el caso cuando $a \geq c$.

Notemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
p(t) - p* &= -\frac{d}{b}\left[p(t-1) - p*\right] \\
&= -\frac{d}{b}\left[\frac{a-c}{b} - \frac{d}{b}p(t-2) - p*\right] \\
&= \left(\frac{d}{b}\right)^2 p(t-2) - \frac{d(a-c)}{b^2} + \frac{d}{b}\left(\frac{a-c}{b+d}\right) \\
&= \left(\frac{d}{b}\right)^2 p(t-2) + \left[\frac{b^2 d(a-c) - db(a-c)(b+d)}{b^3(b+d)}\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{d}{b}\right)^2 p(t-2) + \left[\frac{-db^2(a-c) - bd^2(a-c) + b^2d(a-c)}{b^3(b+d)}\right] \\
&= \left(\frac{d}{b}\right)^2 p(t-2) + \left[\frac{-bd^2(a-c)}{b^3(b+d)}\right] \\
&= \left(\frac{d}{b}\right)^2 [p(t-2) - p*] \\
&= \left(\frac{d}{b}\right)^2 \left[\frac{a-c}{b} - \frac{d}{b}p(t-3) - p*\right] \\
&= -\left(\frac{d}{b}\right)^3 p(t-3) + \left[\left(\frac{d}{b}\right)^2 \left(\frac{a-c}{b}\right) - \left(\frac{d}{b}\right)^2 \left(\frac{a-c}{b+d}\right)\right] \\
&= \left(\frac{d}{b}\right)^3 p(t-3) + \left[\frac{d^2b^2(a-c)(b+d) - b^3d^2(a-c)}{b^5(b+d)}\right] \\
&= -\left(\frac{d}{b}\right)^3 p(t-3) + \left[\frac{d^2b^3(a-c) + d^3b^2(a-c) - b^3d^2(a-c)}{b^5(b+d)}\right] \\
&= -\left(\frac{d}{b}\right)^3 [p(t-3) - p*] .
\end{aligned}
$$

Continuando con este proceso, se tiene que:

$$
p(t) - p* = \left(-\frac{d}{b}\right)^t [p_0 - p*].
$$

Ahora podemos analizar la estabilidad del punto fijo. Se tienen tres casos:

Caso (i) $r = \left(\frac{b}{d}\right) > 1$. En este caso, los precios alternan por arriba y por abajo pero convergen al precio de equilibrio. El cual, en este caso, es es un punto fijo atractor.

Caso (ii) $r = \left(\frac{b}{d}\right) < 1$. En este caso, los precios oscilan en torno al punto de equilibrio pero progresivamente se alejan cada vez más de él y el punto fijo es repulsor.

Caso (iii) $r = \left(\frac{b}{d}\right) = 1$. En este caso, los precios oscilan entre dos valores que dependen del precio de partida, p_0 y $\frac{a-c}{b} - p_0$, de forma que el punto fijo es atractor.

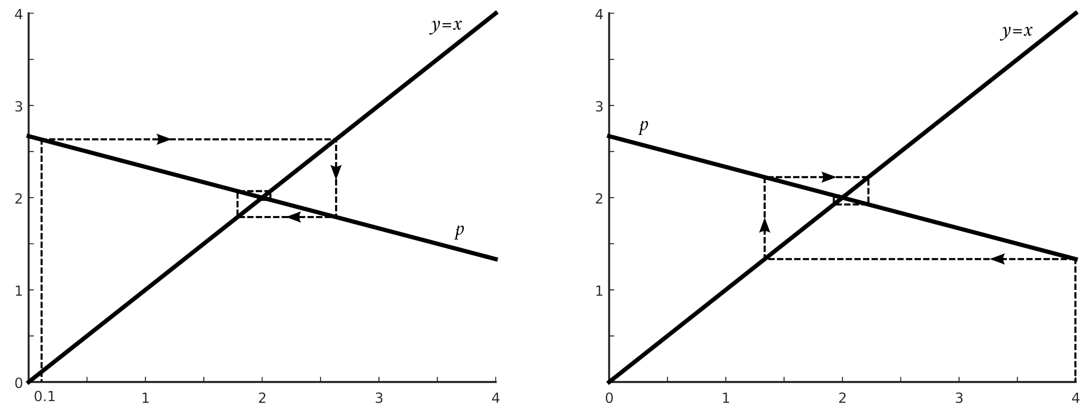
A continuación, analizamos los siguientes casos:

Caso (a) $a = 10$, $b = 3$, $c = 2$ y $d = 1$. Para estos valores, la función de precio es la siguiente:

$$
p(t) = \frac{10-2}{3} - \frac{1}{3}p(t-1) = \frac{1}{3}(8 - p(t-1)).
$$

Puesto que $\frac{b}{d} = 3 > 1$, se tiene que el punto de equilibrio $p* = 2$ es atractor.

En la Figura 1.36, se analiza este resultado gráficamente.



(a) Representación gráfica de la órbita de $x = 0.1$, bajo $p(t) = \frac{1}{3}(8 - p(t-1))$.

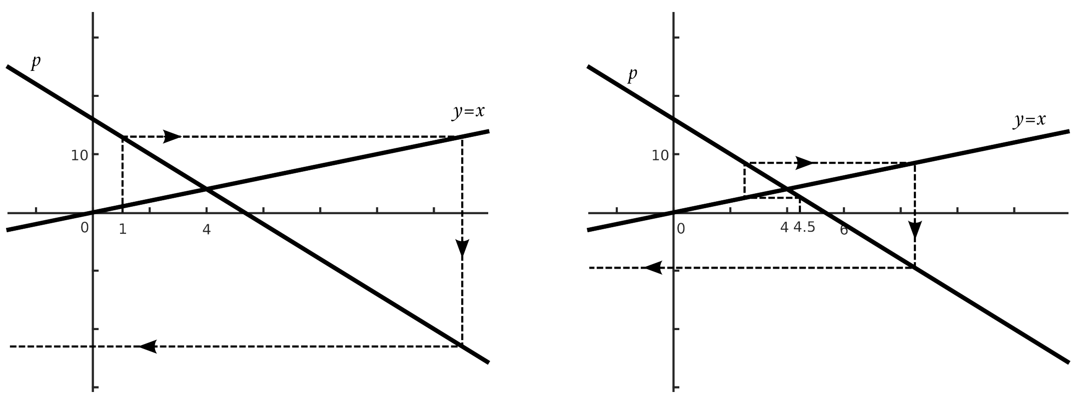
(b) Representación gráfica de la órbita de $x = 4$, bajo $p(t) = \frac{1}{3}(8 - p(t-1))$.

Figura 1.36: $r > 1$.

Caso (b) $a = 45$, $b = 2.5$, $c = 5$, $d = 7.5$. Para estos valores, la función de precio queda de la siguiente forma:

$$p(t) = \frac{45 - 5}{2.5} - \frac{7.5}{2.5} p(t-1) = 16 - 3p(t-1).$$

Puesto que $\frac{b}{d} = \frac{2.5}{7.5} = 0.33 < 1$. Se tiene que el punto de equilibrio $p* = 4$ es repulsor. En la Figura 1.37 analizamos este resultado gráficamente.



(a) Representación gráfica de la órbita de $x = 1$, bajo $p(t) = 16 - 3p(t-1)$).

(b) Representación gráfica de la órbita de $x = 4.5$, bajo $p(t) = 16 - 3p(t-1)$).

Figura 1.37: $r < 1$.

Capítulo 2

Otras nociones relacionadas a la transitividad topológica

El concepto de transitividad topológica, actualmente conocido como sistema dinámico discreto transitivo, fue introducido en el año de 1920 por G.D. Birkhoff [10] para espacios métricos. Desde entonces, este concepto ha sido estudiado ámpliamente y, a través del tiempo, esta noción ha sido generalizada a espacios topológicos [1], [24].

2.1. Definiciones

En esta sección introducimos el concepto de función órbita-transitiva, estrictamente órbita-transitiva, ω-transitiva y conjunto-abierto-transitiva ([25, Definición 1.1]). Estudiamos las relaciones que se dan de manera general entre estas clases de funciones y, posteriormente, analizamos algunos otros resultados que se tienen bajo condiciones adicionales sobre la función o el espacio. Cabe mencionar que se introducen algunos otros tipos de funciones de los cuales sólo mencionamos la relación que hay con los cuatro tipos antes mencionadas, sin embargo no analizamos a detalle estas propiedades. Para el lector interesado, sugerimos consultar [2].

Definición 2.1.1. Sean X un espacio topológico, $x \in X$ y $f : X \to X$ una función. Se dice que $y \in X$ es un punto ***ω-límite de x bajo f*** si para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y para cualquier abierto U tal que $y \in U$, existe un entero $n \geqslant k$ tal que $f^n(x) \in U$.

Al conjunto de todos los puntos ω-límite de x bajo f, lo denotamos por $\omega(x, f)$ y lo llamamos ***conjunto ω-límite de x***.

Ejemplo 2.1.2. Sean X y $f : X \to X$ como en el Ejemplo 1.5.17. Luego, $0 \in \omega(1, f)$.

Otra forma de definir este conjunto es la que se presenta en el Teorema 2.1.3.

Teorema 2.1.3. Sean X un espacio topológico, $x \in X$ y $f : X \to Y$ una función. Se cumple que $\omega(x, f) = \bigcap_{n=0}^{\infty} cl(\{f^k(x) : k \geq n\})$.

Demostración. Sea $y \in \omega(x, f)$. Veamos que $y \in \bigcap_{n=0}^{\infty} cl(\{f^k(x) : k \geq n\})$. O bien, que $y \in cl(\{f^k(x) : k \geq n\})$, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Sean $U \subseteq X$ abierto tal que $y \in U$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Por hipótesis, ya que $y \in \omega(x, f)$, existe $k > n$ tal que $f^k(x) \in U$. De aquí, $U \cap \{f^k(x) : k \geq n\} \neq \emptyset$. Así, $y \in cl(\{f^k(x) : k \geq n\})$. Como n se tomó arbitrario, se tiene que $y \in \bigcap_{n=0}^{\infty} cl(\{f^k(x) : k \geq n\})$. Por lo tanto, $\omega(x, f) \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} cl(\{f^k(x) : k \geq n\})$.

Ahora, sea $y \in \bigcap_{n=0}^{\infty} cl(\{f^k(x) : k \geq n\})$. Veamos que $y \in \omega(x, f)$. Sean $U \subseteq X$ abierto tal que $y \in U$ y $n \in \mathbb{N}$. Por hipótesis, como $y \in cl(\{f^k(x) : k \geq n+1\})$, se tiene que $\{f^k(x) : k \geq n+1\} \cap U \neq \emptyset$. Así, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > n$ y $f^k(x) \in U$. Por lo tanto, $y \in \omega(x, f)$. Consecuentemente, $\bigcap_{n=0}^{\infty} cl(\{f^k(x) : k \geq n\}) \subseteq \omega(x, f)$. ■

Este conjunto satisface muchas propiedades muy importantes dentro de la transitividad topológica. Sin embargo, nosotros sólo analizamos las propiedades convenientes para nuestro trabajo.

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata del Teorema 2.1.3.

Teorema 2.1.4. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y $x_0 \in X$. El conjunto $\omega(x_0, f)$ es un subconjunto cerrado de X.

Una pregunta que seguramente ya se habrán formulado, es la siguiente: ¿Existe alguna relación entre la órbita de un punto y su conjunto ω-límite? Damos una respuesta a ésta pregunta en el Teorema 2.1.5.

Teorema 2.1.5. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y $x \in X$. Se cumple que $\omega(x, f) \subseteq cl(\mathcal{O}(f(x), f))$.

Demostración. Sea $y \in \omega(x, f)$. Veamos que $y \in cl(\mathcal{O}(f(x), f))$. Sea $U \subseteq X$ abierto tal que $y \in U$. Por hipótesis, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq k$ y $f^n(x) \in U$. En particular, para $k = 2$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_1}(x) \in U$ con $n_1 \geq k$. Así, $f^{n_1}(x) \in U \cap \mathcal{O}(f(x), f)$. De aquí que $y \in cl(\mathcal{O}(f(x), f))$. ■

Una última propiedad que satisface este conjunto y que nos será de mucha ayuda más adelante, es la siguiente.

Teorema 2.1.6. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y $x_0 \in X$. Si f es continua, entonces $f(\omega(x_0, f)) \subseteq \omega(x_0, f)$.

Demostración. Supongamos que f es continua. Sean $x \in f(\omega(x_0, f))$, $k \in \mathbb{N}$ y U un subconjunto abierto de X tales que $x \in U$. Luego, existe $z \in \omega(x_0, f)$ tal que $f(z) = x$. Como $k \in \mathbb{N}$, $k - 1 \geq 0$, por el Teorema 2.1.3, $z \in cl(\{f^n(x_0) : n \geq k-1\})$. Por otra parte, dado que f es continua, $f^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto en X. Luego, $f^{-1}(U) \cap \{f^n(x_0) : n \geq k-1\} \neq \emptyset$. Así, existe $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq k-1$, tal que $f^n(x_0) \in f^{-1}(U)$. De donde, $f(f^n(x_0)) = f^{n+1}(x_0) \in U$. Notemos que $n + 1 \geq k$. Por lo tanto, $x \in \omega(x_0, f)$. ■

La propiedad que se muestra en el Teorema 2.1.6, no es propia del conjunto ω-límite de un punto. A los conjuntos que satisfacen esta propiedad, se les da un nombre especial.

Definición 2.1.7. Sean X un espacio topológico, $A \subseteq X$ y $f : X \to X$ una función. Se dice que A es $+$***invariante*** si $f(A) \subseteq A$, A es $-$***invariante*** si $f^{-1}(A) \subseteq A$ y A es ***invariante*** si $f(A) = A$.

Ejemplo 2.1.8. Sean X un espacio topológico e $id_X : X \to X$ la función identidad en X. Luego, todo subconjunto A de X es invariante y, por lo tanto, +invariante y -invariante.

Ejemplo 2.1.9. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y $x_0 \in X$. Del Teorema 2.1.6, se tiene que el conjunto $\omega(x_0, f)$ es un subconjunto +invariante.

Proposición 2.1.10. Sean X un espacio topológico, A un subconjunto de X y $f : X \to X$ una función.

(1) Si A es +invariante y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces $f^k(A) \subseteq A$.

(2) Si A es -invariante y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces $f^{-k}(A) \subseteq A$.

Demostración. (1) Sea $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Supongamos que A es +invariante. Veamos que $f^k(A) \subseteq A$. Puesto que A es +invariante, $f(A) \subseteq A$. De aquí, $f^2(A) \subseteq f(A) \subseteq A$. Luego, $f^3(A) \subseteq f(f(A)) \subseteq A$. Continuando con este proceso, se tiene que $f^k(A) \subseteq A$.

(2) Sea $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Supongamos que A es -invariante. Veamos que $f^{-k}(A) \subseteq A$. Puesto que A es menos invariante, se tiene que $f^{-1}(A) \subseteq A$. De aquí, $f^{-2}(A) \subseteq f^{-1}(A) \subseteq A$. Luego, $f^{-3}(A) \subseteq f^{-2}(A) \subseteq A$. Continuando con este proceso, se tiene que $f^{-k}(A) \subseteq A$.

De (1) y (2) se tiene el resultado. ∎

Recordemos que una función $f : X \to X$ es transitiva si para cualquier par de subconjuntos abiertos y no vacíos U y V de X, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Luego, por el Teorema 1.2.1, esto es equivalente a encontrar $k \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap f^{-k}(V) \neq \emptyset$. Notemos que si definimos un conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ cuyos elementos sean todos estos k, entonces f es transitiva si y sólo si $A \neq \emptyset$. Esta es una definición alternativa que se da en [2, Definición 1.1] de una función transitiva. A continuación presentamos de manera formal esta definición.

Definición 2.1.11. Sean X un espacio topológico, A y $B \subseteq X$ y $f : X \to X$ una función. Se definen los siguientes conjuntos:

$$N(A, B) = \{k \in \mathbb{Z} : A \cap f^{-k}(B) \neq \emptyset\} \text{ y } N_+(A, B) = N(A, B) \cap \mathbb{N}.$$

Definición 2.1.12. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. Se dice que f es:

(1) ***Órbita-transitiva*** si existe $x \in X$ tal que $cl(\mathcal{O}(x, f)) = X$.

(2) ***Estrictamente órbita-transitiva*** si existe $x \in X$ tal que $cl(\mathcal{O}(f(x), f)) = X$.

(3) ω-***transitiva*** si existe $x \in X$ tal que $\omega(x, f) = X$.

(4) ***IN*** si X no es la unión de dos subconjuntos propios, cerrados y $+$invariantes.

(5) ***TT*** si para cada par de subconjuntos abiertos y no vacíos U y V de X, el conjunto $N(U, V)$ no es vacío.

(6) $\boldsymbol{TT}_{++}$ si para cualquier par de subconjuntos abiertos y no vacíos U y V de X, el conjunto $N_+(U, V)$ es infinito.

Más adelante daremos ejemplos de las funciones que acabamos de definir.

2.2. Relaciones en General

En esta sección estudiamos las relaciones que existen entre los conceptos dados en la Definición 2.1.12, sobre un espacio topológico en general. Además, siempre que sea posible, mostramos con un ejemplo que los recíprocos no son verdaderos.

El siguiente resultado es inmediato de la definición. Sin embargo, decidimos incluir su demostración con el propósito de dejar al lector lo más convencido posible.

Proposición 2.2.1. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. Se cumple que:

(1) Si f es estrictamente órbita-transitiva, entonces f es órbita-transitiva.

(2) f es órbita-transitiva si y sólo si f tiene un punto transitivo.

(3) f es estrictamente órbita-transitiva si y sólo si existe un punto $x \in X$ tal que $f(x)$ es un punto transitivo de f.

Demostración. (1) Supongamos que f es estrictamente órbita-transitiva. Esto es, existe $x \in X$ tal que $cl(\mathcal{O}(f(x), f)) = X$. Pongamos $y = f(x) \in X$. Así, $cl(\mathcal{O}(y, f)) = X$. Por lo tanto, f es órbita-transitiva.

(2) Supongamos que f es órbita-transitiva. Luego, existe $x \in X$ tal que $cl(\mathcal{O}(x, f)) = X$. Así, x es un punto transitivo de f. Ahora supongamos que f tiene un punto transitivo. Sea $x_0 \in X$ dicho punto. Así, $cl(\mathcal{O}(f(x_0), f)) = X$. Por lo tanto, f es órbita-transitiva.

(3) Si f es estrictamente órbita-transitiva, entonces existe $x \in X$ tal que $cl(\mathcal{O}(f(x), f)) = X$. Así, $f(x)$ es un punto transitivo de f. Ahora supongamos que existe un punto $x \in X$ tal que $f(x)$ es un punto transitivo de f. De aquí que $cl(\mathcal{O}(f(x), f)) = X$. Por lo tanto, f es estrictamente órbita-transitiva.

De (1), (2) y (3) se tiene el resultado. ■

En el Teorema 2.1.5, vimos la relación que existe entre la órbita de un punto y su conjunto ω-límite. Es natural pensar que existe también una relación entre las funciones ω-transitiva y estrictamente órbita-transitiva. En efecto.

Proposición 2.2.2. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. Si f es ω-transitiva, entonces f es estrictamente órbita-transitiva.

Demostración. Supongamos que f es una función ω-transitiva. Esto es, existe $x \in X$ tal que $\omega(x, f) = X$. Por el Teorema 2.1.5, puesto que $\omega(x, f) \subseteq cl(\mathcal{O}(f(x), f))$, se tiene que $X \subseteq cl(\mathcal{O}(f(x), f))$. Consecuentemente, $X = cl(\mathcal{O}(f(x), f))$. Por lo tanto, f es estrictamente órbita-transitiva. ■

Proposición 2.2.3. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. Si f es ω-transitiva, entonces f es transitiva.

Demostración. Supongamos que f es ω-transitiva. Veamos que f es transitiva. Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X y $x \in V$. Por hipótesis, existe $x_0 \in X$ tal que $\omega(x_0, f) = X$. Luego, puesto que $x \in \omega(x_0, f)$, se tiene que para cualquier $k \in \mathbb{N}$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n_1 \geq k$ y $f^{n_1}(x_0) \in V$. Nuevamente, ya que $f^{n_1}(x_0) \in \omega(x_0, f)$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n_2 \geq n_1 + 1 > n_1$ y $f^{n_2}(x_0) \in V$. Como $f^2(x_0) \in \omega(x_0, f)$, existe $n_3 \in \mathbb{N}$ tal que $n_3 \geq n_2 + 1 > n_2 > n_1$ y $f^{n_3}(x_0) \in V$. Continuando con este proceso, se tiene que existen $k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$ tales que $\{f^{k_i}(x_0) : i \in \mathbb{N}\} \subseteq V$.

Ahora, como $U \neq \emptyset$, podemos tomar $y \in U$ y, puesto que $y \in \omega(x_0, f)$, existe $m \geq k + 1 > k$ tal que $f^m(x_0) \in U$. Luego, por la construcción de cada $k_i \in \mathbb{N}$, podemos tomar $i \in \mathbb{N}$ tal que $k_i > m$. Así, como $f^{k_i}(x_0) \in V$ y, además, por el Teorema 1.1.78, $x_0 \in f^{-m}(f^m(x_0)) \subseteq f^{-m}(U)$, se tiene que $f^{k_i}(x_0) \in f^{k_i - m}(U) \cap V$. Por lo tanto, f es transitiva ■

El siguiente resultado se tiene directamente de la definición.

Teorema 2.2.4. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. Se cumple lo siguiente:

(1) Si f es TT_{++}, entonces f es transitiva.

(2) Si f es transitiva, entonces f es TT.

Teorema 2.2.5. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. Si f es TT, entonces f es IN.

Demostración. Supongamos que f es TT y veamos que f es IN. Primero hay que notar que si suponemos que X contiene dos subconjuntos disjuntos abiertos y -invariantes U_1 y U_2, entonces ya que f es TT, tenemos que $N(U_1, U_2) \neq \emptyset$. De aquí, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $U_1 \cap f^{-k}(U_2) \neq \emptyset$. Consideremos los siguientes casos:

Caso (i) $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. En este caso, ya que U_2 es -invariante, $U_1 \cap f^{-k}(U_2) \subseteq U_1 \cap U_2$. Por lo tanto, $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Lo cual es una contradicción.

Caso (ii) $k < 0$. En este caso, $f^k(U_1 \cap f^{-k}(U_2)) \subseteq f^k(U_1) \cap f^k(f^{-k}(U_2))$. Como U_1 es -invariante, $f^k(U_1) \cap f^k(f^{-k}(U_2)) \subseteq U_1 \cap f^k(f^{-k}(U_2))$. Así, $U_1 \cap f^k(f^{-k}(U_2)) \neq \emptyset$. Luego, por el Teorema 1.1.78, $f^k(f^{-k}(U_2)) \subseteq U_2$. Así, $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Lo cual es una contradicción.

De los casos (i) y (ii), concluimos que si f es TT, entonces X no contiene dos subconjuntos propios abiertos y -invariantes.

Ahora, si X es la unión de dos subconjuntos propios, cerrados y +invariantes A_1 y A_2, entonces $X\backslash A_1$ y $X\backslash A_2$ son dos subconjuntos propios, abiertos disjuntos y -invariantes. En efecto, como $f(A_1) \subseteq A_1$, entonces $X\backslash A_1 \subseteq X\backslash f(A_1)$. Así, $f^{-1}(X\backslash A_1) \subseteq f^{-1}(X\backslash f(A_1))$. Luego, $f^{-1}(X\backslash A_1) \subseteq f^{-1}(X)\backslash f^{-1}(f(A_1))$. Además, $f^{-1}(X)\backslash f^{-1}(f(A_1)) = X\backslash f^{-1}(f(A_1))$ y $X\backslash f^{-1}(f(A_1)) \subseteq X\backslash A_1$. Así, $f^{-1}(X\backslash A_1) \subseteq X\backslash A_1$. De aquí, $X\backslash A_1$ es -invariante y, similarmente se prueba que, $X\backslash A_2$ es -invariante. Además, como $X = A_1 \cup A_2$, $(X\backslash A_1) \cap (X\backslash A_2) = \emptyset$. Lo cual no puede ocurrir por lo probado anteriormente. Por lo tanto, se concluye que f es IN. ■

Un resultado más que se tiene para cualquier espacio topológico y cualquier función, es el que se muestra a continuación.

Teorema 2.2.6. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. Si f es órbita-transitiva, entonces f es TT.

Demostración. Supongamos que f es órbita-transitiva. Veamos que f es TT. Sean U y V subconjuntos abiertos y no vacíos de X. Por hipótesis, existe $x_0 \in X$ tal que $cl(\mathcal{O}(x_0, f)) = X$. Luego, $\mathcal{O}(x_0, f) \cap U \neq \emptyset$ y $\mathcal{O}(x_0, f) \cap V \neq \emptyset$. De aquí, existen $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tales que $f^{k_1}(x_0) \in U$ y $f^{k_2}(x_0) \in V$. Así, $f^{k_2}(f^{k_1}(x_0)) \in f^{k_1}(V)$. Consecuentemente:

$$f^{-k_2}(f^{k_2}(f^{k_1}(x_0))) \subseteq f^{-k_2}(f^{k_1}(V)).$$

Esto es, $f^{k_1}(x_0) \in f^{-(k_2-k_1)}(V)$. Luego, $U \cap f^{-(k_2-k_1)}(V) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $N(U,V) \neq \emptyset$. Así, f es TT. ■

Notemos que en las Proposiciones 2.2.1, 2.2.2 y 2.2.3, X es cualquier espacio topológico y $f : X \to X$ es cualquier función. En el diagrama de la Figura 2.1, se muestra un resumen de las relaciones que se tienen hasta este momento, es decir, de las relaciones que se dan de manera general, entre estos tipos de funciones.

$$\begin{tikzcd}
& \omega\text{-transitiva} \arrow[r] \arrow[d] & \text{Estrictamente órbita-transitiva} \arrow[d] \\
\mathrm{TT}_{++} \arrow[r] & \text{Transitiva} \arrow[dr] & \text{Órbita-transitiva} \arrow[d] \\
& & \mathrm{TT} \arrow[d] \\
& & \mathrm{IN}
\end{tikzcd}$$

Figura 2.1: Relaciones en general.

Ahora podemos completar el diagrama de la Figura 1.27 con los resultados que se resumen en el diagrama de la Figura 2.1. Recordemos que todos estos resultados se cumplen para cualquier espacio topológico y cualquier función. En la Figura 2.2, denotamos con EOT a las funciones estrictamente órbita-transitivas y con OT a las funciones órbita-transitivas.

$$
\begin{tikzcd}
\text{Irreducible} \arrow[dr] & \text{L.E. sobreyectiva} \arrow[r] \arrow[d] & \text{Mezclante} \arrow[r] \arrow[d] & \text{Débilmente Mezclante} \\
 & \text{Sobreyectiva} & \text{Totalmente transitiva} \arrow[d] & \text{Fuertemente transitiva} \arrow[dl] \\
 & \text{Caótica} \arrow[r] & \text{Transitiva} \arrow[d] & \omega\text{-transitiva} \arrow[l] \arrow[d] \\
 & \text{TT}_{++} \arrow[ur] & \text{TT} \arrow[d] & \text{EOT} \arrow[d] \\
 & & \text{IN} & \text{OT} \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

Figura 2.2: Resumen de relaciones que se dan en general.

2.3. Condicionando al espacio fase

En la sección anterior, estudiamos las relaciones que se dan de manera general entre las funciones de la Definición 2.1.12. En esta sección, damos condiciones adicionales al espacio fase y analizamos los resultados que se tienen bajo estas nuevas hipótesis.

En la Proposición 2.2.1 vimos que toda función estrictamente órbita-transitiva es órbita-transitiva.

Sin embargo, una función órbita-transitiva, no es en general estrictamente órbita-transitiva. Veamos esto con un ejemplo.

Ejemplo 2.3.1. Sean $X = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \subseteq [0,1]$, con la métrica usual, y $f : X \to X$ definida por

$$f(0) = 0 \text{ y } f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Observemos que esta función es órbita-transitiva pues $cl(\mathcal{O}(1, f)) = X$. Sin embargo, no es estrictamente órbita-transitiva ya que para cada $x \in X$, se cumple que $x \notin cl(\mathcal{O}(f(x), f))$. En la Figura 2.3 se muestra el comportamiento de esta función.

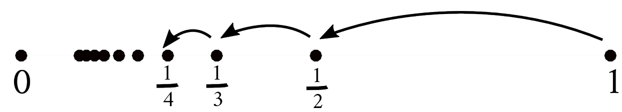


Figura 2.3: Comportamiento de f del Ejemplo 2.3.1.

Ahora vemos la importancia que tienen los puntos casi aislados en nuestro trabajo.

Proposición 2.3.2. Sean X un espacio topológico sin puntos casi aislados y $f : X \to X$ una función. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) f es órbita-transitiva.

(2) f es estrictamente órbita-transitiva.

(3) El conjunto de puntos transitivos de f es denso en X.

Demostración.

(1) $\Rightarrow$ (2) Supongamos que f es órbita-transitiva. Luego, existe $x \in X$ tal que $cl(\mathcal{O}(x, f)) = X$. Puesto que X no tiene puntos casi aislados, por el Lema 1.3.16, ya que x es un punto transitivo de f, se tiene que para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $f^n(x)$ es un punto transitivo de f, en particular para $n = 1$, se tiene que $f(x)$ es un punto transitivo de f. Esto es, $cl(\mathcal{O}(f(x), f)) = X$. Así, f es estrictamente órbita-transitiva.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sea $V = \{x \in X : cl(\mathcal{O}(x, f)) = X\}$. Queremos verificar que $cl(V) = X$. Puesto que f es estrictamente órbita-transitiva, existe $x_1 \in X$ tal que $cl(\mathcal{O}(f(x_1), f)) = X$. Sean $x \in X$ y U un subconjunto abierto de X tal que $x \in U$. Se tiene que $U \cap \mathcal{O}(f(x_1), f) \neq \emptyset$. Así, existe $z \in U$ tal que $z = f^k(f(x_1))$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Por el Lema 1.3.16, $f^k(f(x_1))$ es un punto transitivo de f. Consecuentemente, $z \in U \cap V$. Por lo tanto, $x \in cl(V)$. Así, $cl(V) = X$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que $V = \{x \in X : cl(\mathcal{O}(x, f)) = X\}$ es un subconjunto denso en X. Sea U un subconjunto abierto de X con $U \neq \emptyset$. Luego, $U \cap V \neq \emptyset$. Así, existe $z \in X$ tal que $cl(\mathcal{O}(z, f)) = X$. Por lo tanto, f es órbita-transitiva. ■

De la Proposición 2.3.2 y el Lema 1.1.60, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 2.3.3. Sean X un espacio topológico T_1 sin puntos aislados y $f : X \to X$ una función. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) f es órbita-transitiva.

(2) f es estrictamente órbita-transitiva.

(3) El conjunto de puntos transitivos de f es denso en X.

El Corolario 2.3.3 no puede ser generalizado a espacios T_1 con puntos aislados ni a espacios T_0 sin puntos aislados. Se ilustran estos hechos con los siguientes dos ejemplos.

Ejemplo 2.3.4. Sean X y $f : X \to X$ como en el Ejemplo 2.3.1. Luego, X es un espacio métrico compacto tal que $1 \in X$ es un punto aislado. En efecto, pues existe $\{1\}$ subconjunto abierto de X tal que $\{1\} \cap X = \{1\}$. Así, X tiene puntos aislados. Por otro lado, al ser X un espacio métrico, es un espacio T_1, sin embargo, en el Ejemplo 2.3.1, se muestra que la función f es órbita-transitiva y f no es estrictamente órbita-transitiva.

Ejemplo 2.3.5. Sean X y $f : X \to X$ como en el Ejemplo 2.3.1 y $Y = [0, 1]$ con la topología τ como en el Ejemplo 1.1.58. Observemos primero que el espacio $X \times Y$ es un espacio métrico compacto T_0 sin puntos aislados. Definamos $F : X \times Y \to X \times Y$ por $F(s, t) = (f(s), t)$, para cada $(s, t) \in X \times Y$. Esta función es órbita-transitiva ya que $cl(\mathcal{O}((1, 0), F)) = X \times Y$. Sin embargo, F no es estrictamente órbita-transitiva. Pues para cada $(x, y) \in X \times Y$, se cumple que $(x, y) \notin cl(\mathcal{O}(F((x, y)), F))$. En la Figura 2.4, se da una idea intuitiva del comportamiento de F [25, Ejemplo 2.10].

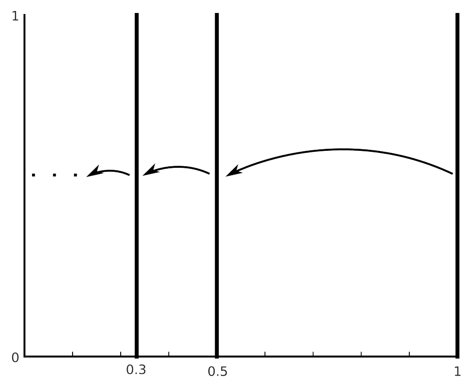


Figura 2.4: Comportamiento de F.

En el diagrama de la Figura 2.1, no fue posible dar una relación entre las funciones órbita-transitiva y transitiva. La siguiente proposición es un ejemplo más de la importancia que tienen los espacios topológicos sin puntos casi aislados y es una consecuencia inmediata de la Proposición 2.2.1, parte (2) y el Teorema 1.5.15.

Proposición 2.3.6. Sean X un espacio topológico sin puntos casi aislados y $f : X \to X$ una función. Si f es órbita-transitiva, entonces f es transitiva.

En el Ejemplo 2.3.7, se define una función que es órbita-transitiva pero no es transitiva. Esto ocurre ya que en este caso, X no satisface las hipótesis de la Proposición 2.3.6.

Ejemplo 2.3.7. Consideremos la función definida en el Ejemplo 2.3.1. Sabemos que esta función es óbita-transitiva pues $cl(\mathcal{O}(1, f)) = X$. Sin embargo, no es transitiva, ya que para los abiertos $U = \{\frac{1}{2}\}$ y $V = \{1\}$, se cumple que $f^n(U) \cap V = \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Sin embargo, al aumentar las condiciones del espacio, es posible dar una relación entre estas dos clases de funciones. El siguiente resultado es una consecuencia inmediata del Lema 1.1.60 y la Proposición 2.3.6.

Corolario 2.3.8. Sean X un espacio topológico T_1 sin puntos aislados y $f : X \to X$ una función. Si f es órbita-transitiva, entonces f es transitiva.

Finalmente, en la Proposición 2.2.2, vimos que, en general, toda función ω-transitiva es estrictamente órbita-transitiva. Ahora, con el Ejemplo 2.3.9, probamos que el recíproco de la Proposición 2.2.2 no es cierto en general.

Ejemplo 2.3.9. Sean X, Y y $f : X \to X$ como en el Ejemplo 2.3.5. Definamos $F_1 : X \times Y \to X \times Y$ como sigue:

$$F_1((s,t)) = \begin{cases} (s,0), & \text{si} \quad t \neq 0; \\ (f(s),0), & \text{si} \quad t = 0. \end{cases}$$

Luego, F_1 es una función estrictamente órbita-transitiva ya que $cl(\mathcal{O}(F_1((1,1)),F_1)) = cl(\mathcal{O}((1,0),F_1)) = X \times Y$. Sin embargo, F_1 no es ω-transitiva, pues de lo contrario, existiría un punto $(s,t) \in X \times Y$ tal que $\omega((s,t),F_1) \cap (\{1\} \times Y) \neq \emptyset$. De aquí, existiría $n \geq 2$ tal que $F_1((s,t)) \in \{1\} \times Y$, lo cual no puede ocurrir. Por lo tanto, para cada $(s,t) \in X \times Y$, se tiene que $\omega((s,t),F_1) \cap (\{1\} \times Y) = \emptyset$. Consecuentemente, F_1 no es ω-transitiva. Ver Figura 2.5.

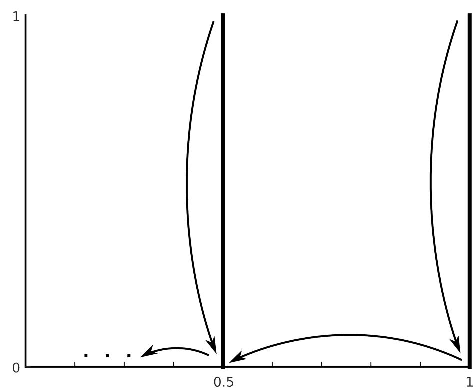


Figura 2.5: Gráfica de F_1.

Sin embargo, esto no es un problema para los espacios sin puntos casi aislados.

Teorema 2.3.10. Sean X un espacio topológico sin puntos casi aislados y $f : X \to X$ una función. Si f es estrictamente órbita-transitiva, entonces f es ω-transitiva.

Demostración. Supongamos que f es una función estrictamente órbita-transitiva. Veamos que f es ω-transitiva. Por hipótesis, existe $x_0 \in X$ tal que $cl(\mathcal{O}(f(x_0),f)) = X$. Veamos que $\omega(x_0,f) = X$. Notemos que, por el Lema 1.3.16, se tiene que todos los puntos del conjunto $\mathcal{O}(x_0,f)$ son puntos transitivos de f.

Sean $x \in X$, $k \in \mathbb{N}$ y U un subconjunto abierto de X tales que $x \in U$. Como $f^{k+1}(x_0)$ es un punto transitivo de f, $U \cap \mathcal{O}(f^{k+1}(x_0),f) \neq \emptyset$. Así, existe $n > k$ tal que $f^n(x_0) \in U$.

Por lo tanto, $x \in \omega(x_0, f)$. Así, $\omega(x_0, f) = X$, es decir, f es ω-transitiva. Esto prueba el resultado. ∎

La prueba del siguiente resultado se puede consultar en [2, Teorema 1.4].

Teorema 2.3.11. Sean X un espacio topológico de Hausdorff y $f : X \to X$ una función continua. Si X es perfecto, entonces TT_{++} es equivalente a transitiva, TT e IN.

Ejemplo 2.3.12. Puesto que S^1 es conexo, S^1 es perfecto. Así, la función rotación irracional es TT_{++}, TT e IN.

$$\begin{tikzcd}
\omega\text{-transitiva} \arrow[r, shift left] \arrow[d] & \text{Estrictamente órbita-transitiva} \arrow[l, shift left] \arrow[d, shift left] \\
\text{Transitiva} & \text{Órbita-transitiva} \arrow[l] \arrow[u, shift left]
\end{tikzcd}$$

Figura 2.6: Relaciones entre funciones cuando el espacio fase no tiene puntos casi-aislados.

En el diagrama de la Figura 2.6, se siguen mostrando los resultados que se resumen en el diagrama de la Figura 2.1 y, además, se muestran los que se estudiaron en esta sección. Poco a poco iremos extendiendo nuestro diagrama.

2.4. Condicionando a la función

En la sección anterior discutimos las consecuencias que se tienen al aumentar las propiedades de ciertos espacios en los que está definida una función. Se vio, por ejemplo, que una función estrictamente órbita-transitiva es siempre una función órbita-transitiva, sin embargo una función órbita-transitiva no siempre es una función estrictamente órbita-transitiva. Pero, si al dominio de la función se le pide, además, que no tenga puntos casi aislados, estos dos conceptos son equivalentes. En esta sección estudiamos algunos otros resultados que se pueden obtener como consecuencia de aumentar las propiedades de la función.

La Proposición 2.3.10 establece que en un espacio topológico sin puntos casi aislados, toda función estrictamente órbita-transitiva es transitiva. A continuación veremos que podemos cambiar la hipótesis "X un espacio topológico sin puntos casi aislados" por "f una función continua" y el resultado de esta proposición se sigue cumpliendo.

Proposición 2.4.1. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. Si f es continua y estrictamente óbita-transitiva, entonces f es ω-transitiva.

Demostración. Supongamos que f es estrictamente órbita-transitiva y continua. Veamos que f es ω-transitiva. Por hipótesis, como f es estrictamente órbita-transitiva, existe $x_0 \in X$ tal que:

$$cl(\mathcal{O}(f(x_0), f)) = X. \tag{2.4.1}$$

Veamos que $\omega(x_0, f) = X$. Para esto, vamos a demostrar que $cl(\mathcal{O}(f(x_0), f)) = \omega(x_0, f)$. Por el Teorema 2.1.5, $\omega(x_0, f) \subseteq cl(\mathcal{O}(f(x_0), f))$

Para la otra contención, como $\mathcal{O}(f(x_0), f) \subseteq \mathcal{O}(x_0, f)$ y por el Teorema 2.1.4, $\omega(x_0, f)$ es cerrado, es suficiente con verificar que $\mathcal{O}(x_0, f) \subseteq \omega(x_0, f)$.

Veamos entonces que $\mathcal{O}(x_0, f) \subseteq \omega(x_0, f)$. Sean $x \in \mathcal{O}(x_0, f)$, $k \in \mathbb{N}$ y U un subconjunto abierto de X tales que $x \in U$. Luego, de (2.4.1), se tiene que $\mathcal{O}(f(x_0), f) \cap U \neq \emptyset$. De aquí, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_0}(x_0) \in U$. Como f es continua, f^{n_0} es una función continua, así, existe un subconjunto abierto U_1 de X tal que $x_0 \in U_1$ y $f^{n_0}(U_1) \subseteq U$. Nuevamente, por (2.4.1), se tiene que $U_1 \cap \mathcal{O}(f(x_0), f) \neq \emptyset$. Esto es, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_1}(x_0) \in U_1$. Consecuentemente, $f^{n_0}(f^{n_1}(x_0)) \in f^{n_0}(U_1) \subseteq U$. Como $f^{n_0+n_1}$ es continua, existe un subconjunto abierto U_2 de X tal que $x_0 \in U_2$ y $f^{n_0+n_1}(U_2) \subseteq U$. Por (2.4.1), $U_2 \cap \mathcal{O}(f(x_0), f) \neq \emptyset$. Así, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_2}(x_0) \in U_2$. De aquí, $f^{n_0+n_1}(f^{n_2}(U_2)) \in f^{n_0+n_1}(U_2) \subseteq U$. Continuando con este proceso, pongamos $n = n_0 + n_1 + n_2 + \cdots + n_k \in \mathbb{N}$. Observemos que al ser cada $n_i \geq 1$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, se tiene que $n_1 + n_2 + \cdots + n_k \geq k$ y puesto que $n_0 \geq 1$, se tiene que $n > k$. De aquí, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > k$ y $f^n(x_0) \in U$. Por lo tanto, $x \in \omega(x_0, f)$. Consecuentemente, $\mathcal{O}(x_0, f) \subseteq \omega(x_0, f)$. Luego, $cl(\mathcal{O}(f(x_0), f)) \subseteq cl(\mathcal{O}(x_0, f)) \subseteq cl(\omega(x_0, f))$. Por el Teorema 2.1.4, como $\omega(x_0, f)$ es cerrado, se tiene que $cl(\mathcal{O}(f(x_0), f)) \subseteq \omega(x_0, f)$. Por lo tanto, $\omega(x_0, f) = cl(\mathcal{O}(f(x_0), f)) = X$. Esto es, f es una función ω-transitiva. ■

Ahora bien, en la Proposición 2.3.6, vimos que si X no tiene puntos casi aislados, entonces toda función órbita-transitiva es transitiva. Un resultado más general se tiene al sustituir la hipótesis "X no tiene puntos casi aislados" por "f es una función continua". El resultado es el siguiente.

Proposición 2.4.2. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. Si f es estrictamente órbita-transitiva, entonces f es transitiva.

Demostración. Supongamos que f es estrictamente órbita-transitiva. Luego, por la Proposición 2.4.1, f es ω-transitiva. Finalmente, por la Proposición 2.2.3, se tiene que f es transitiva. ■

En el Ejemplo 2.4.3, se muestra que en la Proposición 2.4.2, la condición "$f : X \to X$ una función continua" no puede debilitarse a "$f : X \to X$ una función".

Ejemplo 2.4.3. En el Ejemplo 2.3.9, vimos que F_1 es una función estrictamente órbita-transitiva. Sin embargo, F_1 no es transitiva ya que, para los abiertos $U = \{\frac{1}{2}\} \times [0, 1]$ y $V = \{1\} \times [0, 1]$ se tiene que $F_1^n(U) \cap V = \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Hasta aquí, hemos analizado las condiciones bajo las cuales las funciones ω-transitiva, estrictamente órbita-transitiva y órbita-transitiva son transitivas. Ahora analizamos el problema inverso: ¿cuándo una función transitiva es órbita-transitiva, estrictamente órbita-transitiva y ω-transitiva? En el diagrama de la Figura 2.1, podemos observar que es suficiente con encontrar condiciones bajo las cuales una función ω-transitiva es transitiva para poder responder la pregunta anterior.

Lema 2.4.4. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. f es transitiva si y sólo si para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y para cualquier par de conjuntos abiertos U y V en X, existe $k \geq n$ y un conjunto abierto no vacío $W \subseteq U$ tal que $f^k(W) \subseteq V$.

Demostración. Supongamos que f es transitiva. Sean $n \in \mathbb{N}$ y U y V conjuntos abiertos y no vacíos en X. Puesto que f es transitiva, existe $k_n \in \mathbb{N}$ tal que $f^{k_n}(U) \cap V \neq \emptyset$. De aquí, por el Teorema 1.2.1, $U \cap f^{-k_n}(V) \neq \emptyset$. Luego, puesto que f es continua, se sigue que f^{k_n} es continua. Así, $f^{-k_n}(V)$ es un conjunto abierto de X. Sea $V_n = f^{-k_n}(V) \cap U$. De todo lo anterior, V_n es un subconjunto abierto y no vacío de X tal que:

$$f^{k_n}(V_n) = f^{k_n}(f^{-k_n}(V) \cap U) \subseteq f^{k_n}(f^{-k_n}(V)) \cap f^{k_n}(U) \subseteq V \cap f^{k_n}(U) \subseteq V. \tag{2.4.2}$$

Nuevamente, puesto que f es transitiva, para los conjuntos abiertos y no vacíos U y V_n en X, se tiene que existe $k_{n-1} \in \mathbb{N}$ tal que $f^{k_{n-1}}(U) \cap V \neq \emptyset$. Sea $V_{n-1} = f^{-k_{n-1}}(V_n) \cap U$. Luego, V_{n-1} es un conjunto abierto no vacío de U y:

$$f^{k_{n-1}}(V_{n-1}) = f^{k_{n-1}}(f^{-k_{n-1}}(V_n) \cap U) \subseteq f^{k_{n-1}}(f^{-k_{n-1}}(V_n)) \cap f^{k_{n-1}}(U) \subseteq V_n \cap f^{k_{n-1}}(U) \subseteq V_n$$

Similarmente para $i = n-2, n-3, \ldots, 1$, existen $k_i \in \mathbb{N}$ y un conjunto abierto y no vacío $V_i \subseteq U$ tal que $f^{k_i}(V_i) \subseteq V_{i+1}$. Sean $W = V_1$ y $k = \sum_{i=1}^{n} k_i$. Puesto que $k_i \geq 1$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $k \geqslant n$. Por otro lado:

$$\begin{aligned}
f^k(V_1) &= f^{k_n+k_{n-1}+k_{n-2}+\cdots+k_2}(f^{k_1}(V_1)) \\
&\subseteq f^{k_n+k_{n-1}+k_{n-2}+\cdots+k_3}(f^{k_2}(V_2)) \\
&\subseteq f^{k_n+k_{n-1}+k_{n-2}+\cdots+k_4}(f^{k_3}(V_3)) \\
&\vdots \\
&\subseteq f^{k_n}(f^{k_{n-1}}(V_{n-1})) \\
&\subseteq f^{k_n}(V_n).
\end{aligned}$$

Luego, de (2.4.2), se tiene que $f^k(W) \subseteq V$.

Recíprocamente, supongamos que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y para cualquier par de conjuntos abiertos U y V en X, existe $k \geqslant n$ y un conjunto abierto no vacío $W \subseteq U$ tal que $f^k(W) \subseteq V$. Veamos que f es transitiva. Sean U y V subconjuntos abiertos y no vacíos en X. Por hipótesis, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, existe $k \geqslant n$ y un conjunto abierto no vacío $W \subseteq U$ tal que $f^k(W) \subseteq V$. Ya que $f^k(W) \subseteq f^k(U)$, $f^k(W) \subseteq f^k(U) \cap V$. Puesto que $W \neq \emptyset$, se tiene que $f^k(W) \neq \emptyset$. De aquí, $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Por lo tanto, f es transitiva. ■

Antes de dar los dos últimos resultados de esta sección, hay que recordar que un espacio topológico es parcialmente compacto y pseudo-regular si existe un subconjunto abierto y no vacío U de X tal que $cl(U)$ es un subespacio de X compacto y pseudo-regular. Además, X es parcialmente completable si existe un subconjunto abierto y no vacío U de X tal que $cl(U)$ es homeomorfo a un espacio métrico completo.

Proposición 2.4.5. Sean X un espacio topológico con una base numerable, parcialmente compacto y pseudo-regular y $f : X \to X$ una función continua. Si f es transitiva, entonces f es ω-transitiva.

Demostración. Sea $\beta = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base numerable para la topología de X. Luego, podemos suponer que para cada $i \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{j \in \mathbb{N} : V_j = V_i\}$ es un conjunto infinito. Por hipótesis, existe un subconjunto abierto y no vacío U de X tal que $cl(U)$ es compacto y pseudo-regular.

Sean $W_0 = U$ y $k_0 = 1$. Luego, ya que $W_0 \subseteq cl(U)$ y $cl(U)$ es pseudo-regular, existe un subconjunto abierto y no vacío Q_0 de X tal que $cl(Q_0) \subseteq W_0$. Para Q_0, $k_0 + 1$ y V_1, por el Lema 2.4.4, existen $k_1 \geq k_0 + 1 > k_0$ y $W_1 \subseteq Q_0$ tales que $f^{k_1}(W_1) \subseteq V_1$. Nuevamente, ya que $W_1 \subseteq cl(U)$ y $cl(U)$ es pseudo-regular, existe Q_1 subconjunto abierto y no vacío de X tal que $cl(Q_1) \subseteq W_1$. Luego, para Q_1, $k_1 + 1$ y $V_2 = V_1$, por el Lema 2.4.4, existen $k_2 \geq k_1 + 1 > k_1$ y $W_2 \subseteq Q_1$ tales que $f^{k_2}(W_2) \subseteq V_2$. Continuando con este proceso, para cada $V_n \in \beta$ con $n \in \mathbb{N}$, existen $k_n > k_{n-1}$ y $W_n \subseteq W_{n-1}$ tales que $f^{k_n}(W_n) \subseteq V_n$ y $cl(W_n) \subseteq W_{n-1}$. Sea $Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} cl(W_n)$. Luego, como $cl(W_n) \subseteq cl(U)$ y $cl(U)$ es compacto, entonces $cl(W_n)$ es compacto, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por Teorema 1.1.72, $Y \neq \emptyset$. Ahora veamos que para cualquier $y \in Y$, se cumple que $\omega(y, f) = X$. Sean $y \in Y$, $x \in X$, T un subconjunto abierto de X tales que $x \in T$ y $k \in \mathbb{N}$. Luego, existe $V_l \in \beta$ tal que $x \in V_l \subseteq T$. De aquí, existe $k_l > k_{l-1}$ y W_l tales que $f^{k_l}(W_l) \subseteq V_l$. Como $y \in Y$, $y \in cl(W_k) \subseteq W_{k-1}$ y $f^k(W_{k-1}) \subseteq V_{k-1}$. Por construcción, $V_{k+1} = V_l$. Por lo tanto, $f^k(y) \in V_l \subseteq T$. Consecuentemente, $x \in \omega(y, f)$. ■

Las hipótesis de la Proposición 2.4.5 se pueden cambiar por las que se dan en el Teorema 2.4.6.

Teorema 2.4.6. Sean X un espacio topológico con una base numerable, parcialmente completable y $f : X \to X$ una función continua. Si f es transitiva, entonces f es ω-transitiva.

Demostración. Sea $\beta = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base numerable para la topología de X. Luego, podemos suponer que para cada $i \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{j \in \mathbb{N} : V_j = V_i\}$ es un conjunto infinito. Por hipótesis, existe un subconjunto abierto y no vacío U de X tal que $cl(U)$ es homeomorfo a un espacio métrico completo. Así, podemos suponer que:

(1) Existe una métrica d en $cl(U)$ tal que $(cl(U), d)$ es un espacio métrico completo y la topología inducida por d es justamente la topología en $cl(U)$ como subespacio de X.

(2) El diámetro diám$(W_n) \leq 2^{-n}$ y $cl(W_n) \subseteq W_{n-1}$.

Sea $Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} cl(W_n)$. Luego, como $cl(W_n) \subseteq cl(U)$ y $cl(U)$ es compacto, entonces $cl(W_n)$ es compacto, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por Teorema el 1.1.72, $Y \neq \emptyset$. Ahora veamos que para cualquier $y \in Y$, se cumple que $\omega(y, f) = X$. Sea $y \in Y$, $x \in X$, T un subconjunto abierto de X tal que $x \in T$ y $k \in \mathbb{N}$. Luego, existe $V_l \in \beta$ tal que $x \in V_l \subseteq T$. De aquí, existe $k_l > k_{l-1}$ y W_l tales que $f^{k_l}(W_l) \subseteq V_l$. Como $y \in Y$, $y \in cl(W_k) \subseteq W_{k-1}$ y $f^k(W_{k-1}) \subseteq V_{k-1}$. Por construcción, $V_{k+1} = V_l$. Por lo tanto, $f^k(y) \in V_l \subseteq T$. Consecuentemente, $x \in \omega(y, f)$.

De (1) y (2), se tiene el resultado. ■

Con este último resultado, terminamos de analizar el diagrama de la Figura 2.1 y ahora mostramos un resumen de los resultados obtenidos.

$$
\begin{tikzcd}
\omega\text{-transitiva} \arrow[r, shift left, "(C.1)"] \arrow[d, shift left, "(C.1)"] & \text{Estrictamente órbita-transitiva} \arrow[l, shift left, "(C.2) o (C.3)"] \arrow[d, shift left, "(C.1)"] \arrow[dl, shift left, "(C.2)"] \\
\text{Transitiva} \arrow[u, shift left, "(C.4)"] \arrow[r, shift left, "(C.4)"] \arrow[ur, shift left, "(C.4)"] & \text{Órbita-transitiva} \arrow[l, shift left, "(C.3)"] \arrow[u, shift left, "(C.3)"]
\end{tikzcd}
$$

Figura 2.7: Resumen de relaciones entre funciones.

En el diagrama, las condiciones (C.1), (C.2), (C.3) y (C.4) son como sigue:

(C.1) Para cualquier espacio topológico X y para cualquier función $f : X \to X$.

(C.2) Para cualquier espacio topológico X y para cualquier función continua $f : X \to X$.

(C.3) Para cualquier espacio topológico X sin puntos casi-aislados y para cualquier función $f : X \to X$.

(C.4) para cualquier espacio topológico X con una base numerable el cual es parcialmente compacto y pseudo-regular, o parcialmente completable y para cualquier función continua $f : X \to X$.

Capítulo 3

Propiedades del producto simétrico

Dado un espacio topológico X, un hiperespacio inducido por éste, es una colección de subconjuntos de X considerada con alguna topología. Uno de estos hiperespacios es el n-ésimo producto simétrico de X el cual fue introducido originalmente por K. Borsuk y S. Ulam en 1931 para espacios métricos [11]. Lo que hacemos a partir de este capítulo, es estudiar propiedades topológicas y dinámicas sobre el n-ésimo producto simétrico de X. Para lograr tal objetivo primero definimos una topología para la colección de subconjuntos cerrados y no vacíos de X.

3.1. Topología de Vietoris

La topología que se define sobre el n-ésimo producto simétrico se conoce como topología de Vietoris y, en esta sección, se presentan los conceptos necesarios para poder trabajar con dicha topología.

Definición 3.1.1. Sean X un espacio topológico y $A_1, A_2, \ldots, A_k$ subconjuntos no vacíos de X. Definimos:

$$\langle A_1, \ldots, A_k \rangle = \left\{ B \subseteq X : B \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} A_i \,\text{y}\, B \cap A_i \neq \emptyset\,, \text{para cada}\, i \in \{1, \ldots, k\} \right\}.$$

Estos conjuntos son llamados ***vietóricos***.

En la Observación 3.1.2 se enlistan algunas propiedades que se deducen fácilmente de la definición y que más adelante utilizaremos.

Observación 3.1.2. Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$ no vacío. Se tiene que:

(1) $\langle A \rangle = \{B \subseteq X : B \subseteq A\}$.

(2) $\langle X, A \rangle = \{B \subseteq X : B \cap A \neq \emptyset\}$.

(3) $\langle A \rangle \cap \langle X, X \setminus A \rangle = \emptyset$.

(4) $\langle X\backslash A\rangle \cap \langle X, A\rangle = \emptyset$.

Uno de los hiperespacios más conocidos es el que se define a continuación.

Definición 3.1.3. Dado un espacio topológico X, definimos:

$$CL(X) = \{A \subseteq X : A \neq \emptyset \text{ y } A \text{ es cerrado en X}\}.$$

Observación 3.1.4. De aquí en adelante, estaremos trabajando con las colecciones $\langle U_1, \ldots, U_k\rangle$ tales que $\langle U_1, \ldots, U_k\rangle \subseteq CL(X)$.

En el Teorema 3.1.5, se expresa al hiperespacio $CL(X)$ a partir de ciertos vietóricos.

Teorema 3.1.5. Sean X un espacio topológico y $A_1, \ldots, A_k$ subconjuntos no vacíos de X. Se cumple lo siguiente:

(1) $\langle A_1, \ldots, A_k\rangle = \left\langle \bigcup_{i=1}^{k} A_i \right\rangle \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k}\langle X, A_i\rangle\right)$.

(2) $CL(X) = \langle A\rangle \cup \langle X, X\backslash A\rangle$.

(3) $CL(X) = \langle X\backslash A\rangle \cup \langle X, A\rangle$.

(4) $CL(X)\backslash\langle A\rangle = \langle X, X\backslash A\rangle$.

Demostración. (1) Sea $A \in \langle A_1, \ldots, A_k\rangle$. Luego, $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ y $A \cap A_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. De aquí, $A \in \langle\bigcup_{i=1}^{k} A_i\rangle$. Puesto que $A \cap A_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, se tiene que $A \in \langle X, A_i\rangle$, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. Por lo tanto, $A \in \bigcap_{i=1}^{k}\langle X, A_i\rangle$. Consecuentemente, $A \in \langle\bigcup_{i=1}^{k} A_i\rangle \cap \bigcap_{i=1}^{k}\langle X, A_i\rangle$.

Sea $A \in \langle\bigcup_{i=1}^{k} A_i\rangle \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k}\langle X, A_i\rangle\right)$. Luego, $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ y $A \cap A_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. Por lo tanto, $A \in \langle A_1, \ldots, A_k\rangle$. Por consiguiente, $\langle A_1, \ldots, A_k\rangle = \langle\bigcup_{i=1}^{k} A_i\rangle \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k}\langle X, A_i\rangle\right)$.

(2) Claramente $\langle A\rangle \cup \langle X, X\backslash A\rangle \subseteq CL(X)$. Resta verificar que $CL(X) \subseteq \langle A\rangle \cup \langle X, X\backslash A\rangle$. Sea $B \in CL(X)$. Luego, $B \neq \emptyset$ y B es un subconjunto cerrado de X. Si $B \subseteq A$, entonces $B \in \langle A\rangle$ y, así, $B \in \langle A\rangle \cup \langle X, X\backslash A\rangle$. Si $B \nsubseteq A$, entonces $B \cap (X\backslash A) \neq \emptyset$. De aquí, $B \in \langle X, X\backslash A\rangle$ y, así, $B \in \langle A\rangle \cup \langle X, X\backslash A\rangle$. Por lo tanto, $CL(X) \subseteq \langle A\rangle \cup \langle X, X\backslash A\rangle$.

(3) Claramente, $\langle X\backslash A\rangle \cup \langle X, A\rangle \subseteq CL(X)$. Veamos que $CL(X) \subseteq \langle X\backslash A\rangle \cup \langle X, A\rangle$. Sea $B \in CL(X)$. Se tienes los siguientes casos:

Caso (i) $B \subseteq A$. En este caso, $B \in \langle X, A\rangle$. Así, $B \in \langle X\backslash A\rangle \cup \langle X, A\rangle$.

Caso (ii) $B \nsubseteq A$. En este caso, $B \cap (X\backslash A) \neq \emptyset$. Se tienen los siguientes subcasos:

Subcaso (a) $B \subseteq X\backslash A$. En este caso, $B \in \langle X\backslash A\rangle$. Así, $B \in \langle X\backslash A\rangle \cup \langle X, A\rangle$.

Subcaso (b) $B \nsubseteq X\backslash A$. En este caso, $B \cap A \neq \emptyset$ y $B \cap (X\backslash A) \neq \emptyset$. Así, $B \in \langle X, A\rangle$. Por lo tanto, $B \in \langle X\backslash A\rangle \cup \langle X, A\rangle$.

De lo anterior, se tiene que $CL(X) \subseteq \langle X \backslash A \rangle \cup \langle X, A \rangle$.

(4) Sea $B \in CL(X) \backslash \langle A \rangle$. Así, $B \notin \langle A \rangle$. Esto es, $B \nsubseteq A$. Luego, $B \cap (X \backslash A) \neq \emptyset$. De aquí, $B \in \langle X, X \backslash A \rangle$. Por lo tanto, $CL(X) \backslash \langle A \rangle \subseteq \langle X, X \backslash A \rangle$.

Ahora, sea $B \in \langle X, X \backslash A \rangle$. En consecuencia, $B \in CL(X)$ y $B \cap (X \backslash A) \neq \emptyset$. De aquí, $B \nsubseteq A$. Así, $B \notin \langle A \rangle$. Por lo tanto, $B \in CL(X) \backslash \langle A \rangle$. Consecuentemente, $\langle X, X \backslash A \rangle \subseteq CL(X) \backslash \langle A \rangle$.

De (1), (2), (3) y (4), se tiene el resultado. ■

Ahora tenemos las herramientas necesarias para poder definir una topología sobre el hiperespacio $CL(X)$. No sin antes recordar que una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un conjunto X, generan una topología en X si $X = \bigcup \mathcal{A}$ y si $B_1, B_2 \in \mathcal{A}$, entonces para cada $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B_3 \in \mathcal{A}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$; con la propiedad adicional de que $\mathcal{A}$ es una base para tal topología. Considerando la afirmación anterior, veamos que la colección $\beta = \{\langle U_1, \ldots, U_k \rangle : \text{para cada}\, i \in \{1, \ldots, k\}, U_i \in \tau \,\text{y}\, k \in \mathbb{N}\}$, genera una topología en $CL(X)$.

Proposición 3.1.6. Sea (X, τ) un espacio topológico. La colección de vietóricos determinados por las colecciones finitas de subconjuntos abiertos en X, $\beta = \{\langle U_1, \ldots, U_k \rangle : \text{para cada}\, i \in \{1, \ldots, k\}, U_i \in \tau \,\text{y}\, k \in \mathbb{N}\}$, genera una topología sobre $CL(X)$, para la cual, β es una base.

Demostración. Observemos que $CL(X) = \langle X \rangle \in \beta$. De aquí, $\bigcup \beta = CL(X)$. Sean $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \beta$ y $A \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. Veamos que existe $\mathcal{W} \in \beta$ tal que $A \in \mathcal{W} \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. Pongamos $\mathcal{U} = \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ y $\mathcal{V} = \langle V_1, \ldots, V_m \rangle$. Definimos $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ y $V = \bigcup_{i=1}^{m} V_i$. Se sigue que:

$$U \cap V = \left[\bigcup_{i=1}^{m} (U \cap V_i) \right] \cup \left[\bigcup_{i=1}^{n} (V \cap U_i) \right].$$

Sea $F \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. Luego, $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ y $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} V_i$, de aquí que $F \subseteq [\bigcup_{i=1}^{m} (U \cap V_i)] \cup [\bigcup_{i=1}^{n} (V \cap U_i)]$. Además, $F \cap (U \cap V_i) = F \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $F \cap (V \cap U_j) = F \cap U_j \neq \emptyset$, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$. Así, $F \in \langle U \cap V_1, \ldots, U \cap V_m, V \cap U_1, \ldots, V \cap U_n \rangle$.

Por otra parte, si $F \in \langle U \cap V_1, \ldots, U \cap V_m, V \cap U_1, \ldots, V \cap U_n \rangle$, entonces $F \subseteq [\bigcup_{i=1}^{m} (U \cap V_i)] \cup [\bigcup_{i=1}^{n} (V \cap U_i)]$. Consecuentemente, $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ y $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} V_i$. También, $F \cap U_i = F \cap (V \cap U_i) \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ y $F \cap V_j = F \cap (U \cap V_j) \neq \emptyset$, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$. Así, $F \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. Por lo tanto:

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \langle U \cap V_1, \ldots, U \cap V_m, V \cap U_1, \ldots, V \cap U_n \rangle.$$

Puesto que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \in \beta$, basta considerar $\mathcal{W} = \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. Así, $\mathcal{W} \in \beta$ y $A \in \mathcal{W} \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. Por lo tanto, la colección $\{\mathcal{U} : \mathcal{U} \,\text{es unión de elementos de}\, \beta\} \cup \{\emptyset\}$ es una topología sobre $CL(X)$. Además, β es una base para esta topología. ■

La topología generada por β para $CL(X)$ se denota por τ_V y se llama ***topología de Vietoris***.

Recordemos que para un espacio topológico (X, τ), si $\delta \subseteq \tau$ cumple que para cada $A \in \tau \backslash \{\emptyset\}$ y cada $x \in A$, existe $\mathcal{A} \subseteq \delta$ finita y no vacía tal que $x \in \bigcap \mathcal{A} \subseteq A$, entonces

δ define una subbase para τ. A continuación, damos una subbase para la topología de Vietoris.

Teorema 3.1.7. Sean X un espacio topológico y $\delta = \{\langle U \rangle : U \in \tau\} \cup \{\langle X, U \rangle : U \in \tau\}$. Se tiene que δ es una subbase para la topología de Vietoris τ_V.

Demostración. Sean $\mathcal{U} \in \tau \backslash \{\emptyset\}$ y $A \in \mathcal{U}$. Luego, existen subconjuntos abiertos y no vacíos $U_1, \ldots, U_m$ de X tales que $\langle U_1, \ldots, U_m \rangle \subseteq \mathcal{U}$. Por el Teorema 3.1.5 parte (1), se tiene que

$$\langle U_1, \ldots, U_m \rangle = \left\langle \bigcup_{i=1}^{m} U_i \right\rangle \cap \left(\bigcap_{i=1}^{m} \langle X, U_i \rangle \right)$$

De aquí, existe la subcolección:

$$\delta' = \left\{ \left\langle \bigcup_{i=1}^{m} U_i \right\rangle, \langle X, U_1 \rangle, \ldots, \langle X, U_m \rangle \right\} \subseteq \delta$$

tal que $A \in \bigcap \delta' \subseteq \mathcal{U}$. Así, δ es una subbase para τ_V. ■

En la Observación 3.1.8, se resumen los resultados que se tienen hasta este momento sobre la topología de Vietoris.

Observación 3.1.8. Para un espacio topológico (X, τ):

(1) β es base para τ_V.

(2) $\delta = \{\langle U \rangle : U \in \tau\} \cup \{\langle X, U \rangle : U \in \tau\}$ es una subbase para τ_V.

(3) $\delta \subseteq \beta \subseteq \tau_V$.

Observación 3.1.9. De la prueba de la Proposición 3.1.6, se tiene que si $\mathcal{U} = \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ y $\mathcal{V} = \langle V_1, \ldots, V_m \rangle$ son subconjuntos de $CL(X)$, entonces

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \langle U \cap V_1, \ldots, U \cap V_m, V \cap U_1, \ldots, V \cap U_n \rangle,$$

donde $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ y $V = \bigcup_{i=1}^{m} V_i$.

No olvidemos que el hiperespacio que a nosotros nos interesa estudiar es el n-ésimo producto simétrico $\mathcal{F}_n(X)$ que a continuación definimos.

Definición 3.1.10. Sean X un espacio topológico y $n \in \mathbb{N}$. Definimos y denotamos el ***n-ésimo producto simétrico*** de X como sigue:

$$\mathcal{F}_n(X) = \{A \subseteq X : A \text{ es no vacío y tiene a lo más } n \text{ puntos}\}.$$

Ahora necesitamos definir una topología sobre este nuevo hiperespacio. Para eso, hay que observar los siguientes hechos.

Observación 3.1.11. Sean X un espacio topológico T_1 y $A = \{x_1, \ldots, x_l\} \in \mathcal{F}_n(X)$. Luego, $A = \bigcup_{n=1}^{l} \{x_n\}$. Puesto que X es T_1, se tiene que A es unión finita de subconjuntos cerrados de X. De aquí, $A \in CL(X)$. Por lo tanto, $\mathcal{F}_n(X) \subseteq CL(X)$.

De aquí, cuando el espacio topológico X es T_1, la topología para $\mathcal{F}_n(X)$ es la topología de Vietoris τ_V restringida a $\mathcal{F}_n(X)$, esto es:

$$\tau_{V_{\mathcal{F}_n(X)}} = \{\mathcal{F}_n(X) \cap \mathcal{U} : \mathcal{U} \in \tau_V\}$$

y una base es:

$\beta_{\mathcal{F}_n(X)} = \{\mathcal{F}_n(X) \cap \mathcal{B} : \mathcal{B} \in \beta\} = \{\mathcal{F}_n(X) \cap \langle U_1, \ldots, U_k\rangle : \text{para cada}\, i \in \{1, \ldots, k\}, U_i \in \tau \,\text{y}\, k \in \mathbb{N}\}$.

Con el fin de simplificar notación, $\langle U_1, \ldots, U_k\rangle_n$ denota la intersección del conjunto abierto de la topología de Vietoris $\langle U_1, \ldots, U_k\rangle$ con el hiperespacio $\mathcal{F}_n(X)$. Esto es, $\langle U_1, \ldots, U_k\rangle_n = \langle U_1, \ldots, U_k\rangle \cap \mathcal{F}_n(X)$.

Así:

$$\beta_{\mathcal{F}_n(X)} = \{\langle U_1, \ldots, U_k\rangle_n : \text{para cada}\, i \in \{1, \ldots, k\}, U_i \in \tau \,\text{y}\, k \in \mathbb{N}\}.$$

Observación 3.1.12. Sean X un espacio topológico T_1 y $n \in \mathbb{N}$. Si $\{x_1, \ldots, x_r\}$ es un punto de $\mathcal{F}_n(X)$ y $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \langle U_1, \ldots, U_s\rangle_n$, entonces para cada $j \in \{1, \ldots, r\}$, ponemos $U_{x_j} = \bigcap\{U \in \{U_1, \ldots, U_s\} : x_j \in U\}$. Observe que $\langle U_{x_1}, \ldots, U_{x_r}\rangle_n \subseteq \langle U_1, \ldots, U_s\rangle_n$.

En efecto, ya que si $B \in \langle U_{x_1}, \ldots, U_{x_r}\rangle_n$, se tiene que $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} U_{x_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^{s} U_i$. Resta verificar que $B \cap U_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \ldots, s\}$. Sea $U_i \in \{U_1, \ldots, U_s\}$. Por hipótesis, existe $x_j \in \{x_1, \ldots, x_r\}$ tal que $x_j \in U_i$. Luego, $U_{x_j} \subseteq U_i$. Así, $B \cap U_{x_j} \subseteq B \cap U_i$. Puesto que $B \cap U_{x_j} \neq \emptyset$, se tiene que $B \cap U_i \neq \emptyset$. Consecuentemente, $\langle U_{x_1}, \ldots, U_{x_r}\rangle_n \subseteq \langle U_1, \ldots, U_s\rangle_n$.

Antes de empezar a estudiar propiedades topológicas y dinámicas del n-ésimo producto simétrico, quisíeramos aterrizar un poco estas ideas, dando algunos modelos de estos hiperespacios, donde, encontrar un modelo para un hiperespacio $\mathcal{H}$, consiste en encontrar un espacio más familiar, que sea homeomorfo a $\mathcal{H}$ y que sus elementos sean puntos en lugar de subconjuntos.

Cabe señalar que los modelos que aquí se presentan son los más comunes en el estudio del n-ésimo producto simétrico. Ya que estudiar cada uno de estos modelos requiere de muchos detalles, sólo desarrollamos uno de ellos y para todos los demás, puede consultar [22, pág. 47].

Ejemplo 3.1.13. Recordemos que un elemento de $\mathcal{F}_2([0,1])$, es un subconjunto de $[0,1]$ con a lo más dos puntos. Entonces dicho elemento puede ser denotado en la forma $\{a, b\}$, aquí a y b pueden coincidir y así se incluye el caso en el que el conjunto consta de un sólo punto. A este conjunto se le puede asociar la pareja $\varphi(\{a, b\}) = (\text{mín}\{a, b\}, \text{máx}\{a, b\})$. Ahora, notemos que cada conjunto $\{a, b\}$ está determinado de manera única por la pareja $(\text{mín}\{a, b\}, \text{máx}\{a, b\})$ y viceversa. Además, al estar $a, b \in [0, 1]$, se tiene que $0 \leq \text{mín}\{a, b\} \leq \text{máx}\{a, b\} \leq 1$ y, también, cualquier pareja de la forma (u, v) con $0 \leq u \leq v \leq 1$ es igual a $\varphi(\{a, b\})$ por lo que la imagen de φ es exactamente el triángulo $T' = \{(u, v) : 0 \leq u \leq v \leq 1\}$. Así, cada conjunto $\{a, b\}$ queda identificado de manera única con un punto en el triángulo $T' = \{(u, v) : 0 \leq u \leq v \leq 1\}$. Es por esto que obtenemos al trángulo T como el modelo para un hiperespacio de $[0, 1]$. Ver Figura 3.1.

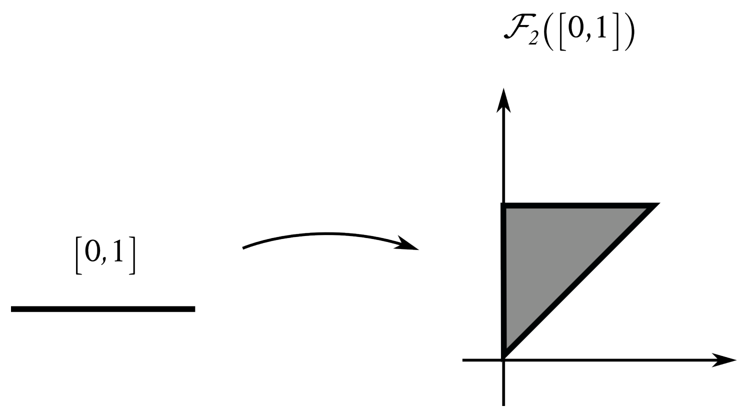


Figura 3.1: Modelo para $\mathcal{F}_2([0, 1])$.

A continuación se muestran algunos otros modelos de hiperespacios. Sin embargo, no explicamos a detalle la costrucción de cada uno de ellos, ya que eso nos llevaría, por lo menos, un capítulo completo.

Ejemplo 3.1.14. Consideremos el tríodo simple Y formado por tres arcos L_1, L_2 y L_3 que se intersecan por pares en el punto v que es un punto extremo de cada uno de ellos. En la Figura 3.2 se muestra el modelo para el hiperespacio $\mathcal{F}_2(Y)$.

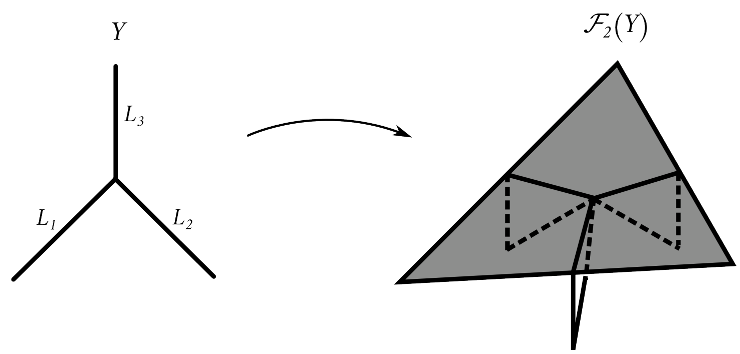


Figura 3.2: Modelo para $\mathcal{F}_2(Y)$.

Otro continuo muy conocido y estudiado, es la circunferencia unitaria. Veamos el modelo de un hiperespacio de este continuo.

Ejemplo 3.1.15. Sea $S^1 = \{e^{ix} : x \in [0, 2\pi]\}$. Sabemos que S^1 es un continuo y el modelo para $\mathcal{F}_2(S^1)$ es la cinta de Möbius. En la Figura 3.3, se observan ambos espacios.

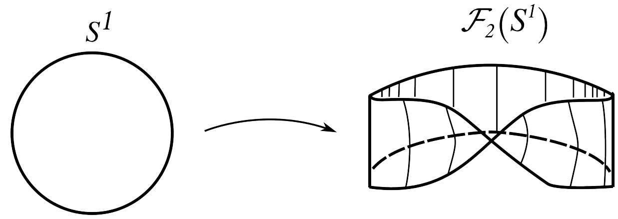


Figura 3.3: Modelo para $\mathcal{F}_2(S^1)$.

Ejemplo 3.1.16. Sean S^1 y S^1_2 dos circunferencias y $\mathcal{B}$ el continuo que resulta de la unión de S^1 con S^1_2 en un sólo punto. Este nuevo continuo se conoce como el continuo de la figura ocho. A partir del hiperespacio $\mathcal{F}_2(S^1)$, se construye el hiperespacio $\mathcal{F}_2(\mathcal{B})$. A continuación damos una explicación muy rápida de cómo se construye este hiperespacio.

Cada elemento $A = \{x, y\}$ de $\mathcal{F}_2(\mathcal{B})$ satisface una de las siguientes tres condiciones:

(a) $A \subseteq S^1$.

(b) $A \subseteq S^1_2$.

(c) $x \in S^1$ y $y \in S^1_2$.

Denotemos por $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ los conjuntos formados por elementos de $\mathcal{F}_2(\mathcal{B})$ que satisfacen (a) o (b), respectivamente. Vimos en el Ejemplo 3.1.15 que tanto $\mathcal{B}_1$ como $\mathcal{B}_2$ son homeomorfos a una banda de Möbius. Mientras que el conjunto $\mathcal{C}$, de elementos en $\mathcal{F}_2(\mathcal{B})$ que satisfacen (c), es homeomorfo al toro $S^1 \times S^1_2$. Así, $\mathcal{F}_2(\mathcal{B}) = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{C}$. Por lo tanto, para crear un modelo para $\mathcal{F}_2(\mathcal{B})$ sólo tenemos que realizar los pegados que se muestran en la Figura 3.4.

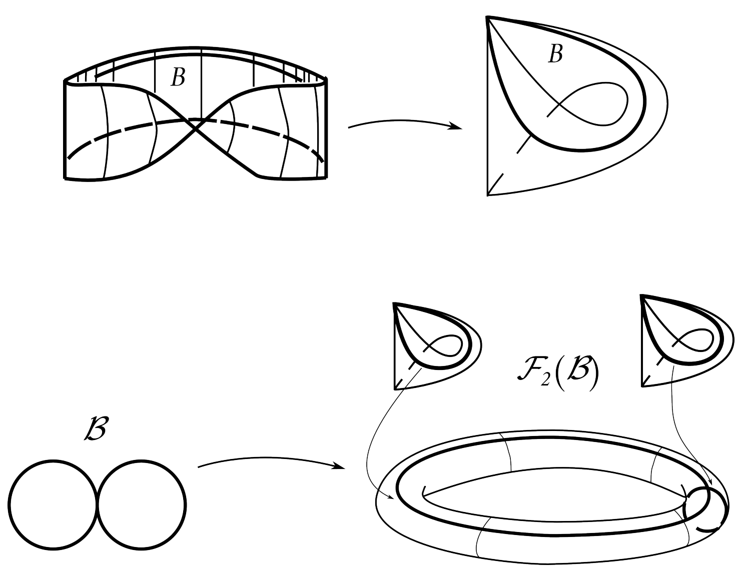


Figura 3.4: Modelo para la figura ocho.

3.2. Propiedades topológicas

Dado un espacio topológico X, consideramos el hiperespacio inducido $\mathcal{F}_n(X)$ y analizamos las relaciones que hay entre las propiedades topológicas de X con las propiedades del n-ésimo producto simétrico. Por ejemplo, si X es un espacio T_1, nos preguntamos si $\mathcal{F}_n(X)$ conserva dicha propiedad. De preguntas como ésta nos ocupamos en la presente sección.

De la Observación 3.1.11, se tiene que si U es un subconjunto abierto en X, entonces $\langle U\rangle_n$ es un subconjunto abierto en $\mathcal{F}_n(X)$. Pero ¿qué pasa si A es un subconjunto cerrado de X? ¿será que $\langle A\rangle_n$ es un subconjunto cerrado en $\mathcal{F}_n(X)$?

Teorema 3.2.1. Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Si A es cerrado en X, entonces $\langle A\rangle$ es cerrado en $CL(X)$.

Demostración. Supongamos que A es cerrado en X. Por el Teorema 3.1.5, parte (4), se tiene que $CL(X)\backslash\langle A\rangle = \langle X, X\backslash A\rangle$. Luego, ya que $X\backslash A$ es abierto en X, se tiene que $\langle X, X\backslash A\rangle \in \tau_V$. Consecuentemente, $CL(X)\backslash\langle A\rangle \in \tau_V$. Por lo tanto, $\langle A\rangle$ es cerrado en $CL(X)$. ■

Observación 3.2.2. Sean X un espacio topológico, $A \subseteq X$ cerrado y $n \in \mathbb{N}$. Luego, del Teorema 3.2.1, $\langle A\rangle$ es cerrado en $CL(X)$. De aquí, $\langle A\rangle \cap \mathcal{F}_n(X) = \langle A\rangle_n$ es cerrado en $\mathcal{F}_n(X)$.

En el Teorema 3.2.1, vimos que si A es un subconjunto cerrado de un espacio topológico X, entonces $\langle A\rangle$ es un subconjunto cerrado de $CL(X)$, esto es $cl_{CL(X)}(\langle A\rangle) = \langle cl_X(A)\rangle$. Un resultado más general se muestra en el Teorema 3.2.3.

Teorema 3.2.3. Sean X un espacio topológico T_1 y $U_1, \ldots, U_n$ subconjuntos abiertos de X. Se cumple que $cl_{CL(X)}(\langle U_1, \ldots, U_n\rangle) = \langle cl_X(U_1), \ldots, cl_X(U_n)\rangle$.

Demostración. Sea $A \in cl_{CL(X)}(\langle U_1, \ldots, U_n\rangle)$. Pongamos $\mathcal{U} = \langle U_1, \ldots, U_n\rangle$.

Veamos que $A \in \langle cl_X(U_1), \ldots, cl_X(U_n)\rangle$. Sean $x \in A$ y U_x abierto en X tal que $x \in U_x$. Luego, $A \in \langle X, U_x\rangle$. Por hipótesis y por la Observación 3.1.9:

$$\langle X, U_x\rangle \cap \mathcal{U} = \left\langle X \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right], U_x \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right], U_1 \cap X, \ldots, U_n \cap X \right\rangle \neq \emptyset.$$

De aquí, $U_x \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right] \neq \emptyset$. En consecuencia, $x \in cl_X\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} cl_X(U_i)$. Por lo tanto, $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} cl_X(U_i)$. Resta verificar que $A \cap cl_X(U_i) \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Supongamos que $A \cap cl_X(U_{i_0}) = \emptyset$, para algún $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$. Luego, $A \subseteq X\backslash cl_X(U_{i_0})$ y así $A \in \langle X\backslash cl_X(U_{i_0})\rangle$. Por hipótesis y por la Observación 3.1.9, se tiene que:

$$\langle X\backslash cl_X(U_{i_0})\rangle \cap \mathcal{U} = \left\langle X\backslash cl_X(U_{i_0}) \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right], W_1, \ldots, W_n \right\rangle \neq \emptyset.$$

Donde $W_k = U_k \cap [X \backslash cl_X(U_{i_0})]$, para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$.

De aquí, $U_{i_0} \cap [X \backslash cl_X(U_{i_0})] \neq \emptyset$. Esto es una contradicción ya que $U_{i_0} \subseteq cl_X(U_{i_0})$. Por lo tanto, $A \cap cl_X(U_i) \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Así, $A \in \langle cl_X(U_1), \ldots, cl_X(U_n) \rangle$.

Sean $A \in \langle cl_X(U_1), \ldots, cl_X(U_n) \rangle$ y $\mathcal{V}$ un abierto en $cl(X)$ tal que $A \in \mathcal{V}$. Luego, existen abiertos $V_1, \ldots, V_m$ en X tales que $A \in \langle V_1, \ldots, V_m \rangle \subseteq \mathcal{V}$. Ya que $A \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ y, además, $A \subseteq cl_X(\bigcup_{i=1}^n U_i)$, se tiene que $V_i \cap (\bigcup_{i=1}^n U_i) \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. Por otro lado, tenemos que $A \cap cl_X(U_i) \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y, puesto que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^m V_i$, se tiene que $U_i \bigcap (\bigcup_{i=1}^m V_i) \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sean $z_i \in V_i \cap (\bigcup_{i=1}^n U_i)$, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ y $z_i' \in U_i \cap (\bigcup_{i=1}^m V_i)$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Observe que $\{z_1, \ldots, z_m, z_1', \ldots, z_n'\} = (\bigcup_{i=1}^m \{z_i\}) \cup (\bigcup_{i=1}^n \{z_i'\})$ es cerrado ya que X es un espacio T_1. Así, $\{z_1, \ldots, z_m, z_1', \ldots, z_n'\} \in CL(X)$. Además, $\{z_1, \ldots, z_n, z_1', \ldots, z_n'\} \in \langle V_1 \cap (\bigcup_{i=1}^n U_i), \ldots, V_m \cap (\bigcup_{i=1}^n U_i), U_1 \cap (\bigcup_{i=1}^m V_i), \ldots, U_n \cap (\bigcup_{i=1}^m V_i) \rangle$. Luego, por la Observación 3.1.9, $\{z_1, \ldots, z_n, z_1', \ldots, z_n'\} \in \langle V_1, \ldots, V_m \rangle \cap \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$. Así, $\mathcal{V} \cap \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \neq \emptyset$. Por lo tanto, $A \in cl_{CL(X)}(\langle U_1, \ldots, U_n \rangle)$ ■

Observación 3.2.4. Del Teorema 1.1.16, puesto que.

$$\begin{aligned} cl_{\mathcal{F}_n(X)}(\langle U_1, \ldots, U_m \rangle) &= cl_{CL(X)}(\langle U_1, \ldots, U_m \rangle) \cap \mathcal{F}_n(X) \\ &= \langle cl_X(U_1), \ldots, cl_X(U_m) \rangle \cap \mathcal{F}_n(X) \\ &= \langle cl_X(U_1), \ldots, cl_X(U_m) \rangle_n, \end{aligned}$$

el resultado del Teorema 3.2.3 se sigue cumpliendo en $\mathcal{F}_n(X)$.

Otra forma de definir un subconjunto cerrado en el hiperespacio $\mathcal{F}_n(X)$, a partir del subconjunto cerrado A de X, es la que se muestra en el Teorema 3.2.5.

Teorema 3.2.5. Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X. Si A es cerrado en X, entonces $\langle X, A \rangle$ es cerrado en $CL(X)$.

Demostración. Supongamos que A es un subconjunto cerrado en X. Luego, $X \backslash A$ es un subconjunto abierto en X. Así, $\langle X \backslash A \rangle$ es abierto en $CL(X)$. Por el Teorema 3.1.5, parte (3), ya que $CL(X) = \langle X \backslash A \rangle \cup \langle X, A \rangle$ y $\langle X \backslash A \rangle \cap \langle X, A \rangle = \emptyset$. Se tiene que $CL(X) \backslash \langle X \backslash A \rangle = \langle X, A \rangle$ es cerrado en $CL(X)$. ■

Hemos definido subconjuntos abiertos y subconjuntos cerrados en $\mathcal{F}_n(X)$ a partir de subconjuntos abiertos y cerrados en X, respectivamente. En el siguiente resultado, analizamos el problema inverso para subconjuntos abiertos.

Teorema 3.2.6. Sean X un espacio topológico y $n \in \mathbb{N}$. Si $\mathcal{U}$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{F}_n(X)$, entonces $\bigcup \mathcal{U}$ es un subconjunto abierto de X.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{U}$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{F}_n(X)$. Veamos que $\bigcup \mathcal{U}$ es un subconjunto abierto de X. Sea $x \in \bigcup \mathcal{U}$. Luego, existe $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \mathcal{U}$ tal que $x \in \{x_1, \ldots, x_r\}$. De aquí, existen subconjuntos abiertos $U_1, \ldots, U_m$ de X tales que $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \langle U_1, \ldots, U_m \rangle_n \subseteq \mathcal{U}$. De la Observación 3.1.9, se tiene que $\{x_1, \ldots, x_r\} \in$

$\langle U_{x_1}, \ldots, U_{x_r} \rangle_n \subseteq \langle U_1, \ldots, U_m \rangle_n \subseteq \mathcal{U}$. Supongamos que $x = x_1$. Así, $x \in U_{x_1}$. Veamos que $U_{x_1} \subseteq \bigcup \mathcal{U}$. Sea $x' \in U_{x_1}$. Luego, $\{x', \ldots, x_r\} \in \langle U_1, \ldots, U_m \rangle_n \subseteq \mathcal{U}$. De aquí, $x' \in \bigcup \mathcal{U}$. Por lo tanto, $U_{x_1} \subseteq \bigcup \mathcal{U}$. Consecuentemente, $\bigcup \mathcal{U}$ es un subconjunto abierto de X. ■

Ya que estamos trabajando con espacios topológicos T_1, nos gustaría saber si esta propiedad la conserva el hiperespacio inducido $\mathcal{F}_n(X)$.

Teorema 3.2.7. Si X es un espacio topológico T_1 y $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{F}_n(X)$ es un espacio topológico T_1.

Demostración. Veamos que $\mathcal{F}_n(X)$ es un espacio T_1.

Sean $A = \{x_1, \ldots, x_r\}$ y $B = \{y_1, \ldots, y_l\}$ puntos distintos en $\mathcal{F}_n(X)$. Luego, $A \nsubseteq B$ o $B \nsubseteq A$. Supongamos que $A \nsubseteq B$. De aquí, existe $i_0 \in \{1, \ldots, r\}$ tal que $x_{i_0} \in A$ y $x_{i_0} \notin B$. Así, $x_{i_0} \neq y_j$, para cada $j \in \{1, \ldots, l\}$. Como X es un espacio T_1, existen subconjuntos abiertos U_j y V_j de X tales que $x_{i_0} \in U_j \backslash V_j$ y $y_j \in V_j \backslash U_j$.

Pongamos $U_1 = \bigcap_{j=1}^{l} U_j$. Notemos que U_1 es un subconjunto abierto de X tal que $A \in \langle X, U_1 \rangle_n \backslash \langle V_1, \ldots, V_l \rangle_n$ y $B \in \langle V_1, \ldots, V_l \rangle_n \backslash \langle X, U_1 \rangle_n$. Para el caso cuando $B \nsubseteq A$, se procede de manera análoga. Por lo tanto, $\mathcal{F}_n(X)$ es un espacio T_1. ■

En la Observación 3.1.11, el natural k de la definición de $\beta_{\mathcal{F}_n(X)}$ no es necesariamente igual a n. Sin embargo, es posible definir una base para la topología de Vietoris restringida a $\mathcal{F}_n(X)$ con $k = n$. Veamos esto de manera formal.

Teorema 3.2.8. Sean X un espacio topológico T_1 y $n \in \mathbb{N}$. Se cumple que $\beta' = \{\langle U_1, \ldots, U_n \rangle_n : U_i \in \tau \text{, para cada}\, i \in \{1, \ldots, n\} \,\text{y}\, n \in \mathbb{N}\}$ es una base para $\mathcal{F}_n(X)$.

Demostración. De la Observación 3.1.11, sabemos que la familia $\beta = \{\langle U_1, \ldots, U_m \rangle_n : U_i \in \tau \text{, para cada}\, i \in \{1, \ldots, m\} \,\text{y}\, m \in \mathbb{N}\}$ es una base para $\mathcal{F}_n(X)$. Así, es suficiente con verificar que para cada $\langle U_1, \ldots, U_m \rangle_n \in \beta$ y para cada $A \in \langle U_1, \ldots, U_m \rangle_n$, existen subconjuntos abiertos y no vacíos $V_1, \ldots, V_n$ de X tales que $A \in \langle V_1, \ldots, V_n \rangle_n \subseteq \langle U_1, \ldots, U_m \rangle_n$. Sean $\langle U_1, \ldots, U_m \rangle_n \in \beta$ y $A \in \langle U_1, \ldots, U_m \rangle_n$. Consideramos los siguientes casos:

Caso (i) $m < n$. En este caso, tomamos $V_i = U_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ y $V_i = U_m$, para cada $i \in \{m+1, \ldots, n\}$. De aquí, $A \in \langle V_1, \ldots, V_n \rangle_n \subseteq \langle U_1, \ldots, U_m \rangle_n$.

Caso (ii) $m \geq n$. En este caso, pongamos $A = \{x_1, \ldots, x_k\}$, donde $k \leq n$ y $U_{x_i} = \bigcap \{U \in \{U_1, \ldots, U_m\} : x_i \in U\}$, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. Por la Observación 3.1.12, se tiene que $A \in \langle U_{x_1}, \ldots, U_{x_k} \rangle_n \subseteq \langle U_1, \ldots, U_m \rangle_n$. Puesto que $A \in \mathcal{F}_n(X)$, $k \leq n$. Así, del caso (i) de esta prueba, se tiene que existen subconjuntos abiertos y no vacíos $V_1, \ldots, V_n$ de X tales que $A \in \langle V_1, \ldots, V_n \rangle_n \subseteq \langle U_1, \ldots, U_m \rangle_n$.

De todo lo anterior, la familia $\{\langle U_1, \ldots, U_n \rangle_n : U_i \in \tau \text{, para cada}\, i \in \{1, \ldots, n\} \,\text{y}\, n \in \mathbb{N}\}$ también es una base para $\mathcal{F}_n(X)$. ■

Cuando tenemos dos espacios topológicos X y Y, y uno de ellos es compacto, por ejemplo X, sabemos que si logramos definir una función $f : X \to Y$ continua, entonces podemos asegurar que Y también es compacto. Pues ahora nos gustaría definir una función continua de X^n en el hiperespacio $\mathcal{F}_n(X)$ y así poder obtener propiedades para $\mathcal{F}_n(X)$ que se conservan bajo funciones continuas y que son conocidas para X^n.

Teorema 3.2.9. Sean X un espacio topológico T_1, $n \in \mathbb{N}$ y $f_n : X^n \to \mathcal{F}_n(X)$ la función dada por:

$$f_n((x_1, \dots, x_n)) = \{x_1, \dots, x_n\}.$$

Se cumple que f_n es continua.

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto en $\mathcal{F}_n(X)$. Veamos que $f_n^{-1}(\mathcal{U})$ es abierto en X^n. Sea $(x_1, \dots, x_n) \in f_n^{-1}(\mathcal{U})$. Luego, $f_n((x_1, \dots, x_n)) \in \mathcal{U}$. De aquí, por el Teorema 3.2.8, existen subconjuntos abiertos $U_1, \dots, U_n$ en X tales que, $\{x_1, \dots, x_n\} \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle_n \subseteq \mathcal{U}$. Esto es, $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$ y $\{x_1, \dots, x_n\} \cap U_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Sea $U_{x_i} = \cap\{U_j : x_i \in U_j \, \text{con} \, j \in \{1, \dots, n\}\}$. Notemos que U_{x_i} es un subconjunto abierto y no vacío de X tal que $(x_1, \dots, x_n) \in U_{x_1} \times \cdots \times U_{x_n}$. Veamos ahora que $U_{x_1} \times \cdots \times U_{x_n} \subseteq f_n^{-1}(\langle U_1, \dots, U_n \rangle_n)$. Sea $(a_1, \dots, a_n) \in U_{x_1} \times \cdots \times U_{x_n}$. Luego, $f_n[(a_1, \dots, a_n)] \in f_n(U_{x_1} \times \cdots \times U_{x_n})$. De aquí que $\{a_1, \dots, a_n\} \in f_n(U_{x_1} \times \cdots \times U_{x_n})$. Luego, existe $(y_1, \dots, y_n) \in U_{x_1} \times \cdots \times U_{x_n}$ tal que $f_n((y_1, \dots, y_n)) = \{a_1, \dots, a_n\}$. Así, $\{y_1, \dots, y_n\} = \{a_1, \dots, a_n\}$. Puesto que $y_1 \in U_{x_1}$, $y_2 \in U_{x_2}, \dots, y_n \in U_{x_n}$. Se tiene que $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$ y $\{a_1, \dots, a_n\} \cap U_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Por lo tanto, $f_n((a_1, \dots, a_n)) = \{a_1, \dots, a_n\} \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle_n$. Consecuentemente, $(a_1, \dots, a_n) \in f_n^{-1}(\langle U_1, \dots, U_n \rangle_n)$. Puesto que $f_n^{-1}(\langle U_1, \dots, U_n \rangle_n) \subseteq f_n^{-1}(\mathcal{U})$, se tiene que $U_1 \times \cdots \times U_n \subseteq f_n^{-1}(\mathcal{U})$. Así, f_n es continua. ∎

Una propiedad que satisface la función del Teorema 3.2.9 y que más adelante será de mucha ayuda, es la siguiente.

Teorema 3.2.10. Sean X un espacio topológico T_1, $A \subseteq X$ y $n \in \mathbb{N}$. Se cumple que $f_n(A^n) = \mathcal{F}_n(A)$.

Demostración. Veamos que $f_n(A^n) \subseteq \mathcal{F}_n(A)$.

Sea $B \in f_n(A^n)$. Luego, existe $C = (c_1, \dots, c_n) \in A^n$ tal que $f_n(C) = B$. Así, $\{c_1, \dots, c_n\} = B$. Por lo tanto, B es un subconjunto de A con a lo más n puntos. Consecuentemente, $B \in \mathcal{F}_n(A)$.

Ahora veamos que $\mathcal{F}_n(A) \subseteq f_n(A^n)$.

Sea $B \in \mathcal{F}_n(A)$. Luego, $B \subseteq A$ y B tiene a lo más n puntos. Consideremos los siguientes casos:

Caso (i) B tiene exactamente n puntos. En este caso, pongamos $B = \{x_1, \dots, x_n\}$. Así, $(x_1, \dots, x_n) \in A^n$ y $f_n((x_1, \dots, x_n)) = \{x_1, \dots, x_n\} = B$. Por lo tanto, $B \in f_n(A^n)$.

Caso (ii) B tiene l elementos con $l < n$. En este caso, $B = \{x_1, \dots, x_l\}$.

Sea $C = (x_1, \dots, x_l, x_{l+1}, \dots, x_n)$ donde $x_i = x_l$ para cada $i \in \{l+1, \dots, n\}$. De aquí, $f_n((x_1, \dots, x_l, x_{l+1}, \dots, x_n)) = \{x_1, \dots, x_l, x_{l+1}, \dots, x_n\} = \{x_1, \dots, x_l\} = B$. Por lo tanto, $B \in f_n(A^n)$.

De los casos (i) y (ii), se tiene que $\mathcal{F}_n(A) \subseteq f_n(A^n)$. De todo lo anterior, $\mathcal{F}_n(A) = f_n(A^n)$. ■

Ahora podemos aprovechar esta función, para ver lo qué sucede con los subconjuntos compactos de X en $\mathcal{F}_n(X)$.

Teorema 3.2.11. Sean X un espacio topológico T_1, $A \subseteq X$ y $n \in \mathbb{N}$. Si A es compacto en X, entonces $\langle A \rangle_n$ es compacto en $\mathcal{F}_n(X)$.

Demostración. Supongamos que A es compacto en X. Luego por el teorema de Tychonoff, A^n es un subconjunto compacto en X^n. Por el Teorema 3.2.9, se tiene que $f_n(A^n)$ es un subconjunto compacto de $\mathcal{F}_n(X)$. Más aún, del Teorema 3.2.10, $f_n(A^n) = \mathcal{F}_n(A)$. Además, no es difícil verificar que $\langle A \rangle_n = \mathcal{F}_n(A)$. Por lo tanto, $\langle A \rangle_n$ es un subconjunto compacto de $\mathcal{F}_n(X)$. ■

En el Capítulo 1, para un espacio topológico X revisamos las propiedades de pseudo-regular, parcialmente compacto y pseudo-regular, perfecto, denso, segundo numerable, sin puntos casi aislados y compacto, por mencionar algunas. En lo que resta de esta sección, analizamos la relación entre X y sus hiperespacios inducidos $\mathcal{F}_n(X)$ para las propiedades antes mencionadas.

Teorema 3.2.12. Sean X un espacio topológico T_1 y $A \subseteq X$. $\mathcal{F}_n(A)$ es denso en $\mathcal{F}_n(X)$ si y sólo si A es denso en X.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}_n(A)$ es denso en $\mathcal{F}_n(X)$. Veamos que A es denso en X. Sea U un subconjunto abierto y no vacío en X. Notemos que $\langle U \rangle_n$ es un subconjunto abierto y no vacío en $\mathcal{F}_n(X)$. Ya que $\mathcal{F}_n(A)$ es denso en $\mathcal{F}_n(X)$, se tiene que $\langle U \rangle_n \cap \mathcal{F}_n(A) \neq \emptyset$. Sea $\{x_1, \ldots, x_l\} \in \langle U \rangle_n \cap \mathcal{F}_n(A)$. Luego, $\{x_1, \ldots, x_l\} \subseteq U$ y $\{x_1, \ldots, x_l\} \subseteq A$ con $l \leq n$. Consecuentemente, $U \cap A \neq \emptyset$. Por lo tanto, A es denso en X.

Supongamos que A es denso en X. Veamos que $\mathcal{F}_n(A)$ es denso en $\mathcal{F}_n(X)$. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto y no vacío de $\mathcal{F}_n(X)$. Puesto que $\mathcal{U}$ es diferente del vacío, podemos tomar $B = \{x_1, \ldots, x_l\} \in \mathcal{U}$. Luego, existe un abierto básico $\mathcal{V} = \langle V_1, \ldots, V_m \rangle_n$ en $\mathcal{F}_n(X)$ tal que $B \in \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$. De aquí que $\{x_1, \ldots, x_l\} \subseteq \bigcup_{i=1}^m V_i$ y $\{x_1, \ldots, x_l\} \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. Puesto que A es denso en X, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, se cumple que $V_i \cap A \neq \emptyset$. Sea $y_i \in V_i \cap A$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. Notemos que $\{y_1, \ldots, y_m\} \in \mathcal{V}$ y $\{y_1, \ldots, y_m\} \subseteq A$. De aquí, $\{y_1, \ldots, y_m\} \in \mathcal{V} \cap \mathcal{F}_n(A) \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{F}_n(A)$. Así, $\mathcal{U} \cap \mathcal{F}_n(A) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\mathcal{F}_n(A)$ es denso en $\mathcal{F}_n(X)$. ■

Teorema 3.2.13. Sean (X, τ) un espacio topológico T_1 y $n \in \mathbb{N}$. Si X es segundo numerable, entonces $\mathcal{F}_n(X)$ es segundo numerable.

Demostración. Supongamos que (X, τ) es segundo numerable. Luego, existe una base numerable para X, sea $\mathcal{B} = \{V_i \in \tau : i \in \mathbb{N}\}$ dicha base. Veamos que $\mathcal{B}' = \{\langle V_1, \ldots, V_l \rangle : V_i \in \mathcal{B}, \text{para cada}\, i \in \{1, \ldots, k\} \, \text{y}\, k \in \mathbb{N}\}$ es base para $\mathcal{F}_n(X)$.

Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto en $\mathcal{F}_n(X)$ y $A = \{x_1, \ldots, x_l\} \in \mathcal{U}$. Luego, existen abiertos $U_1, \ldots, U_m$ en X tales que $A \in \langle U_1, \ldots, U_m \rangle_n \subseteq \mathcal{U}$. Sea $U_{x_i} = \bigcap \{U \in \{U_1, \ldots, U_m\} :$

$x_i \in U\}$. Por la Observación 3.1.12, se tiene que $A \in \langle U_{x_1}, \ldots, U_{x_l}\rangle_n \subseteq \langle U_1, \ldots, U_m\rangle_n$. Luego, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, existe $V_i \in \mathcal{B}$ tal que $x_i \in V_i \subseteq U_{x_i}$. De aquí

$$A \in \langle V_1, \ldots, V_l\rangle_n \subseteq \langle U_{x_1}, \ldots, U_{x_l}\rangle_n \subseteq \langle U_1, \ldots, U_m\rangle_n \subseteq \mathcal{U}.$$

Así, se tiene que $\mathcal{B}' = \{\langle V_1, \ldots, V_l\rangle : V_i \in \mathcal{B}\,, \text{para cada}\, i \in \{1, \ldots, k\}\, \text{y}\, k \in \mathbb{N}\}$ es una base para $\mathcal{F}_n(X)$. Más aún, $\mathcal{B}'$ es numerable. Por lo tanto, $\mathcal{B}'$ es una base numerable para $\mathcal{F}_n(X)$, consecuentemente $\mathcal{F}_n(X)$ es segundo numerable. ■

Teorema 3.2.14. Sean X un espacio topológico T_1 y $n \in \mathbb{N}$. X es perfecto si y sólo si $\mathcal{F}_n(X)$ es perfecto.

Demostración. Veamos que si $\mathcal{F}_n(X)$ es perfecto, entonces X es perfecto. La prueba se hará por contrarrecíproco. Así, supongamos que X tiene un punto aislado. Sea x_0 dicho punto. Luego, existe un conjunto abierto U de X tal que $U \cap X = \{x_0\}$. Esto es, $U = \{x_0\}$. Notemos que $\langle U\rangle_n$ es un conjunto abierto de $\mathcal{F}_n(X)$ tal que $\mathcal{F}_n(X) \cap \langle U\rangle_n = \{\{x_0\}\}$. En efecto, ya que si existiera $\{x_1, \ldots, x_l\} \in \mathcal{F}_n(X)$ tal que $\{x_1, \ldots, x_l\} \in \langle U\rangle_n$ y $\{x_1, \ldots, x_l\} \neq \{x_0\}$. Se tiendrían los siguientes casos:

Caso (i) $\{x_1, \ldots, x_l\} \nsubseteq \{x_0\}$. En este caso, existe $i \in \{1, \ldots, l\}$ tal que $x_i \neq x_0$. De aquí que $x_i \in U \setminus \{x_0\}$, lo cual es una contradicción.

Caso (ii) $\{x_0\} \nsubseteq \{x_1, \ldots, x_l\}$. En este caso, $x_0 \neq x_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, l\}$. Luego, $x_i \in X \setminus U$, para cada $i \in \{1, \ldots, l\}$, lo cual es una contradicción.

De lo anterior, se tiene que $\{x_0\}$ es un punto aislado de $\mathcal{F}_n(X)$.

Ahora veamos que si X es perfecto, entonces $\mathcal{F}_n(X)$ es perfecto.

Supongamos que $\mathcal{F}_n(X)$ tiene un punto aislado y veamos que X tiene un punto aislado. Sea $A = \{x_1, \ldots, x_l\} \in \mathcal{F}_n(X)$ un punto aislado de $\mathcal{F}_n(X)$. Luego, existe $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}_n(X)$ abierto tal que $\mathcal{F}_n(X) \cap \mathcal{U} = \{A\}$. Esto es, $\mathcal{U} = \{A\}$. De aquí, existe $\mathcal{V} = \langle V_1, \ldots, V_m\rangle_n$ tal que $A \in \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$. Así, $A \in \mathcal{V} \subseteq \{A\}$, consecuentemente, $\mathcal{V} = \{A\}$. Se tienen los siguientes casos:

Caso (i) Existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $V_k = \{x\}$. En este caso no hay nada qué hacer ya que x es punto aislado de X.

Caso (ii) Supongamos que para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\mid V_j \mid \geq 2$. Fijemos $x_1 \in A$. Luego, para cada $J \in \{1, \ldots, n\}$, podemos tomar $z_J \in V_J \setminus \{x_1\}$ ya que si no se pudiera hacer esto, caeríamos en el caso (i) de esta prueba y terminamos. Por otro lado, existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x_1 \in V_k$. Veamos que $V_k \cap X = \{x_1\}$. Para esto, supongamos que existe $a \in V_k \cap X$, con $a \neq x_1$. Luego, ya que $z_J \neq x_1$ para cada $J \in \{1, \ldots, n\}$, $x_1 \notin B = \{z_1, z_2, \ldots, z_{k-1}, a, z_{k+1}, \ldots, z_n\}$. De aquí, $B \neq A$ y $B \in \mathcal{V} \cap \mathcal{F}_n(X) \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{F}_n(X)$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, x_1 es un punto aislado en X.

Así, se tiene el resultado. ■

Teorema 3.2.15. Sean X un espacio topológico T_1 y $n \in \mathbb{N}$. $\mathcal{F}_n(X)$ no tiene puntos casi aislados si y sólo si X no tiene puntos casi aislados.

Demostración. Por el Lema 1.1.60, el Teorema 3.2.14 y puesto que X es un espacio topológico T_1, se tiene el resultado. ■

Teorema 3.2.16. Sean X un espacio topológico T_1, U un subconjunto abierto de X y $n \in \mathbb{N}$. Si $cl_X(U)$ es compacto en X, entonces $cl_{\mathcal{F}_n(X)}(\langle U\rangle_n)$ es compacto en $\mathcal{F}_n(X)$.

Demostración. Supongamos que $cl_X(U)$ es compacto. Por el Teorema de Tychonoff, $cl_X(U)^n$ es compacto. Además, $f_n(cl_X(U)^n) = \mathcal{F}_n(cl_X(U))$, donde $f_n : X^n \to \mathcal{F}_n(X)$ está dada por $f_n((x_1,\ldots,x_n)) = \{x_1,\ldots,x_n\}$. Por el Teorema 3.2.9, como f_n es continua, se sigue que $f_n(cl_X(U)^n)$ es compacto. De aquí, $\mathcal{F}_n(cl_X(U))$ es compacto. Del Teorema 3.2.3, se tiene que $cl_{\mathcal{F}_n(X)}(\langle U\rangle_n) = \langle cl_X(U)\rangle_n$. Luego, si $A \in \mathcal{F}_n(cl_X(U))$, entonces $A \subseteq cl_X(U)$ con a lo más n puntos. De aquí, $A \in \langle cl_X(U)\rangle_n$. Así, $\mathcal{F}_n(cl_X(U)) \subseteq \langle cl_X(U)\rangle_n$. Por lo tanto, $\mathcal{F}_n(cl_X(U)) = \langle cl_X(U)\rangle_n$. Consecuentemente, $cl_{\mathcal{F}_n(X)}(\langle U\rangle_n)$ es compacto. ■

Teorema 3.2.17. Sean X un espacio topológico T_1, U un subconjunto abierto de X y $n \in \mathbb{N}$. Si $cl_X(U)$ es pseudo-regular, entonces $\langle cl_X(U)\rangle_n$ es pseudo-regular.

Demostración. Supongamos que $cl_X(U)$ es pseudo-regular. Veamos que $cl_{\mathcal{F}_n(X)}(\langle U\rangle_n)$ es pseudo-regular en $\mathcal{F}_n(X)$. Sea $\mathcal{W}$ abierto y no vacío en $cl_{\mathcal{F}_n(X)}(\langle U\rangle_n)$. Luego, $\mathcal{W} = cl_{\mathcal{F}_n(X)}(\langle U\rangle_n)\cap\mathcal{W}'$ con $\mathcal{W}'$ un abierto de $\mathcal{F}_n(X)$. Puesto que $\mathcal{W} \neq \emptyset$, podemos tomar $B \in \mathcal{W}$. Así, existen abiertos $W_1,\ldots,W_m$ en X tales que $B \in \langle W_1,\ldots,W_m\rangle_n \cap cl_{\mathcal{F}_n(X)}(\langle U\rangle_n) \subseteq \mathcal{W}$. Por el Teorema 3.2.3, se tiene que:

$$\begin{aligned} B &\in \langle W_1,\ldots,W_m\rangle_n \cap cl_{\mathcal{F}_n(X)}(\langle U\rangle_n) \\ &= \langle W_1,\ldots,W_m\rangle_n \cap \langle cl_X(U)\rangle_n \\ &\subseteq \left\langle \bigcup_{i=1}^{n} W_i \cap cl_X(U), cl_X(U)\cap W_1, cl_X(U)\cap W_2,\ldots, cl_X(U)\cap W_m \right\rangle_n . \end{aligned}$$

De aquí, $B \cap (cl_X(U)\cap W_i) \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$. Por lo tanto, $T_i = W_i \cap cl_X(U) \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$. Por hipótesis, ya que T_i es abierto en $cl_X(U)$, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$ y, $cl_X(U)$ es pseudo-regular, existe un abierto no vacío T_i' en $cl_X(U)$ tal que $cl_X(T_i') \subseteq T_i$. Sea $T = \langle T_1',\ldots,T_m'\rangle_n$. Luego, T es abierto en $\langle cl_X(U)\rangle_n$. Además, por el Teorema 3.2.3, $\langle cl_X(U)\rangle_n = cl_{\mathcal{F}_n(X)}(\langle U\rangle_n)$, consecuentemente, T es abierto en $cl_{\mathcal{F}_n(X)}(\langle U\rangle_n)$.

Además:

$$\begin{aligned} cl_X(T) &= cl_{\mathcal{F}_n(X)}(\langle T_1',\ldots,T_m'\rangle_n) \\ &= \langle cl_X(T_1'),\ldots,cl_X(T_m')\rangle_n \\ &\subseteq \langle W_1\cap cl_X(U),\ldots,W_m\cap cl_X(U)\rangle_n \\ &\subseteq \langle W_1,\ldots,W_m\rangle_n \cap cl_{\mathcal{F}_n(X)}(\langle U\rangle_n) \\ &\subseteq \mathcal{W}. \end{aligned}$$

Como $\mathcal{W}$ se tomó arbitrario, se tiene que para cualquier abierto $\mathcal{W}$ de $cl_{\mathcal{F}_n(X)}(\langle U\rangle_n)$, existe un abierto T de $cl_{\mathcal{F}_n(X)}(\langle U\rangle_n)$ tal que $cl_X(T) \subseteq \mathcal{W}$. Esto es, $cl_{\mathcal{F}_n(X)}(\langle U\rangle_n)$ es pseudo-regular en $\mathcal{F}_n(X)$. Así, se tiene el resultado. ■

Teorema 3.2.18. Sean X un espacio topológico T_1 y $n \in \mathbb{N}$. Si X es pseudo-regular, entonces $\mathcal{F}_n(X)$ es pseudo-regular.

Demostración. Supongamos que X es pseudo-regular. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto y no vacío de $\mathcal{F}_n(X)$. Luego, por el Teorema 3.2.8, existen subconjuntos abiertos no vacíos $U_1, \ldots, U_n$ de X tales que $\langle U_1, \ldots, U_n\rangle_n \subseteq \mathcal{U}$. Por hipótesis, ya que X es pseudo-regular, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe un subconjunto no vacío y abierto V_i de U_i tal que $cl_X(V_i) \subseteq U_i$. Notemos que $\langle V_1, \ldots, V_n\rangle_n$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{F}_n(X)$. Veamos que $cl_{\mathcal{F}_n(X)}(\langle V_1, \ldots, V_n\rangle_n) \subseteq \mathcal{U}$. Por el Teorema 3.2.3, se tiene que $cl_{\mathcal{F}_n(X)}(\langle V_1, \ldots, V_n\rangle_n) = \langle cl_X(V_1), \ldots, cl_X(V_n)\rangle_n$.

Sea $\{x_1, \ldots, x_l\} \in \langle cl_X(V_1), \ldots, cl_X(V_n)\rangle_n$. Luego, $\{x_1, \ldots, x_l\} \subseteq \bigcup_{i=1}^n cl_X(V_i)$ y, además, $\{x_1, \ldots, x_l\} \cap cl_X(V_i) \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. También, se tiene que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $cl_X(V_i) \subseteq U_i$. De aquí, $\{x_1, \ldots, x_l\} \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$ y $\{x_1, \ldots, x_l\} \cap U_i \neq \emptyset$. En consecuencia, $\{x_1, \ldots, x_l\} \in \langle U_1, \ldots, U_n\rangle_n$, y así, $\{x_1, \ldots, x_l\} \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, $cl_{\mathcal{F}_n}(X)(\langle V_1, \ldots, V_n\rangle_n) \subseteq \mathcal{U}$. Así, $\mathcal{F}_n(X)$ es pseudo-regular. ■

Teorema 3.2.19. Sean X un espacio topológico T_1 y $n \in \mathbb{N}$. Si X es parcialmente compacto y pseudo-regular, entonces $\mathcal{F}_n(X)$ es parcialmente compacto y pseudo-regular.

Demostración. Supongamos que X es parcialmente compacto y pseudo-regular. Veamos que $\mathcal{F}_n(X)$ es parcialmente compacto y pseudo-regular. Por hipótesis, existe un subconjunto abierto y no vacío U de X tal que $cl_X(U)$ es compacto y pseudo-regular en X. Del Teorema 3.2.17 y el Teorema 3.2.16, $cl_{\mathcal{F}_n(X)}(\langle U\rangle_n) = \langle cl_X(U)\rangle_n$ es compacto y pseudo-regular. De aquí, $\mathcal{F}_n(X)$ es parcialmente compacto y pseudo-regular. ■

Para los Teoremas 3.2.13, 3.2.16, 3.2.17, 3.2.18 y 3.2.19, no nos fue posible obtener un resultado semejante para el problema inverso. Sin embargo, esto no quiere decir que dichos resultados no sean verdaderos.

3.3. Dinámica colectiva

Ya hemos analizado algunas propiedades topológicas del n-ésimo producto simétrico. Ahora, nos gustaría analizar algunas de las propiedades dinámicas estudiadas en los capítulos anteriores. Pero esto no será posible sin antes definir una función que nos relacione el hiperespacio $\mathcal{F}_n(X)$ con él mismo.

Definición 3.3.1. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. Se dice que f es ***compatible*** con un subconjunto $\mathcal{H}$ de $CL(X)$ si $f(A) \in \mathcal{H}$, para cada $A \in \mathcal{H}$.

Observación 3.3.2. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. Si f es cerrada, entonces f es compatible con $CL(X)$. Además, si X es T_1 , $f : X \to X$ una función y $n \in \mathbb{N}$, entonces f es compatible con $\mathcal{F}_n(X)$.

Definición 3.3.3. Sean (X, τ) un espacio topológico y $f : X \to Y$ una función compatible con $CL(X)$. A la función $CL(f) : CL(X) \to CL(X)$ dada por $CL(f)(A) = f(A)$, para cada $A \in CL(X)$, la llamamos ***función inducida*** por f, al hiperespacio $CL(X)$.

Una condición suficiente para que una función f sea compatible con $CL(X)$ es que tal función f sea cerrada.

De la Observación 3.1.11, se tiene la siguiente definición.

Definición 3.3.4. Sean X un espacio topológico T_1, $f : X \to X$ una función y $n \in \mathbb{N}$. La función denotada por $\mathcal{F}_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ y definida como:

$$\mathcal{F}_n(f)(A) = CL(f)\mid_{\mathcal{F}_n(X)}(A) = f(A), \text{ para cada } A \in \mathcal{F}_n(X),$$

se llama función inducida por f al hiperespacio $\mathcal{F}_n(X)$.

Es importante notar que para definir $\mathcal{F}_n(f)$, no necesitamos que la función f sea cerrada. Más aún, f es cualquier función.

Puesto que el objetivo del trabajo es estudiar las funciones inducidas $\mathcal{F}_n(f)$, a partir de ahora los resultados estarán dados en esta dirección. Cabe señalar que varios de tales resultados se pueden generalizar fácilmente a funciones inducidas al hiperespacio $CL(X)$.

Cabe mencionar que los Teoremas 3.3.5, 3.3.6, 3.3.7, 3.3.8 y 3.3.9, son una versión de [23, Teorema 1.3], para el hiperespacio $\mathcal{F}_n(X)$.

La primera propiedad que analizamos es la continuidad. Para esto, necesitamos el resultado del Teorema 3.3.5.

Teorema 3.3.5. Sean X un espacio topológico T_1, $f : X \to X$ una función y $n \in \mathbb{N}$. Si $\langle W_1, \dots, W_n \rangle_n \in \beta_{\mathcal{F}_n(X)}$, entonces se cumple que:

$$[\mathcal{F}_n(f)]^{-1}(\langle W_1, \dots, W_n \rangle_n) = \langle f^{-1}(W_1), \dots, f^{-1}(W_n) \rangle_n$$

Demostración. La función $\mathcal{F}_n(f)$ está bien definida pues f es una función. Observemos que:

$[\mathcal{F}_n(f)]^{-1}(\langle W_1, \dots, W_n \rangle_n) = \{A \in \mathcal{F}_n(X) : f(A) \in \langle W_1, \dots, W_n \rangle_n\} = \{A \in \mathcal{F}_n(X) : f(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^n W_i \text{ y } f(A) \cap W_i \neq \emptyset \text{, para cada } i \in \{1, \dots, n\}\}$ y

$\langle f^{-1}(W_1), \dots, f^{-1}(W_n) \rangle_n = \{A \in \mathcal{F}_n(X) : A \subseteq \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(W_i) \text{ y } f^{-1}(W_i) \cap A \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n\}\}$.

Primero veamos que $\langle f^{-1}(W_1), \dots, f^{-1}(W_n) \rangle_n \subseteq [\mathcal{F}_n(f)]^{-1}(\langle W_1, \dots, W_n \rangle_n)$.

Sea $A \in \langle f^{-1}(W_1), \dots, f^{-1}(W_n) \rangle_n$. Luego, $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(W_i)$ y $f^{-1}(W_i) \cap A \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. De aquí, por el Teorema 1.1.78, $f(A) \subseteq f(\bigcup_{i=1}^n f^{-1}(W_i)) = f(f^{-1}(\bigcup_{i=1}^n W_i)) \subseteq \bigcup_{i=1}^n W_i$. Por otro lado, como $f^{-1}(W_i) \cap A \neq \emptyset$, por el Teorema 1.2.1, $W_i \cap f(A) \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Así, $A \in [\mathcal{F}_n(f)]^{-1}(\langle W_1, \dots, W_n \rangle_n)$.

Ahora veamos que $[\mathcal{F}_n(f)]^{-1}(\langle W_1, \dots, W_n \rangle) \subseteq \langle f^{-1}(W_1), \dots, f^{-1}(W_n) \rangle_n$.

Sea $A \in [\mathcal{F}_n(f)]^{-1}(\langle W_1, \dots, W_n \rangle_n)$. Luego, $f(A) \in \langle W_1, \dots, W_n \rangle_n$. Esto es, $f(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^n W_i$ y $f(A) \cap W_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. De aquí, $f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\bigcup_{i=1}^n W_i)$. Por el Teorema 1.1.78, $A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\bigcup_{i=1}^n W_i) = \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(W_i)$. Por otro lado, como $f(A) \cap W_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, por el Teorema 1.2.1, $A \cap f^{-1}(W_i) \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por lo tanto, $A \in \langle f^{-1}(W_1), \ldots, f^{-1}(W_n) \rangle_n$. Con esto, hemos probado que $[\mathcal{F}_n(f)]^{-1}(\langle W_1, \ldots, W_n \rangle_n) = \langle f^{-1}(W_1), \ldots, f^{-1}(W_n) \rangle_n$. ■

Teorema 3.3.6. Sean X un espacio topológico T_1 y $n \in \mathbb{N}$. Una función $f : X \to X$ es continua si y sólo si $\mathcal{F}_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ es continua.

Demostración. Supongamos que $f : X \to X$ es una función continua. En virtud del Teorema 1.1.81, es suficiente con verificar que para cada subconjunto abierto y no vacío $\mathcal{U}$ en $\mathcal{F}_n(X)$, $[\mathcal{F}_n(f)]^{-1}(\mathcal{U})$ es abierto en $\mathcal{F}_n(X)$.

Sean $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto y no vacío de $\mathcal{F}_n(X)$ y $A \in [\mathcal{F}_n(f)]^{-1}(\mathcal{U})$. De aquí, $\mathcal{F}_n(f)(A) = f(A) \in \mathcal{U}$ Luego, existen subconjuntos abiertos y no vacíos $W_1, \ldots, W_r$ de X tales que $f(A) \in \langle W_1, \ldots, W_r \rangle_n \subseteq \mathcal{U}$. De donde, $A \in [\mathcal{F}_n(f)]^{-1}(\langle W_1, \ldots, W_r \rangle_n) \subseteq [\mathcal{F}_n(f)]^{-1}(\mathcal{U})$. Por el Teorema 3.3.5, se tiene que

$$[\mathcal{F}_n(f)]^{-1}(\langle W_1, \ldots, W_r \rangle_n) = \langle f^{-1}(W_1), \ldots, f^{-1}(W_r) \rangle_n.$$

Dado que f es una función continua, por el Teorema 1.1.81, se tiene que $f^{-1}(W_i)$ es un conjunto abierto de X, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$. De aquí, $\langle f^{-1}(W_1), \ldots, f^{-1}(W_r) \rangle_n$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{F}_n(X)$ tal que $A \in \langle f^{-1}(W_1), \ldots, f^{-1}(W_r) \rangle_n \subseteq [\mathcal{F}_n(f)]^{-1}(\mathcal{U})$. Por lo tanto, $\mathcal{F}_n(f)$ es una función continua.

Ahora supongamos que $\mathcal{F}_n(f)$ es una función continua. Sea U un subconjunto abierto en X. Veamos que $f^{-1}(U)$ es abierto en X. Sea $x \in f^{-1}(U)$. Luego, $f(x) \in U$. De aquí, $\{f(x)\} \subseteq U$. Así, $\{f(x)\} \in \langle U \rangle_n$. Como U es abierto en X, $\langle U \rangle_n$ es abierto en $\mathcal{F}_n(X)$. Puesto que $\mathcal{F}_n(f)$ es una función continua, $[\mathcal{F}_n(f)]^{-1}(\langle U \rangle_n)$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{F}_n(X)$. Ahora, ya que $\{f(x)\} \in \langle U \rangle_n$, se tiene que $\{x\} \in [\mathcal{F}_n(f)]^{-1}(\{f(x)\}) \subseteq [\mathcal{F}_n(f)]^{-1}(\langle U \rangle_n)$. De aquí, existen subconjuntos abiertos y no vacíos $V_1, \ldots, V_m$ de X tales que $\{x\} \in \langle V_1, \ldots, V_m \rangle_n \subseteq [\mathcal{F}_n(f)]^{-1}(\langle U \rangle_n)$. Así, $\{x\} \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sea $W = \cap_{i=1}^{n} V_i$. Luego, $x \in W \subseteq f^{-1}(U)$. Por lo tanto, f es una función continua. ■

Teorema 3.3.7. Sean X un espacio topológico T_1, $f : X \to X$ una función y $n \in \mathbb{N}$. f es inyectiva si y sólo si $\mathcal{F}_n(f)$ es inyectiva.

Demostración. Supongamos que f es inyectiva.

Sean $A_1 = \{x_1, \ldots, x_r\}$, $A_2 = \{y_1, \ldots, y_l\} \in \mathcal{F}_n(X)$. Si $\mathcal{F}_n(f)(A_1) = \mathcal{F}_n(f)(A_2)$, entonces $f(A_1) = f(A_2)$. Puesto que f es inyectiva, se tiene que $A_1 = A_2$. De aquí, $\mathcal{F}_n(f)$ es una función inyectiva.

Supongamos que $\mathcal{F}_n(f)$ es una función inyectiva. Sean x_1 y $x_2 \in X$. Si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $\mathcal{F}_n(f)(\{x_1\}) = \mathcal{F}_n(f)(\{x_2\})$. Puesto que $\mathcal{F}_n(f)$ es una función inyectiva, $\{x_1\} = \{x_2\}$. Por lo tanto, $x_1 = x_2$. De aquí, f es inyectiva. ■

Teorema 3.3.8. Sean X un espacio topológico T_1, $f : X \to X$ una función y $n \in \mathbb{N}$. f es sobreyectiva si y sólo si $\mathcal{F}_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ es sobreyectiva.

Demostración. Supongamos que f es sobreyectiva. Sea $B = \{y_1, \ldots, y_r\} \in \mathcal{F}_n(X)$. Luego, puesto que f es sobreyectiva, para cada $y_i \in \{y_1, \ldots, y_r\}$, existe $x_i \in X$ tal que $f(x_i) = y_i$. Sea $B' = \{x_1, \ldots, x_r\}$. Así, existe $B' \in \mathcal{F}_n(X)$ tal que $\mathcal{F}_n(f)(B') = B$. Por lo tanto, $\mathcal{F}_n(f)$ es una función sobreyectiva.

Supongamos que $\mathcal{F}_n(f)$ es sobreyectiva. Sea $x \in X$. Luego, $\{x\} \in \mathcal{F}_n(X)$. Como $\mathcal{F}_n(f)$ es sobreyectiva, existe $A = \{x_1, \ldots, x_r\} \in \mathcal{F}_n(X)$ tal que $\mathcal{F}_n(f)(A) = \{x\}$. De aquí, $f(x_i) = x$, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$. Por lo tanto, f es sobreyectiva. ■

De los Teoremas 3.3.6, 3.3.7 y 3.3.8 se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.3.9. Sean X un espacio topológico T_1, $f : X \to X$ una función y $n \in \mathbb{N}$. f es un homeomorfismo si y sólo si $\mathcal{F}_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ es un homeomorfismo.

Capítulo 4

Transitividad topológica en productos simétricos generalizados

En este capítulo se revisan algunas de las relaciones que existen entre una función f y su función inducida $\mathcal{F}_n(f)$, para cuando f o $\mathcal{F}_n(f)$ es alguna de las siguientes clases de funciones: localmente eventualmente sobreyectivas, mezclantes, débilmente mezclantes, transitivas, totalmente transitivas, fuertemente transitivas, caóticas, minimales, irreducibles, estrictamente órbita-transitivas, órbita-transitivas o ω-transitivas, entre otras. En [1], [7], [16] y [20], se estudian algunas de las propiedades mencionadas anteriormente, considerando al espacio fase como un espacio métrico. En este trabajo, hemos generalizado algunos de tales resultados a espacios topológicos. Cabe señalar que, hasta donde sabemos, lo que presentamos en este capítulo no se encuentra en ningún otro trabajo.

4.1. Tipos de transitividad más conocidos

En esta sección, presentamos las relaciones que fue posible obtener entre f y su función inducida $\mathcal{F}_n(f)$, cuando alguna de ellas es: localmente eventualmente sobreyectivas, mezclantes, débilmente mezclantes, transitivas, totalmente transitivas, fuertemente transitivas, caóticas, minimales, irreducibles, estrictamente órbita-transitivas, órbita-transitivas u ω-transitivas, entre otras.

Para empezar a dar relaciones entre f y su inducida $\mathcal{F}_n(f)$, primero damos un resultado referente a los puntos periódicos que se definen en el capítulo uno. Será interesante para el lector la manera en que se pueden construir puntos periódicos en $\mathcal{F}_n(X)$ a partir de puntos periódicos en X y viceversa. Cabe mencionar que los resultados que se presentan en esta sección, son generalizaciones de los resultados que se presentan en [20], [7] y [21].

Teorema 4.1.1. Sean X un espacio topológico T_1, $f : X \to X$ una función y $n \in \mathbb{N}$. El conjunto $Per(f)$ es un subconjunto denso en X si y sólo si $Per(\mathcal{F}_n(f))$ es un subconjunto denso en $\mathcal{F}_n(X)$.

Demostración. Supongamos que $Per(f)$ es un subconjunto denso en X. Veamos que $Per(\mathcal{F}_n(f))$ es un subconjunto denso en $\mathcal{F}_n(X)$. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto y no vacío de $\mathcal{F}_n(X)$. Luego, por el Teorema 3.2.8, existen subconjuntos abiertos y no vacíos $U_1, \ldots, U_n$ de X tales que $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle_n \subseteq \mathcal{U}$. Puesto que $Per(f)$ es un subconjunto denso de X, se tiene que $Per(f) \cap U_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sea $x_i \in Per(f) \cap U_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Luego, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $f^{k_i}(x_i) = x_i$. Pongamos $k = k_1 \cdot k_2 \cdots k_{n-1} \cdot k_n$. Por el Teorema 1.2.2, se cumple que $f^k(x_i) = x_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sea $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Notemos que $A \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle_n$ y $[\mathcal{F}_n(f)]^k(A) = A$. De aquí, $A \in \mathcal{U} \cap Per(\mathcal{F}_n(f))$, así, $\mathcal{U} \cap Per(\mathcal{F}_n(f)) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $Per(\mathcal{F}_n(f))$ es un subconjunto denso en $\mathcal{F}_n(X)$.

Ahora supongamos que $Per(\mathcal{F}_n(f))$ es un subconjunto denso en $\mathcal{F}_n(X)$ y veamos que $Per(f)$ es un subconjunto denso de X. Sea U un subconjunto abierto y no vacío de X. Luego, $\langle U \rangle_n$ es un subconjunto abierto y no vacío de $\mathcal{F}_n(X)$. Puesto que $Per(\mathcal{F}_n(f))$ es denso en $\mathcal{F}_n(X)$, se tiene que $Per(\mathcal{F}_n(f)) \cap \langle U \rangle_n \neq \emptyset$. Sea $A = \{x_1, \ldots, x_r\} \in Per(\mathcal{F}_n(f)) \cap \langle U \rangle_n$. De aquí, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $[\mathcal{F}_n(f)]^k(A) = A$ y $A \subseteq U$. Esto es, $f^k(A) = A$. Si para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, $f^k(x_i) = x_i$, entonces $x_i \in U \cap Per(f)$ y terminamos. Luego, $f^k\mid_A \colon A \to A$ es una permutación, puesto que A es un subconjunto finito, se tiene que el número de permutaciones de A es $r!$. De aquí, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $(f^k)^m \mid_A = id_A$. Así, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, $f^{km}(x_i) = x_i$ y $x_i \in U$. Por lo tanto, $U \cap Per(f) \neq \emptyset$. Consecuentemente, $Per(f)$ es un subconjunto denso en X. ■

A continuación, se analiza el siguiente problema: ¿Si $\mathcal{F}_n(f)$ cumple alguna propiedad, entonces f también la cumple? En caso de que el recíproco de este resultado no se cumpla de manera general, incluimos un contraejemplo. De otra forma, se aborda el problema inverso más adelante.

La primera propiedad que analizamos es la transitividad.

Teorema 4.1.2. Sean X un espacio topológico T_1, $f : X \to X$ una función y $n \in \mathbb{N}$. Si $\mathcal{F}_n(f)$ es transitiva, entonces f es transitiva.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}_n(f)$ es transitiva y veamos que f es transitiva. Sean U y V subconjuntos abiertos y no vacíos de X. Luego, $\langle U \rangle_n$ y $\langle V \rangle_n$ son subconjuntos abiertos y no vacíos de $\mathcal{F}_n(X)$. Por hipótesis, ya que $\mathcal{F}_n(f)$ es transitiva, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $[\mathcal{F}_n(f)]^k(\langle U \rangle_n) \cap \langle V \rangle_n \neq \emptyset$. De aquí, existe $A \in \langle U \rangle_n$ tal que $[\mathcal{F}_n(f)]^k(A) \in \langle V \rangle_n$. Sea $A = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Luego, $f^k(x_1) \in V$ y $x_1 \in U$. Así, $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Por lo tanto, f es transitiva. ■

Como acabamos de ver, no es difícil verificar que si $\mathcal{F}_n(f)$ es transitiva, entonces f es transitiva. Sin embargo, cuando se trata de verificar el recíproco del Teorema 4.1.2, nos damos cuenta de que ésto no se tiene en general, ya que existen funciones transitivas para las cuales las inducidas $\mathcal{F}_n(f)$ no son transitivas.

Teorema 4.1.3. Sean X un espacio métrico, $f : X \to X$ una función y $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$. Si f es una isometría, entonces $\mathcal{F}_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ no es transitiva.

Demostración. La prueba se hará por contradicción. Supongamos que f es una isometría y que $\mathcal{F}_n(f)$ es transitiva. Sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$ y $r = d(x, y)$. Luego, ya que X es un espacio métrico, $d(x, y) > 0$. Pongamos $U = B(x, \frac{r}{4})$ y $V = B(y, \frac{r}{4})$. No es difícil verificar que $U \cap V = \emptyset$. Sean $z_1, z_2 \in U$ con $z_1 \neq z_2$. Como X es T_2, existen abiertos U_1 y U_2 en X tales que $U_1 \cup U_2 \subseteq U$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. De aquí, $\langle U_1, V\rangle_n$ y $\langle U_2\rangle_n$ son subconjuntos abiertos y no vacíos de $\mathcal{F}_n(X)$. Puesto que $\mathcal{F}_n(f)$ es transitiva, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $[\mathcal{F}_n(f)]^k(\langle U_1, V\rangle_n) \cap \langle U_2\rangle_n \neq \emptyset$. Así, existe $A \in \langle U_1, V\rangle_n$ tal que $[\mathcal{F}_n(f)]^k(A) \in \langle U_2\rangle_n$. Luego, $A \cap U_1 \neq \emptyset$, $A \cap V \neq \emptyset$ y $f^k(A) \subseteq U_2$. Sean $a \in A \cap U_1$ y $b \in A \cap V$. Se tiene que $f^k(a) \in U_2$ y $f^k(b) \in U_2$. Ya que f es una isometría, tenemos que:

$$d(f^k(a), f^k(b)) = d(a, b).$$

Puesto que $a, b \in U$ y el diámetro de U es $\frac{r}{2}$, $d(a, b) \leq \frac{r}{2}$. Consecuentemente:

$$d(f^k(a), f^k(b)) \leq \frac{r}{2}.$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, a) + d(a, y) \\ &\leq d(x, a) + d(a, b) + d(b, y) \\ &< \frac{r}{4} + d(a, b) + \frac{r}{4} \\ &= \frac{r}{2} + d(a, b). \end{aligned}$$

Así, $r < \frac{r}{2} + d(a, b)$. Luego:

$$\frac{r}{2} < d(a, b) = d(f^k(a), f^k(b)) \leq \frac{r}{2}.$$

Por lo tanto, $\frac{r}{2} < \frac{r}{2}$. Lo cual es una contradicción. Así, $\mathcal{F}_n(f)$ no es transitiva. ■

Ejemplo 4.1.4. Sean S^1 la circunferencia unitaria en $\mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$. La función rotación irracional $R : S^1 \to S^1$ cumple que su inducida $\mathcal{F}_n(R) : \mathcal{F}_n(S^1) \to \mathcal{F}_n(S^1)$ no es transitiva.

Para verificar tal afirmación, observemos que la función R es una isometría, ya que, para cada $z \in S^1$, se cumple que:

$$\| R(z_1) - R(z_2) \| = \| e^{2\pi i\theta} z_1 - e^{2\pi i\theta} z_2 \| = \| e^{2\pi i\theta}(z_1 - z_2) \| = \| z_1 - z_2 \| .$$

Así, por el Teorema 4.1.3, $\mathcal{F}_n(R)$ no es transitiva.

Una forma alternativa de verificar que la función inducida de una función no es transitiva, se puede realizar mediante el uso del siguiente teorema.

Teorema 4.1.5. Sean X un espacio topológico T_1, $f : X \to X$ una función y $n \in \mathbb{N}$. Si existen dos subconjuntos abiertos U_1 y U_2 de X tales que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ y alguno de ellos es $+$invariante, entonces $\mathcal{F}_n(f)$ no es transitiva.

Demostración. Supongamos que existen subconjuntos abiertos U_1 y U_2 de X tales que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ y U_1 es +invariante y supongamos que $\mathcal{F}_n(f)$ es transitiva. Como $\langle U_1 \rangle_n$ y $\langle U_2 \rangle_n$ son subconjuntos abiertos en $\mathcal{F}_n(X)$ y $\mathcal{F}_n(f)$ es transitiva, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(\mathcal{F}_n(f))^k(\langle U_1 \rangle_n) \cap \langle U_2 \rangle_n \neq \emptyset$. Sea $A \in \langle U_1 \rangle_n$ tal que $(\mathcal{F}_n(f))^k(A) \in \langle U_2 \rangle_n$. Así, $A \subseteq U_1$ y $f^k(A) \subseteq U_2$. Luego, $f^k(A) \subseteq f^k(U_1) \subseteq U_1$. De donde, $f^k(A) \subseteq U_1 \cap U_2$. Lo cual es una contradicción ya que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Por lo tanto, $\mathcal{F}_n(f)$ no es transitiva. ■

Teorema 4.1.6. Sean X un espacio topológico T_1, $f : X \to X$ una función y $n \in \mathbb{N}$. Si $\mathcal{F}_n(f)$ es mezclante, entonces f es mezclante.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}_n(f)$ es mezclante. Veamos que f es mezclante. Sean U y V subconjuntos abiertos de X. Luego, $\langle U \rangle_n$ y $\langle V \rangle_n$ son subconjuntos abiertos de $\mathcal{F}_n(X)$. Por hipótesis, ya que $\mathcal{F}_n(f)$ es mezclante, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $[\mathcal{F}_n(f)]^k(\langle U \rangle_n) \cap \langle V \rangle_n \neq \emptyset$, para cada $k \geq N$. Veamos que para cada $k \geq N$, $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Sea $A = \{x_1, \ldots, x_l\} \in [\mathcal{F}_n(f)]^k(\langle U \rangle_n) \cap \langle V \rangle_n$. Luego, existe $B \in \langle U \rangle_n$ tal que $[\mathcal{F}_n(f)]^k(B) = A$ y $A \in \langle V \rangle_n$. Así, $f^k(B) = A$ y $A \subseteq V$. Pongamos $B = \{x'_1, \ldots, x'_m\}$. Luego, $f^k(x'_1) \in A$, esto es, existe $x_i \in A$, con $i \in \{1, \ldots, l\}$, tal que $f^k(x'_1) = x_i$. Por lo tanto, $x_i \in f^k(U) \cap V$. Consecuentemente, f es mezclante. ■

Teorema 4.1.7. Sean X un espacio topológico T_1, $f : X \to X$ una función y $n \in \mathbb{N}$. Si $\mathcal{F}_n(f)$ es débilmente mezclante, entonces f es débilmente mezclante.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}_n(f)$ es débilmente mezclante y veamos que f es débilmente mezclante.

Sean U_1, U_2, V_1 y V_2 subconjuntos abiertos y no vacíos de X. Luego, $\langle U_1 \rangle_n$, $\langle U_2 \rangle_n$, $\langle V_1 \rangle_n$ y $\langle V_2 \rangle_n$ son subconjuntos abiertos y no vacíos de $\mathcal{F}_n(X)$. Puesto que $\mathcal{F}_n(f)$ es débilmente mezclante, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $[\mathcal{F}_n(f)]^k(\langle U_i \rangle_n) \cap \langle V_i \rangle_n \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2\}$. Sean $A_1 = \{x_1^1, \ldots, x_r^1\} \in [\mathcal{F}_n(f)]^k(\langle U_1 \rangle_n) \cap \langle V_1 \rangle_n$ y $A_2 = \{x_1^2, \ldots, x_l^2\} \in [\mathcal{F}_n(f)]^k(\langle U_2 \rangle_n) \cap \langle V_2 \rangle_n$. De aquí, existen $B_1 = \{y_1^1, \ldots, y_p^1\} \in \langle U_1 \rangle_n$ y $B_2 = \{y_1^2, \ldots, y_m^2\} \in \langle U_2 \rangle_n$ tales que $[\mathcal{F}_n(f)]^k(B_1) = A_1$ y $[\mathcal{F}_n(f)]^k(B_2) = A_2$. Esto es, $f^k(B_1) = A_1$ y $f^k(B_2) = A_2$. Así, existen $i \in \{1, \ldots, r\}$ y $j \in \{1, \ldots, l\}$ tales que $f^k(y_1^1) = x_i^1$ y $f^k(y_1^2) = x_j^2$. Se sigue que $x_i^1 \in f^k(B_1) \cap A_1$ y $x_j^2 \in f^k(B_2) \cap A_2$. Consecuentemente, $x_i^1 \in f^k(U_1) \cap V_1$ y $x_j^2 \in f^k(U_2) \cap V_2$. Por lo tanto, f es débilmente mezclante. ■

Observemos que si $\mathcal{F}_n(f)$ es una función totalmente transitiva, entonces $(\mathcal{F}_n(f))^s$ es transitiva, para cada $s \in \mathbb{N}$. Por cómo se ha definido esta función, uno podría suponer que f^s es transitiva para cada $s \in \mathbb{N}$. En efecto, observemos el siguiente resultado.

Teorema 4.1.8. Sean X un espacio topológico T_1, $f : X \to X$ una función y $n \in \mathbb{N}$. Si $\mathcal{F}_n(X)$ es totalmente transitiva, entonces f es totalmente transitiva.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}_n(f)$ es totalmente transitiva y veamos que f es totalmente transitiva.

Sean $s \in \mathbb{N}$. Veamos que f^s es transitiva. Sean U y V subconjuntos abiertos y no vacíos de X. Luego, $\langle U \rangle_n$ y $\langle V \rangle_n$ son subconjuntos abiertos de $\mathcal{F}_n(X)$. Por hipótesis, ya que $\mathcal{F}_n(f)$ es totalmente transitiva, $[\mathcal{F}_n(f)]^s$ es transitiva. De aquí, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $([\mathcal{F}_n(f)]^s)^k(\langle U \rangle_n) \cap \langle V \rangle_n \neq \emptyset$. Esto es, $[\mathcal{F}_n(f)]^{sk}(\langle U \rangle_n) \cap \langle V \rangle_n \neq \emptyset$. Sea $A \in [\mathcal{F}_n(f)]^{sk}(\langle U \rangle_n) \cap \langle V \rangle_n$. Luego, existe $B \in \langle U \rangle_n$ tal que $[\mathcal{F}_n(f)]^{sk}(B) = A$ y $A \in \langle V \rangle_n$. O bien, $f^{sk}(B) = A$ y $A \subseteq V$. Pongamos $A = \{x_1, \ldots, x_r\}$ y $B = \{y_1, \ldots, y_m\}$. De aquí, $x_1 \in V$ y existe $y_j \in \{y_1, \ldots, y_m\} \subseteq U$ tal que $f^{sk}(y_j) = x_1$. Así, $(f^s)^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Por lo tanto, f^s es transitiva. Puesto que s se tomó arbitrario, se tiene que f es totalmente transitiva. ■

Ejemplo 4.1.9. Sean $R : S^1 \to S^1$ la función rotación irracional y $n \in \mathbb{N}$. Por el Teorema 1.6.16, se sabe que R es totalmente transitiva. Supongamos que $\mathcal{F}_n(R)$ es totalmente transitiva. Luego, $\mathcal{F}_n(R)$ es transitiva. Esto contradice el Ejemplo 4.1.4. Así, $\mathcal{F}_n(R)$ no es totalmente transitiva. Por lo tanto, el recíproco del Teorema 4.1.8, no se cumple en general.

Algo similar ocurre cuando $\mathcal{F}_n(f)$ es fuertemente transitiva o localmente eventualmente sobreyectiva.

Teorema 4.1.10. Sean X un espacio topológico T_1, $f : X \to X$ una función y $n \in \mathbb{N}$. Si $\mathcal{F}_n(f)$ es fuertemente transitiva, entonces f es fuertemente transitiva.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}_n(f)$ es fuertemente transitiva y veamos que f es fuertemente transitiva. Sea U un subconjunto abierto y no vacío de X. Luego, $\langle U \rangle_n$ es un subconjunto abierto y no vacío de $\mathcal{F}_n(X)$. Así, por hipótesis, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\mathcal{F}_n(X) = \bigcup_{k=0}^{s} [\mathcal{F}_n(f)]^k(\langle U \rangle_n). \tag{4.1.1}$$

Veamos que $X = \bigcup_{k=0}^{s} f^k(U)$. Sea $x \in X$. Hay que probar que $x \in \bigcup_{k=0}^{s} f^k(U)$. Notemos que $\{x\} \in \mathcal{F}_n(X)$. Así, de (4.1.1), se tiene que $\{x\} \in \bigcup_{k=0}^{s}[\mathcal{F}_n(f)]^k(\langle U \rangle_n)$. De aquí, existe $k_0 \in \{0, \ldots, s\}$ tal que $\{x\} \in [\mathcal{F}_n(f)]^{k_0}(\langle U \rangle_n)$. Consecuentemente, existe $A \in \langle U \rangle_n$ tal que $[\mathcal{F}_n(f)]^{k_0}(A) = \{x\}$. Esto es, $f^{k_0}(A) = \{x\}$. Luego, existe $a \in A$ tal que $f^{k_0}(a) = x$. Como $A \subseteq U$, $a \in U$. Así, $x = f^{k_0}(a) \in f^{k_0}(U)$. Por lo tanto, $x \in \bigcup_{k=0}^{s} f^k(U)$. De aquí, $X \subseteq \bigcup_{k=0}^{s} f^k(U)$. Consecuentemente, $X = \bigcup_{k=0}^{s} f^k(U)$. Esto es, f es fuertemente transitiva. ■

Ejemplo 4.1.11. Al igual que el Ejemplo 4.1.9, por el Teorema 1.6.15, la función rotación irracional $R : S^1 \to S^1$ es fuertemente transitiva, sin embargo, $\mathcal{F}_n(R)$ no es fuertemente transitiva.

Teorema 4.1.12. Sean X un espacio topológico T_1, $f : X \to X$ una función y $n \in \mathbb{N}$. Si $\mathcal{F}_n(f)$ es localmente eventualmente sobreyectiva, entonces f es localmente eventualmente sobreyectiva.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}_n(f)$ es localmente eventualmente sobreyectiva y veamos que f es localmente eventualmente sobreyectiva.

Sea U un subconjunto abierto y no vacío de X. Luego, $\langle U\rangle_n$ es un subconjunto abierto y no vacío de $\mathcal{F}_n(X)$. Por hipótesis, puesto que $\mathcal{F}_n(f)$ es localmente eventualmente sobreyectiva, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $[\mathcal{F}_n(f)]^k(\langle U\rangle_n) = \mathcal{F}_n(X)$. Veamos que $X = f^k(U)$. Sea $x \in X$. Luego, $\{x\} \in \mathcal{F}_n(X)$. De aquí, $\{x\} \in [\mathcal{F}_n(f)]^k(\langle U\rangle_n)$. Esto es, existe $A \in \langle U\rangle_n$ tal que $[\mathcal{F}_n(f)]^k(A) = \{x\}$. O bien, $f^k(A) = \{x\}$. Así, $x_i \in A$ tal que $f^k(x_i) = x$. Como $f^k(A) \subseteq f^k(U)$, $x \in f^k(U)$. Por lo tanto, $X \subseteq f^k(U)$. Consecuentemente, f es localmente eventualmente sobreyectiva. ■

Si queremos verificar que una función f es irreducible, por definición tenemos que probar que no existen subconjuntos cerrados y propios A de X tales que $f(A) = X$. Por otro lado, si U es un subconjunto cerrado de X, entonces $\langle U\rangle_n$ es cerrado en $\mathcal{F}_n(X)$, ver Teorema 3.2.2. Veremos en el Teorema 4.1.13, cómo se emplea este último resultado para probar que la función f es irreducible si su inducida $\mathcal{F}_n(f)$ lo es.

Teorema 4.1.13. Sean X un espacio topológico T_1, $f : X \to X$ una función y $n \in \mathbb{N}$. Si $\mathcal{F}_n(f)$ es irreducible, entonces f es irreducible.

Demostración. La prueba la hacemos por contrarrecíproco. Supongamos que f no es irreducible y veamos que $\mathcal{F}_n(f)$ no es irreducible. Luego, existe un subconjunto cerrado A de X tal que $f(A) = X$ y $A \neq X$. Por el Teorema 3.2.1, se tiene que $\langle A\rangle_n$ es cerrado en $\mathcal{F}_n(X)$. A continuación demostraremos que $[\mathcal{F}_n(f)](\langle A\rangle_n) = \mathcal{F}_n(X)$. Sea $B = \{x_1, \ldots, x_l\} \in \mathcal{F}_n(X)$. De aquí, $B \subseteq f(A)$. Para cada $i \in \{1, \ldots, l\}$ existe $z_i \in A$ tal que $f(z_i) = x_i$. Sea $B' = \{z_1, \ldots, z_l\}$. Se tiene que $B' \in \langle A\rangle_n$, además, $f(B') = B$. Esto es, $[\mathcal{F}_n(f)](B') = B$. Por lo tanto, $B \in [\mathcal{F}_n(f)](\langle A\rangle_n)$. Consecuentemente, $[\mathcal{F}_n(f)](\langle A\rangle_n) = \mathcal{F}_n(X)$. Resta verificar que $\langle A\rangle_n$ es un subconjunto propio de $\mathcal{F}_n(X)$. Puesto que $X \nsubseteq A$, existe $x_0 \in X$ tal que $x \notin A$. De aquí, $\{x_0\} \notin \langle A\rangle_n$. Por lo tanto, $\langle A\rangle_n$ es un subconjunto propio de $\mathcal{F}_n(X)$. Por todo lo anterior, se tiene que $\mathcal{F}_n(f)$ no es irreducible. ■

Algo que hay que tener presente, es que para el caso $n = 1$, los espacios $\mathcal{F}_n(X)$ y X coinciden. Ya que en este caso, $\mathcal{F}_n(X)$ consta de los subconjuntos de X que tienen un único punto. Teniendo en cuenta ésto, no es difícil verificar lo siguiente.

Teorema 4.1.14. Sean X un espacio topológico T_1, $f : X \to X$ una función y $n \in \mathbb{N}$. Si $\mathcal{F}_n(f)$ es minimal, entonces f es minimal.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}_n(f)$ es minimal y veamos que f es minimal. Sea $x \in X$. Luego, $\{x\} \in \mathcal{F}_n(X)$. Por hipótesis, $\mathcal{F}_n(f)$ es minimal y por el Teorema 1.5.18, se tiene que $cl(\mathcal{O}(\{x\}, \mathcal{F}_n(f))) = \mathcal{F}_n(X)$. Así:

$$X = \bigcup \mathcal{F}_1(X) \subseteq \bigcup \mathcal{F}_n(X) = cl(\mathcal{O}(\{x\}, \mathcal{F}_n(f))) = cl(\mathcal{O}(x, f)).$$

De aquí, se tiene que para cada $x \in X$, $cl(\mathcal{O}(x, f)) = X$. Nuevamente, por el Teorema 1.5.18, f es minimal. ■

El recíproco del Teorema 4.1.14 tampoco es cierto en general. Veamos esto en el Ejemplo 4.1.15.

Ejemplo 4.1.15. Si $R : S^1 \to S^1$ es la función rotación irracional. Por la Proposición 1.6.14, R es minimal. Por otro lado, por el Teorema 1.6.15, R es transitiva. Así, $\mathcal{F}_n(R)$ no puede ser minimal. Pues si lo fuera, por el Teorema 1.5.20, $\mathcal{F}_n(R)$ es fuertemente transitiva y por el Teorema 1.5.4, $\mathcal{F}_n(R)$ es transitiva. Lo cual contradice el Ejemplo 4.1.4. Por lo tanto, $\mathcal{F}_n(R)$ no es minimal.

Teorema 4.1.16. Sean X un espacio topológico T_1, $f : X \to X$ una función y $n \in \mathbb{N}$. Si $\mathcal{F}_n(f)$ es caótica, entonces f es caótica.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}_n(f)$ es una función caótica y veamos que f es una función caótica. Por el Teorema 4.1.2, se tiene que f es una función transitiva. Luego, por el Teorema 4.1.1, se tiene que $Per(f)$ es un subconjunto denso en X. Por lo tanto, f es caótica. ∎

En el Ejemplo 4.1.17 se muestra una función caótica para la cuál sus inducidas $\mathcal{F}_n(f)$ no lo son.

Ejemplo 4.1.17. Sean $X = [0, 1]$ y $f : X \to X$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{1}{2}, & \text{si} \quad x \in [0, \frac{1}{4}]; \\ \frac{3}{2} - 2x, & \text{si} \quad x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]; \\ 1 - x, & \text{si} \quad x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

En [19, Ejemplo 3.31], se muestra que f es caótica y que su función inducida $\mathcal{F}_n(f)$ no es caótica, para ningún $n \geq 2$. Así, el recíproco del Teorema 4.1.16, no es cierto en general.

Teorema 4.1.18. Sean X un espacio topológico T_1, $f : X \to X$ una función y $n \in \mathbb{N}$. Si $\mathcal{F}_n(f)$ es semi-abierta, entonces f es semi-abierta.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}_n(f)$ es semi-abierta y veamos que f es semi-abierta. Sea U un subconjunto abierto y no vacío de X. Luego, $\langle U \rangle_n$ es un subconjunto abierto y no vacío de $\mathcal{F}_n(X)$. Por hipótesis, existe un subconjunto abierto y no vacío $\mathcal{V}$ de $\mathcal{F}_n(X)$ tal que $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{F}_n(f)(\langle U \rangle_n)$. Sea $V = \cup \mathcal{V}$. Por el Teorema 3.2.6, se tiene que V es un subconjunto abierto de X. Veamos que $V \subseteq f(U)$. Sea $z \in V$. De aquí, existe $B \in \mathcal{V}$ tal que $z \in B$. Luego, $z \in B \in \mathcal{F}_n(f)(\langle U \rangle_n)$. Así, existe $A \in \langle U \rangle_n$ tal que $\mathcal{F}_n(f)(A) = B$. De aquí, $z \in f(A)$. Esto es, existe $a \in A$ tal que $f(a) = z$. Como $A \subseteq U$, $f(a) = z \in f(U)$. Consecuentemente, $V \subseteq f(U)$. Por lo tanto, f es semi-abierta. ∎

De aquí en adelante, analizamos el problema inverso, es decir; si f cumple alguna propiedad, analizamos si $\mathcal{F}_n(f)$ también la cumple y, en caso de que no la cumpla, estudiamos condiciones adicionales sobre el espacio fase y/o la función.

Referente a las funciones localmente eventualmente sobreyectivas, mezclantes, turbulentas y las funciones semi-abiertas, no es necesario añadir otras condiciones.

Teorema 4.1.19. Sean X un espacio topológico T_1, $f : X \to X$ una función y $n \in \mathbb{N}$. Si f es localmente eventualmente sobreyectiva, entonces $\mathcal{F}_n(f)$ es localmente eventualmente sobreyectiva.

Demostración. Supongamos que f es localmente eventualmente sobreyectiva. Veamos que $\mathcal{F}_n(f)$ es localmente eventualmente sobreyectiva. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto y no vacío de $\mathcal{F}_n(X)$. Luego, por el Teorema 3.2.8, existen subconjuntos abierto y no vacíos $U_1, \ldots, U_n$ de X tales que $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle_n \subseteq \mathcal{U}$. Por hipótesis, ya que f es localmente eventualmente sobreyectiva, existen $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ tales que $f^{k_i}(U_i) = X$.

Consideramos los siguientes casos:

Caso (i) $k = k_1 = \cdots = k_n$. En este caso, $f^k(U_i) = X$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Caso (ii) Existen $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tales que $k_i \neq k_j$. Sea $k = \max\{k_1, \ldots, k_n\}$. Notemos que, $f^k(U_i) = f^{n_i}(f^{k_i}(U_i))$ para algún $k_j \in \{k_1, \ldots, k_n\}$ y para algún $n_i \in \mathbb{N}$. De aquí, $f^k(U_i) = f^{n_i}(X)$. Luego, ya que f es sobreyectiva, $f^k(U_i) = X$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Veamos que $\mathcal{F}_n(X) \subseteq [\mathcal{F}_n(f)]^k(\langle U_1, \ldots, U_n \rangle_n)$. Sea $B = \{b_1, \ldots, b_r\} \in \mathcal{F}_n(X)$. Luego, $r \leq n$. Definamos $C = \{b_1, \ldots, b_r, b_{r+1}, \ldots, b_n\}$ donde $b_r = b_{r+1} = \cdots = b_n$. De aquí, $b_i \in X = f^k(U_i)$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Así, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe $a_i \in U_i$ tal que $f^k(a_i) = b_i$. Definamos $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Se cumple que $A \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle_n$ y $[\mathcal{F}_n(f)]^k(A) = C = B$. Así, $B \in [\mathcal{F}_n(f)]^k(\langle U_1, \ldots, U_n \rangle_n)$. Por lo tanto, $\mathcal{F}_n(X) = \mathcal{F}_n(f)]^k(\langle U_1, \ldots, U_n \rangle_n)$. Esto implica que $[\mathcal{F}_n(f)]^k(\mathcal{U}) = \mathcal{F}_n(X)$.

De (i) y (ii) se tiene el resultado. ■

En la prueba de la Proposición 4.1.20, podemos ver la utilidad de los resultados en funciones inducidas para obtener nuevos resultados en sistemas dinámicos.

Proposición 4.1.20. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. Si f es localmente eventualmente sobreyectiva, entonces f no es una isometría.

Demostración. Supongamos que f es localmente eventualmente sobreyectiva. Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Luego, por el Teorema 4.1.19, $\mathcal{F}_n(f)$ es localmente eventualmente sobreyectiva. De aquí, por el Teorema 1.5.8, $\mathcal{F}_n(f)$ es transitiva. Por otra parte, por el Teorema 4.1.3, f no es una isometría. ■

Teorema 4.1.21. Sean X un espacio topológico T_1, $f : X \to X$ una función y $n \in \mathbb{N}$. Si f es mezclante, entonces $\mathcal{F}_n(f)$ es mezclante.

Demostración. Supongamos que f es mezclante y veamos que $\mathcal{F}_n(f)$ es mezclante.

Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ subconjuntos abiertos no vacíos de $\mathcal{F}_n(f)$. Luego, por el Teorema 3.2.8, existen subconjuntos abiertos y no vacíos $U_1, \ldots, U_n, V_1, \ldots, V_n$ de X tales que $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle_n \subseteq \mathcal{U}$ y $\langle V_1, \ldots, V_n \rangle_n \subseteq \mathcal{V}$. Por hipótesis, ya que f es mezclante, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$ para cada $k \geq N_i$. Pongamos $N = \max\{N_1, \ldots, N_n\}$. Luego, $f^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$ para cada $k \geq N$ y para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por el Teorema 1.2.1, $U_i \cap f^{-k}(V_i) \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sea $k \geq N$ y $x_i \in U_i \cap f^{-k}(V_i)$. Pongamos $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Notemos que $A \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle_n$ y $[\mathcal{F}_n(f)]^k(A) \in \langle V_1, \ldots, V_n \rangle_n$. De aquí, $[\mathcal{F}_n(f)]^k(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$, para cada $k \geq N$. Por lo tanto, $\mathcal{F}_n(f)$ es mezclante. ■

Proposición 4.1.22. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. Si f es mezclante, entonces f no es una isometría.

Demostración. Supongamos que f es mezclante. Sea $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$. Luego, por el Teorema 4.1.21, $\mathcal{F}_n(f)$ es mezclante. De aquí, por el Corolario 1.5.11, $\mathcal{F}_n(f)$ es transitiva. Por otra parte, por el Teorema 4.1.3, f no es una isometría. ■

Teorema 4.1.23. Sean X un espacio topológico T_1, $f : X \to X$ una función y $n \in \mathbb{N}$. Si f es turbulenta, entonces $\mathcal{F}_n(f)$ es turbulenta.

Demostración. Supongamos que f es turbulenta. Veamos que $\mathcal{F}_n(f)$ es turbulenta. Por hipótesis, existen subconjuntos compactos y no degenerados C y K de X tales que $C \cap K$ tiene a lo más un punto y $K \cap C \subseteq f(K) \cap f(C)$. Claramente $\langle C \rangle_n$ y $\langle K \rangle_n$ son subconjuntos no degenerados de $\mathcal{F}_n(X)$. Además, por el Teorema 3.2.11, se tiene que $\langle C \rangle_n$ y $\langle K \rangle_n$ son subconjuntos compactos de $\mathcal{F}_n(X)$. Más aún, puesto que $C \cap K = \{a\}$, se tiene que $\langle C \rangle_n \cap \langle K \rangle_n = \{\{a\}\}$. Finalmente, veamos que $\langle C \rangle_n \cap \langle K \rangle_n \subseteq \mathcal{F}_n(f)(\langle K \rangle_n) \cap \mathcal{F}_n(f)(\langle C \rangle_n)$. Por la Observación 3.1.9, se tiene que $\langle K \rangle_n \cap \langle C \rangle_n = \langle K \cap C \rangle_n$. Por hipótesis, ya que $K \cap C \subseteq f(K) \cap f(C)$, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\langle K \cap C \rangle_n &\subseteq \langle f(K) \cap f(C) \rangle_n \\
&= \langle f(K) \rangle_n \cap \langle f(C) \rangle_n \\
&= \langle \mathcal{F}_n(f)(K) \rangle_n \cap \langle \mathcal{F}_n(f)(C) \rangle_n.
\end{aligned} \tag{4.1.2}
$$

Por lo tanto, $\langle C \rangle_n \cap \langle K \rangle_n \subseteq \mathcal{F}_n(f)(\langle K \rangle_n) \cap \mathcal{F}_n(f)(\langle C \rangle_n)$.

Ahora, veamos que:

$$
\langle \mathcal{F}_n(f)(K) \rangle_n \cap \langle \mathcal{F}_n(f)(C) \rangle_n \subseteq \mathcal{F}_n(f)(\langle K \rangle_n) \cap \mathcal{F}_n(f)(\langle C \rangle_n). \tag{4.1.3}
$$

Sea $A \in \langle \mathcal{F}_n(f)(K) \rangle_n \cap \langle \mathcal{F}_n(f)(C) \rangle_n$. De aquí, $A \subseteq f(K) \cap f(C)$. Así, existen $B \subseteq K$ tal que $f(B) = A$ y $D \subset C$ tal que $f(D) = A$. Esto es, existen $B \in \langle K \rangle_n$ y $D \in \langle C \rangle_n$ tales que $\mathcal{F}_n(f)(B) = A$ y $\mathcal{F}_n(f)(D) = A$. Por lo tanto, $A \in \mathcal{F}(f)(\langle K \rangle_n) \cap \mathcal{F}_n(f)(\langle C \rangle_n)$. Esto prueba (4.1.3). De (4.1.2) y (4.1.3), se tiene que $\langle K \rangle_n \cap \langle C \rangle_n \subseteq \mathcal{F}_n(f)(\langle K \rangle_n) \cap \mathcal{F}_n(f)(\langle C \rangle_n)$. Por lo tanto, $\mathcal{F}_n(f)$ es turbulenta. ■

Observemos que una función es semi-abierta si y sólo si $\mathrm{int}(f(U)) \neq \emptyset$, para cada subconjunto abierto y no vacío U de X. En el siguiente teorema, hacemos uso de esta caracterización de las funciones semi-abiertas.

Teorema 4.1.24. Sean X un espacio topológico T_1, $f : X \to X$ una función y $n \in \mathbb{N}$. Si f es semi-abierta, entonces $\mathcal{F}_n(f)$ es semi-abierta.

Demostración. Supongamos que f es semi-abierta y veamos que $\mathcal{F}_n(f)$ es semi-abierta. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto y no vacío de $\mathcal{F}_n(X)$. Por el Teorema 3.2.8, se tiene que existen subconjuntos abiertos y no vacíos $U_1, \ldots, U_n$ de X tales que $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle_n \subseteq \mathcal{U}$. Por hipótesis, ya que f es semi-abierta, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, se tiene que $\operatorname{int}(f(U_i)) \neq \emptyset$. De aquí, $\langle \operatorname{int}(f(U_1)), \ldots, \operatorname{int}(f(U_n)) \rangle_n$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{F}_n(X)$.

Veamos que $\langle \operatorname{int}(f(U_1)), \ldots, \operatorname{int}(f(U_n)) \rangle_n \subseteq \mathcal{F}_n(f)(\langle U_1, \ldots, U_n \rangle_n)$.

Sea $B = \{y_1, \ldots, y_r\} \in \langle \operatorname{int}(f(U_1)), \ldots, \operatorname{int}(f(U_n)) \rangle_n$ con $r \leq n$. De aquí, se tiene que $B \subseteq \bigcup_{i=1}^n \operatorname{int}(f(U_i))$. Así, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, existen $j_i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $y_i \in \operatorname{int}(f(U_{j_i})) \subseteq U_{j_i}$ y $x_{j_i} \in U_{j_i}$ tal que $f(x_{j_i}) = y_i$. Por otro lado, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $B \cap \operatorname{int}(f(U_i)) \neq \emptyset$, así, podemos tomar $z_i \in B \cap \operatorname{int}(f(U_i))$, lo cual implica que, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ existe $u_i \in U_i$ tal que $f(u_i) = z_i$.

Pongamos $A = (\bigcup_{i=1}^r \{x_{j_i}\}) \cup (\bigcup_{i=1}^n \{u_i\})$. Por el Teorema 1.1.78, se tiene que:

$$f(A) = f\left[\left(\bigcup_{i=1}^{r}\{x_{j_i}\}\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n}\{u_i\}\right)\right] = \left(\bigcup_{i=1}^{r}\{f(x_{j_i})\}\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n}\{f(u_i)\}\right).$$

Luego, como $f(x_{j_i}) = y_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$ y $f(u_i) = z_i$, para cada $i \in \{1 \ldots, n\}$:

$$f(A) = B \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n}\{z_i\}\right).$$

Finalmente, ya que $z_i \in B$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $f(A) = B$. Por lo tanto, $|A| \leq r$. Así, $A \in \mathcal{F}_n(X)$. Ahora veamos que $A \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle_n$. Ya que $\bigcup_{i=1}^r \{x_{j_i}\} \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$ y $\bigcup_{i=1}^n \{u_i\} \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$, $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$. Puesto que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $u_i \in U_i$, se tiene que para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, $A \cap U_j \neq \emptyset$. Así, $A \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle_n$. Además, ya que $\mathcal{F}_n(f)(A) = B$, $B \in \mathcal{F}_n(f)(\langle U_1, \ldots, U_n \rangle_n)$. Por lo tanto:

$$\langle \operatorname{int}(f(U_1)), \ldots, \operatorname{int}(f(U_n)) \rangle_n \subseteq \mathcal{F}_n(f)(\langle U_1, \ldots, U_n \rangle_n).$$

Así, $\langle \operatorname{int}(f(U_1)), \ldots, \operatorname{int}(f(U_n)) \rangle_n \subseteq \mathcal{F}_n(f)(\mathcal{U})$. Consecuentemente, $\operatorname{int}(\mathcal{F}_n(f)(\mathcal{U})) \neq \emptyset$. Lo cual prueba que $\mathcal{F}_n(f)$ es semi-abierta. ■

A continuación, se muestra la importancia de las funciones continuas en esta parte del trabajo.

Teorema 4.1.25. Sean X un espacio topológico T_1, $f : X \to X$ una función y $n \in \mathbb{N}$. Si f es continua, las siguientes propiedades son equivalentes:

(1) f es débilmente mezclante.

(2) $\mathcal{F}_n(f)$ es débilmente mezclante.

(3) $\mathcal{F}_n(f)$ es transitiva.

Demostración. (1)⇒(2).

Supongamos que f es débilmente mezclante. Veamos que $\mathcal{F}_n(f)$ es débilmente mezclante. Sean $\mathcal{U}_1', \mathcal{U}_2', \mathcal{V}_1'$ y $\mathcal{V}_2'$ subconjuntos abiertos y no vacíos de $\mathcal{F}_n(X)$. Luego, por el Teorema 3.2.8, existen $\mathcal{U}_1 = \langle U_1^1, \ldots, U_n^1 \rangle_n$, $\mathcal{U}_2 = \langle U_1^2, \ldots, U_n^2 \rangle_n$, $\mathcal{V}_1 = \langle V_1^1, \ldots, V_n^1 \rangle_n$ y

$\mathcal{V}_2 = \langle V_1^2, \ldots, V_n^2\rangle_n$ tales que, $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_1'$, $\mathcal{U}_2 \subseteq \mathcal{U}_2'$, $\mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}_1'$ y $\mathcal{V}_2 \subseteq \mathcal{V}_2'$. Consideremos las colecciones de subconjuntos $U_1^1, \ldots, U_n^1, U_1^2, \ldots, U_n^2$ y $V_1^1, \ldots, V_n^1, V_1^2, \ldots, V_n^2$.

Si $n = 1$, es inmediato. Y no hay nada que demostrar. Así, podemos suponer que $n \geq 2$. Puesto que f es débilmente mezclante, por el Teorema 1.5.13, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que existe $k_j \in \mathbb{N}$ tal que $f^{k_j}(U_i^j) \cap V_i^j \neq \emptyset$, para cada $j \in \{1, 2\}$. Dado $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $j \in \{1, 2\}$ podemos tomar $x_i^j \in f^{-k}(V_i^j) \cap U_i^j$. Pongamos $A_1 = \{x_1^1, \ldots, x_n^1\}$ y $A_2 = \{x_1^2, \ldots, x_n^2\}$. Notemos que $A_j \in \mathcal{U}_j$ y $[\mathcal{F}_n(f)]^k(A_j) \in \mathcal{V}_j$, para cada $j \in \{1, 2\}$. Por lo tanto, $[\mathcal{F}_n(f)]^k(\mathcal{U}_j) \cap \mathcal{V}_j \neq \emptyset$, para cada $j \in \{1, 2\}$.

(2)⇒(3)

Se tiene del Teorema 1.5.10.

(3)⇒(1)

Finalmente, supongamos que $\mathcal{F}_n(f)$ es transitiva y veamos que f es débilmente mezclante. La prueba se hará usando el Teorema 1.5.13. Sean U, V_1 y V_2 subconjuntos abiertos y no vacíos de X. Pongamos $\mathcal{U} = \langle U\rangle_n$ y $\mathcal{V} = \langle V_1, V_2\rangle_n$. Por hipótesis, ya que $\mathcal{F}_n(f)$ es transitiva, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $[\mathcal{F}_n(f)]^k(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$. Así, existe $A \in \mathcal{U}$ tal que $[\mathcal{F}_n(f)]^k(A) \in \mathcal{V}$. Consecuentemente, $f^k(A) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^k(A) \cap V_2 \neq \emptyset$. Por otro lado, como $A \subseteq U$, se tiene que $f^k(A) \subseteq f^k(U)$ y así, $f^k(U) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^k(U) \cap V_2 \neq \emptyset$. Por lo tanto, f es débilmente mezclante. ■

Teorema 4.1.26. Sean X un espacio topológico T_1, $f : X \to X$ una función continua y $n \in \mathbb{N}$. Si f es caótica y débilmente mezclante, entonces $\mathcal{F}_n(f)$ es caótica.

Demostración. Supongamos que f es caótica y débilmente mezclante. Luego por el Teorema 4.1.1, se tiene que $Per(\mathcal{F}_n(f))$ es denso en $\mathcal{F}_n(X)$. Por el Teorema 4.1.25, se tiene que $\mathcal{F}_n(f)$ es transitiva. Por lo tanto, $\mathcal{F}_n(f)$ es caótica. ■

4.2. Otras nociones relacionadas con la transitividad topológica

En la sección anterior, se analizó la relación entre f y su función inducida para los tipos de transitividad más comunes. En esta sección analizamos resultados semejantes pero ahora para los tipos de transitividad que se definieron en el Capítulo 2.

Empezamos analizando la relación entre f y su función inducida $\mathcal{F}_n(f)$ para cuando alguna de ellas es órbita-transitiva. Para esto, es importante analizar la relación entre la órbita de un punto en $\mathcal{F}_n(X)$ y la órbita de un punto en X.

Teorema 4.2.1. Sean X un espacio topológico T_1, $f : X \to X$ una función, $n \in \mathbb{N}$ y $A \in \mathcal{F}_n(X)$. Si $cl_{\mathcal{F}_n(X)}(\mathcal{O}(A, \mathcal{F}_n(f))) = \mathcal{F}_n(X)$, entonces para cada $x \in A$, $cl_X(\mathcal{O}(x, f)) = X$

Demostración. Supongamos que $cl_{\mathcal{F}_n(X)}(\mathcal{O}(A, \mathcal{F}_n(f))) = \mathcal{F}_n(X)$, donde $A = \{x_1, \ldots, x_r\}$. Así, $cl_{\mathcal{F}_n(X)}(\mathcal{O}(\{x_1, \ldots, x_r\}, \mathcal{F}_n(f))) = \mathcal{F}_n(X)$. Sea $i \in \{1, \ldots, r\}$.

Veamos que $cl_X(\mathcal{O}(x_i, f)) = X$. Sean $x \in X$ y U un subconjunto abierto de X tal que $x \in U$. Observemos que $\{x\} \in \mathcal{F}_n(X)$ y $\langle U\rangle_n$ es un conjunto abierto de $\mathcal{F}_n(X)$

tal que $\{x\} \in \langle U \rangle_n$. Por lo supuesto, $\langle U \rangle_n \cap \mathcal{O}(\{x_1, \ldots, x_r\}, \mathcal{F}_n(f)) \neq \emptyset$. Así, existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $[\mathcal{F}_n(f)]^k(\{x_1, \ldots, x_r\}) \in \langle U \rangle_n$. Luego, $f^k(\{x_1, \ldots, x_r\}) \subseteq U$. En particular, $f^k(x_i) \in U$. De aquí, $U \cap \mathcal{O}(x_i, f) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $x \in cl_{(X)}(\mathcal{O}(x_i, f))$ y, consecuentemente, $cl_{(X)}(\mathcal{O}(x_i, f)) = X$. Así, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, se tiene que $cl_X(\mathcal{O}(x_i, f)) = X$. ■

Como una consecuencia inmediata del Teorema 4.2.1, se tiene el siguiente.

Teorema 4.2.2. Sean X un espacio topológico T_1, $f : X \to X$ una función y $n \in \mathbb{N}$. Si $\mathcal{F}_n(f)$ es órbita-transitiva, entonces f es órbita-transitiva.

Veamos con un ejemplo que el recíproco del Teorema 4.2.2 no se cumple en general.

Ejemplo 4.2.3. Sea $R : S^1 \to S^1$ la función rotación irracional. Por el Teorema 1.6.15, R es transitiva. Luego, por las Proposiciones 2.4.5, 2.2.2 y 2.2.1, se tiene que R es órbita-transitiva.

Por otro lado, supongamos que $\mathcal{F}_n(R)$ es órbita-transitiva. Como S^1 no tiene puntos aislados, por la Proposición 2.3.6, $\mathcal{F}_n(R)$ es transitiva. Sin embargo, en el Ejemplo 4.1.4, se muestra que $\mathcal{F}_n(R)$ no es transitiva. Por lo tanto, $\mathcal{F}_n(R)$ no es órbita-transitiva.

Ahora analizamos las condiciones bajo las cuáles se cumple el recíproco del Teorema 4.2.2.

Teorema 4.2.4. Sean X un espacio topológico T_1, $f : X \to X$ una función y $n \in \mathbb{N}$. Si f es órbita-transitiva y cada subconjunto abierto de X es +invariante, entonces $\mathcal{F}_n(f)$ es órbita-transitiva.

Demostración. La prueba hace uso del Teorema 1.1.19. Supongamos que f es órbita-transitiva y que para cada subconjunto abierto U de X, se cumple que $f(U) \subseteq U$.

Así, existe $x_0 \in X$ tal que $cl(\mathcal{O}(x_0, f)) = X$. Por demostrar que $cl(\mathcal{O}(\{x_0\}, \mathcal{F}_n(f))) = \mathcal{F}_n(X)$. Sean $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto y no vacío de $\mathcal{F}_n(X)$. Luego, existen subconjuntos abiertos y no vacíos $U_1, \ldots, U_r$ de X tales que $\langle U_1, \ldots, U_r \rangle_n \subseteq \mathcal{U}$. Por hipótesis, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, existe $k_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $f^{k_i}(x_0) \in U_i$. Sea $k = \text{máx}\{k_1, \ldots, k_r\}$. Notemos que $f^k(x_0) = f^{k-k_i}(f^{k_i}(x_0))$, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$. Puesto que $f^{k_i}(x_0) \in U_i$, $f^{k-k_i}(f^{k_i}(x_0)) \in f^{k-k_i}(U_i)$. Como U_i es +invariante, por el Teorema 2.1.10, se tiene que $f^{k-k_i}(f^{k_i}(x_0)) \in U_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$. Esto es, $f^k(x_0) \in U_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$. De aquí, $[\mathcal{F}_n(f)]^k(\{x_0\}) \in \langle U_1, \ldots, U_r \rangle_n$. Por lo tanto, $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle_n \cap \mathcal{O}(\{x_0\}, \mathcal{F}_n(f)) \neq \emptyset$. Así, $\mathcal{U} \cap \mathcal{O}(\{x_0\}, \mathcal{F}_n(f)) \neq \emptyset$. ■

Hagamos el mismo análisis pero ahora para una función estrictamente órbita-transitiva. El resultado del Teorema 4.2.1 es también de gran ayuda en la prueba del siguiente resultado.

Teorema 4.2.5. Sean X un espacio topológico T_1, $f : X \to X$ una función y $n \in \mathbb{N}$. Si $\mathcal{F}_n(f)$ es estrictamente órbita-transitiva, entonces f es estrictamente órbita-transitiva.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}_n(f)$ es estrictamente órbita-transitiva. Luego, existe $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \mathcal{F}_n(X)$ tal que $cl_{\mathcal{F}_n(X)}(\mathcal{O}(\mathcal{F}_n(f)(\{x_1, \ldots, x_r\}), \mathcal{F}_n(f))) = \mathcal{F}_n(X)$. Esto es, $cl_{\mathcal{F}_n(X)}(\mathcal{O}(\{f(x_1), \ldots, f(x_r)\}, \mathcal{F}_n(f))) = \mathcal{F}_n(X)$. Luego, por el Teorema 4.2.1, se tiene que para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, $cl_X(\mathcal{O}(f(x_i), f)) = X$. En particular, $cl_X(\mathcal{O}(f(x_1), f)) = X$. Por lo tanto, f es estrictamente órbita-transitiva. ■

Nuevamente vamos a recurrir a la función rotación irracional para mostrar que, si f es estrictamente órbita-transitiva, las inducidas $\mathcal{F}_n(f)$ no son, en general, estrictamente órbita-transitivas.

Ejemplo 4.2.6. Sea $R : S^1 \to S^1$ la función rotación irracional. Luego, por la Proposicion 2.4.5, R es ω-transitiva y, por la Proposición 2.2.2, se tiene que R es estrictamente órbita-transitiva. Por otro lado, supongamos que $\mathcal{F}_n(R)$ es estrictamente órbita-transitiva. Como R es continua, por la Proposición 2.4.2, $\mathcal{F}_n(R)$ es transitiva. Sin embargo, en el Ejemplo 4.1.4, se muestra que $\mathcal{F}_n(R)$ no es transitiva. Por lo tanto, $\mathcal{F}_n(R)$ no es estrictamente órbita-transitiva.

Teorema 4.2.7. Sean X un espacio topológico T_1, $f : X \to X$ una función y $n \in \mathbb{N}$. Si f es estrictamente órbita-transitiva y cada subconjunto abierto de X es +invariante, entonces $\mathcal{F}_n(f)$ es estrictamente órbita-transitiva.

Demostración. Supongamos que f es estrictamente órbita-transitiva y que, para cada subconjunto abierto U de X, $f(U) \subseteq U$. Luego, existe $x_0 \in X$ tal que $cl(\mathcal{O}(f(x_0), f)) = X$. Veamos que $cl(\mathcal{O}(\{f(x_0)\}, \mathcal{F}_n(f))) = \mathcal{F}_n(X)$. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto y no vacío en $\mathcal{F}_n(X)$. Luego, existen subconjuntos abiertos y no vacíos $V_1, \ldots, V_r$ en X tales que $\langle V_1, \ldots V_r \rangle_n \subseteq \mathcal{U}$. Por hipótesis, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $f^{k_i}(x_0) \in V_i$. Sea $k = \text{máx}\{k_1, \ldots, k_r\}$. Notemos que para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, $f^k(x_0) = f^{k-k_i}(f^{k_i}(x_0))$. Dado que $f^{k_i}(x_0) \in V_i$, se tiene que $f^{k-k_i}(f^{k_i}(x_0)) \in f^{k-k_i}(V_i)$. Por hipótesis, puesto que V_i es +invariante, por el Teorema 2.1.10, se sigue que para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, $f^k(x_0) \in V_i$. De aquí, $[\mathcal{F}_n(f)]^{k-1}(\{f(x_0)\}) \in \langle V_1, \ldots, V_r \rangle_n$. Por lo tanto, $\langle V_1, \ldots, V_r \rangle_n \cap \mathcal{O}(\{f(x_0)\}, \mathcal{F}_n(f)) \neq \emptyset$. Consecuentemente, $\mathcal{U} \cap \mathcal{O}(\{f(x_0)\}, \mathcal{F}_n(f)) \neq \emptyset$. ■

Hemos visto que bajo la hipótesis de que para cada subconjunto abierto U de X, U es +invariantes, se tiene que f es una función órbita transitiva (estrictamente órbita-transitiva) si y sólo si $\mathcal{F}_n(f)$ es órbita-transitiva (estrictamente órbita-transitiva). De manera natural nos preguntamos si bajo estas mismas condiciones f y $\mathcal{F}_n(X)$ son equivalentes cuando pertenecen a la clase de las funciones ω-transitivas. En efecto, esta condición sigue siendo suficiente.

Se tiene un resultado semejante al Teorema 4.2.1, para los puntos ω-límite que anteriormente se definieron.

Teorema 4.2.8. Sean X un espacio topológico T_1, $f : X \to X$ una función, $n \in \mathbb{N}$ y $A \in \mathcal{F}_n(X)$. Si $\omega(A, \mathcal{F}_n(f)) = \mathcal{F}_n(X)$, entonces para cada $x \in A$, $\omega(x, f) = X$.

Demostración. Supongamos que $\omega(A, \mathcal{F}_n(f)) = \mathcal{F}_n(X)$. Pongamos $A = \{x_1, \ldots, x_r\}$. Así, $\omega(\{x_1, \ldots, x_r\}, \mathcal{F}_n(f)) = \mathcal{F}_n(X)$. Sea $x_j \in \{x_1, \ldots x_r\}$. Veamos que $\omega(x_j, f) = X$. Sean

$y \in X$, $k \in \mathbb{N}$ y U un subconjunto abierto de X tales que $y \in U$. Observemos que $\{y\} \in \mathcal{F}_n(X)$ y que $\langle U \rangle_n$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{F}_n(X)$ tal que $\{y\} \in \langle U \rangle_n$. Por hipótesis, ya que $\{y\} \in \omega(\{x_1, \ldots, x_r\}, \mathcal{F}_n(f))$, existe $n > k$ tal que $[\mathcal{F}_n(f)]^k(\{x_1, \ldots, x_r\}) \in \langle U \rangle_n$. Luego, $f^n(\{x_1, \ldots x_r\}) \subseteq U$. Así, $f^n(x_i) \in U$, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$. En particular, $f^n(x_j) \in U$. Así, $y \in \omega(x_i, f)$. Por lo tanto, $\omega(x_j, f) = X$, para cada $x_j \in A$. ■

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata del Teorema 4.2.8.

Teorema 4.2.9. Sean X un espacio topológico T_1, $f : X \to X$ una función y $n \in \mathbb{N}$. Si $\mathcal{F}_n(f)$ es ω-transitiva, entonces f es ω-transitiva.

Ejemplo 4.2.10. Finalmente, por la Proposición 2.4.5, la función rotación irracional es ω-transitiva. Luego, si las inducidas $\mathcal{F}_n(R)$ fueran ω-transitivas, por la Proposición 2.2.3, serían también transitivas. Sin embargo, en el Ejemplo 4.1.4, vimos que esto no puede ocurrir. Esto nos dice que el recíproco del Teorema 4.2.9 tampoco se cumple en general.

A continuación se dan condiciones bajo las cuales se cumple que si f es ω-transitiva, entonces $\mathcal{F}_n(f)$ es ω-transitiva y con esto finalizamos esta sección.

Teorema 4.2.11. Sean X un espacio topológico T_1, $f : X \to X$ una función y $n \in \mathbb{N}$. Si f es ω-transitiva y cada subconjunto abierto de X es $+$invariante, entonces $\mathcal{F}_n(f)$ es ω-transitiva.

Demostración. Supongamos que f es ω-transitiva y que para cada subconjunto abierto U en X, $f(U) \subseteq U$. Luego, existe $x_0 \in X$ tal que $\omega(x_0, f) = X$. Veamos que $\omega(\{x_0\}, \mathcal{F}_n(f)) = \mathcal{F}_n(X)$. Sean $\{x_1, \ldots, x_l\} \in \mathcal{F}_n(X)$, $k \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $\mathcal{F}_n(X)$ tal que $\{x_1, \ldots, x_l\} \in \mathcal{U}$. De aquí, existen subconjuntos abiertos y no vacíos $V_1, \ldots, V_r$ de X tales que $\{x_1, \ldots, x_l\} \in \langle V_1, \ldots, V_r \rangle_n \subseteq \mathcal{U}$. Por hipótesis, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, existe $n_i > k$ tal que $f^{n_i}(x_0) \in V_i$. Sea $m = \text{máx}\{n_1, \ldots, n_r\}$. Como $f^{n_i}(x_0) \in V_i$, $f^{m-n_i}(f^{n_i}(x_0)) \in f^{m-n_i}(V_i)$. Puesto que V_i es $+$invariante, por el Teorema 2.1.10, $f^{m-n_i}(V_i) \subseteq V_i$. De aquí, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, $f^m(x_0) \in V_i$. Consecuentemente, $[\mathcal{F}_n(f)]^m(\{x_0\}) \in \langle V_1, \ldots, V_r \rangle_n \subseteq \mathcal{U}$. Por lo tanto, $\mathcal{F}_n(f)$ es ω-transitiva. ■

4.3. Otras nociones de transitividad topológica

En esta última sección y último capítulo de nuestro trabajo de tesis, se analizan otros resultados referente al resto de nociones de transitividad topológica proporcionadas en la Definición 2.1.12.

Teorema 4.3.1. Sean X un espacio topológico T_1, $f : X \to X$ una función y $n \in \mathbb{N}$. Si $\mathcal{F}_n(f)$ satisface la propiedad IN, entonces f satisface la propiedad IN.

Demostración. Supongamos que f no satisface la propiedad IN. Luego, existen dos subconjuntos propios, cerrados y $+$invariantes C_1 y C_2 de X tales que $X = C_1 \cup C_2$. Por Teorema 3.2.5, se tiene que $\langle X, C_1 \rangle_n$ y $\langle X, C_2 \rangle_n$ son subconjuntos cerrados en $\mathcal{F}_n(X)$.

Veamos que estos conjuntos son además +invariantes.

Sea $\{x_1, \ldots, x_l\} \in \mathcal{F}_n(f)(\langle X, C_1\rangle_n)$. Luego, existe $\{z_1, \ldots, z_r\} \in \langle X, C_1\rangle_n$ tal que $\mathcal{F}_n(f)(\{z_1, \ldots, z_r\}) = \{x_1, \ldots, x_l\}$. Puesto que $\{z_1, \ldots, z_r\} \in \langle X, C_1\rangle_n$, se sigue que $\{z_1, \ldots, z_r\} \cap C_1 \neq \emptyset$. Así, $f(\{z_1, \ldots, z_r\} \cap C_1) \subseteq f(\{z_1, \ldots, z_r\}) \cap f(C_1) \subseteq f(\{z_1, \ldots, z_r\}) \cap C_1$. Consecuentemente, $\{x_1, \ldots, x_l\} \cap C_1 \neq \emptyset$. De aquí que $\{x_1, \ldots, x_l\} \in \langle X, C_1\rangle_n$. De donde, $\mathcal{F}_n(f)(\langle X, C_1\rangle_n) \subseteq \langle X, C_1\rangle_n$. Finalmente, se tiene que $\langle X, C_1\rangle_n$ es +invariante. De manera similar se prueba que $\langle X, C_2\rangle_n$ es +invariante.

Ahora veamos que $\mathcal{F}_n(X) = \langle X, C_1\rangle_n \cup \langle X, C_2\rangle_n$. Sean $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \mathcal{F}_n(X)$. Por hipótesis, puesto que $X = C_1 \cup C_2$, se tiene que $\{x_1, \ldots, x_r\} \subseteq C_1 \cup C_2$. Se tienen los siguientes casos:

Caso (i) $\{x_1, \ldots, x_r\} \subseteq C_1$. En este caso se tiene que: $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \langle X, C_1\rangle_n$. De aquí, $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \langle X, C_1\rangle_n \cup \langle X, C_2\rangle_n$.

Caso (ii) $\{x_1, \ldots, x_r\} \subseteq C_2$. En este caso se tiene que: $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \langle X, C_2\rangle_n$. De aquí, $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \langle X, C_1\rangle_n \cup \langle X, C_2\rangle_n$.

Caso (iii) $\{x_1, \ldots, x_r\} \cap C_1 \neq \emptyset$ y $\{x_1, \ldots, x_r\} \cap C_2 \neq \emptyset$. En este caso, $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \langle X, C_1\rangle_n \cap \langle X, C_2\rangle_n$. Así, $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \langle X, C_1\rangle_n \cup \langle X, C_2\rangle_n$.

En los tres casos se tiene que $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \langle X, C_1\rangle_n \cup \langle X, C_2\rangle_n$. De aquí, $\mathcal{F}_n(X) \subseteq \langle X, C_1\rangle_n \cup \langle X, C_2\rangle_n$. Por lo tanto, $\mathcal{F}_n(X) = \langle X, C_1\rangle_n \cup \langle X, C_2\rangle_n$.

Finalmente, veamos que $\langle X, C_1\rangle_n$ y $\langle X, C_2\rangle_n$ son subconjuntos propios de $\mathcal{F}_n(X)$. Puesto que C_1 es un subconjunto propio de X, existe $x_0 \in X \backslash C_1$. De aquí, $\{x_0\} \cap C_1 = \emptyset$. Así, $\{x_0\} \notin \langle X, C_1\rangle_n$. Por lo tanto, $\langle X, C_1\rangle_n$ es un subconjunto propio de $\mathcal{F}_n(X)$. De manera similar se prueba que $\langle X, C_2\rangle_n$ es también un subconjunto propio de $\mathcal{F}_n(X)$.

Con todo lo anterior se tiene que $\mathcal{F}_n(X)$ es la unión de dos subconjuntos propios, cerrados y +invarientes. Por lo tanto, $\mathcal{F}_n(f)$ no satisface la propiedad IN. ■

Teorema 4.3.2. Sean X un espacio topológico T_1, $f : X \to X$ una función y $n \in \mathbb{N}$. Si $\mathcal{F}_n(f)$ satisface la propiedad TT_{++}, entonces f satisface la propiedad TT_{++}.

Demostración. Supongamos que para cada par de subconjuntos abiertos y no vacíos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ de $\mathcal{F}_n(X)$, el conjunto $N_+(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ es infinito. Sean U y V subconjuntos abiertos y no vacíos de X. Observemos que $\langle U\rangle_n$ y $\langle V\rangle_n$ son subconjuntos abiertos de $\mathcal{F}_n(X)$. Por hipótesis, el conjunto $N_+(\langle U\rangle_n, \langle V\rangle_n)$ es infinito. Veamos que $N_+(\langle U\rangle_n, \langle V\rangle_n) \subseteq N_+(U, V)$. Sea $k \in N_+(\langle U\rangle_n, \langle V\rangle_n)$ y $\langle U\rangle_n \cap [\mathcal{F}_n(f)]^{-k}(\langle V\rangle_n) \neq \emptyset$. Sea $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \langle U\rangle_n \cap [\mathcal{F}_n(f)]^{-k}(\langle V\rangle_n)$. De aquí, $\{x_1, \ldots, x_r\} \subseteq U$ y $[\mathcal{F}_n(f)]^k(\{x_1, \ldots, x_r\}) \in \langle V\rangle_n$. Luego, $\{x_1, \ldots, x_r\} \subseteq U$ y $\{x_1, \ldots, x_r\} \subseteq f^{-k}(V)$. Así, $U \cap f^{-k}(V) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $k \in N_+(U, V)$. Consecuentemente, $N_+(\langle U\rangle_n, \langle V\rangle_n) \subseteq N_+(U, V)$. Como $N_+(\langle U\rangle_n, \langle V\rangle_n)$ es infinito, se tiene que $N_+(U, V)$ es infinito. Por lo tanto, f satisface la propiedad TT_{++}. ■

Teorema 4.3.3. Sean X un espacio topológico T_1, $f : X \to X$ una función y $n \in \mathbb{N}$. Si $\mathcal{F}_n(f)$ satisface la propiedad TT, entonces f satisface la propiedad TT.

Demostración. Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X. Notemos que $\langle U\rangle_n$ y $\langle V\rangle_n$ son subconjuntos abiertos de $\mathcal{F}_n(X)$. Por hipótesis, $N(\langle U\rangle_n, \langle V\rangle_n)$ es no vacío. De aquí, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\langle U\rangle_n \cap [\mathcal{F}_n(f)]^{-k}(\langle V\rangle_n) \neq \emptyset$. Sea $\{x_1, \ldots, x_l\} \in \langle U\rangle_n \cap [\mathcal{F}_n(f)]^{-k}(\langle V\rangle_n)$. Luego, $\{x_1, \ldots, x_l\} \subseteq U$ y $[\mathcal{F}_n(f)]^k(\{x_1, \ldots, x_l\}) \in \langle V\rangle_n$. En particular, $x_1 \in U$ y $f^k(x_1) \in V$. De aquí, $x_1 \in U \cap f^{-k}(V) \neq \emptyset$. Consecuentemente, $k \in N(U, V)$. Por lo tanto, f satisface la propiedad TT. ■

Ejemplo 4.3.4. Sea $R : S^1 \to S^1$ la función rotación irracional. Vimos en el Ejemplo 2.3.12 que esta función es TT_{++}, TT e IN, sin embargo, por el Teorema 2.3.11, estas condiciones son equivalentes a la transitividad en espacios perfectos. Entonces las inducidas $\mathcal{F}_n(R)$ no son TT_{++}, TT ni IN, respectivamente. De aquí, los recíprocos de los Teoremas 4.3.1, 4.3.2 y 4.3.3, no son ciertos en general.

Teorema 4.3.5. Sean X un espacio topológico T_1 tal que cada subconjunto abierto U de X es invariante, $f : X \to X$ una función y $n \in \mathbb{N}$. Si f satisface la propiedad TT_{++}, entonces $\mathcal{F}_n(f)$ satisface la propiedad TT_{++}.

Demostración. Sean $\mathcal{U}'$ y $\mathcal{V}'$ abiertos no vacíos de $\mathcal{F}_n(X)$. Por demostrar que $N_+(\mathcal{U}', \mathcal{V}')$ es infinito. Sean $A \in \mathcal{U}'$ y $B \in \mathcal{V}'$. Así, por el Teorema 3.2.8, existen $\mathcal{U} = \langle U_1, \ldots, U_n\rangle_n$ y $\mathcal{V} = \langle V_1, \ldots, V_n\rangle_n$ tales que $A \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}'$ y $B \in \mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}'$. Por hipótesis, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, el conjunto $N_+(U_i, V_i)$ es infinito. Sean $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $k_i^1 \in N_+(U_i, V_i)$. Luego, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $U_i \cap f^{-k_i^1}(V_i) \neq \emptyset$. Así, por el Teorema 1.2.1, $f^{k_i^1}(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sean $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $x_i \in f^{k_i^1}(U_i) \cap V_i$. Pongamos $k^1 = \max\{k_1^1, \ldots, k_n^1\}$. Como U_i es invariante, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, por la Proposición 2.1.10, $U_i \subseteq f^{k^1 - k_i^1}(V_i)$. Esto implica que, $f^{k_i^1}(U_i) \subseteq f^{k_i^1}(f^{k^1 - k_i^1}(U_i)) = f^{k^1}(U_i)$. Así, $x_i \in f^{k^1}(U_i) \cap V_i$. Por el Teorema 1.2.1, $U_i \cap f^{-k^1}(V_i) \neq \emptyset$. Sea $y_i \in U_i \cap f^{-k^1}(V_i)$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Luego, $\{y_1, \ldots, y_n\} \in \mathcal{U} \cap [\mathcal{F}_n(f)]^{-k^1}(\mathcal{V})$. Por lo tanto, $k^1 \in N_+(\mathcal{U}', \mathcal{V}')$. Sea ahora $k_i^2 \in N_+(U_i, V_i)$ con $k_i^2 > k^1$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Pongamos $k^2 = \max\{k_1^2, \ldots, k_n^2\}$. De manera similar se prueba que $k^2 \in N_+(\mathcal{U}', \mathcal{V}')$. Continuando con este proceso, existen $k^1 < k^2 < k^3 < \ldots$ tales que $k^i \in N_+(\mathcal{U}', \mathcal{V}')$ con $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, el conjunto $N_+(\mathcal{U}', \mathcal{V}')$ es infinito. Consecuentemente, $\mathcal{F}_n(f)$ satisface la propiedad TT_{++}. ■

Para concluir con este trabajo, en la tabla de la Figura 4.1, se muestran las relaciones entre f y su inducida $\mathcal{F}_n(f)$, para las clases de funciones proporcionadas en las Definiciones 1.5.1 y 2.1.12, cuando X es un espacio topológico T_1 y f es cualquier función y en algunos casos continua. En caso de que se cumpla la implicación lo indicamos con un "Sí" y hacemos referencia al teorema donde se encuentra dicho resultado, en otro caso, ponemos un "No" y hacemos referencia al contraejemplo.

Propiedad	$\mathcal{F}_{\mathbf{n}}(\mathbf{f}) \Rightarrow \mathbf{f}$	$\mathbf{f} \Rightarrow \mathcal{F}_{\mathbf{n}}(\mathbf{f})$
Continua	Sí Teorema 3.3.6	Sí Teorema 3.3.6
Inyectiva	Sí Teorema 3.3.7	Sí Teorema 3.3.7
Sobreyectiva	Sí Teorema 3.3.8	Sí Teorema 3.3.8
Homeomorfismo	Sí Teorema 3.3.9	Sí Teorema 3.3.9
Transitiva	Sí Teorema 4.1.2	No Ejemplo 4.1.4
Mezclante	Sí Teorema 4.1.6	Sí Teorema 4.1.21
Débilmente mezclante	Sí Teorema 4.1.7	Sí Teorema 4.1.25
Totalmente transitiva	Sí Teorema 4.1.8	No Ejemplo 4.1.9
Fuertemente transitiva	Sí Teorema 4.1.10	No Ejemplo 4.1.11
Localmente eventualmente sobreyectiva	Sí Teorema 4.1.12	Sí Teorema 4.1.19
Irreducible	Sí Teorema 4.1.13	Problema abierto
Minimal	Sí Teorema 4.1.14	No Ejemplo 4.1.15
Caótica	Sí Teorema 4.1.16	No Ejemplo 4.1.17
Semi-abierta	Sí Teorema 4.1.18	Sí Teorema 4.1.24
Órbita-transitiva	Sí Teorema 4.2.2	No Ejemplo 4.2.3
Estrictamente órbita-transitiva	Sí Teorema 4.2.5	No Ejemplo 4.2.6
ω-transitiva	Sí Teorema 4.2.9	No Ejemplo 4.2.10
IN	Sí Teorema 4.3.1	No Ejemplo 4.3.4
TT_{++}	Sí Teorema 4.3.2	No Ejemplo 4.3.4
TT	Sí Teorema 4.3.3	No Ejemplo 4.3.4

Figura 4.1: Resumen de relaciones entre f y $\mathcal{F}_n(f)$ cuando X es T_1.

Conclusiones

Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. Se dice que la pareja (X, f) define un sistema dinámico transitivo si para cada par de subconjuntos abiertos y no vacíos U y V de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Además de la transitividad, se han definido y clasificado varios tipos de sistemas dinámicos, los cuales son todos transitivos. Algunos de estos son: localmente eventualmente sobreyectivos, mezclantes, débilmente mezclantes, totalmente transitivos, caóticos y minimales, por mencionar algunos. Existen otras propiedades relacionadas a la transitividad topológica que no son tan conocidas como las anteriores, éstas son: órbita-transitividad, estrictamente órbita-transitividad y ω-transitividad.

Cuando se analiza la dinámica de un objeto en particular, se habla de la dinámica individual, sin embargo, al estudiar la dinámica de todo un conjunto de objetos, se dice que se analiza la dinámica colectiva. Para ello, se definen los siguientes hiperespacios:

$$CL(X) = \{A \subseteq X : A \,\text{es no vacío y cerrado en}\, X\}$$

y

$$\mathcal{F}_n(X) = \{A \subseteq X : A \,\text{es no vacío y tiene a lo más}\, n \,\text{elementos}\}.$$

El objetivo de este trabajo de tesis fue estudiar en el n-ésimo producto simétrico $\mathcal{F}_n(X)$, los tipos de sistemas dinámicos que se mencionaron anteriormente, para el caso en el que X es un espacio topológico T_1.

Para el desarrollo de nuestro trabajo se siguieron principalmente dos líneas de investigación:

(L1) Dada una propiedad $\mathcal{P}$ definida en algún espacio topológico, se analiza la relación que existe entre las siguientes dos condiciones:

(1) X tiene la propiedad $\mathcal{P}$,

(2) $\mathcal{F}_n(X)$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$.

(L2) Dada una clase de funciones entre espacios topológicos, $\mathcal{M}$, se investiga qué relación existe entre las siguientes dos condiciones:

a) $f \in \mathcal{M}$,

b) $\mathcal{F}_n(f) \in \mathcal{M}$.

- Respecto a la primera línea de investigación, se demostró que la colección

$$\beta = \{\langle U_1, \ldots, U_k \rangle : \text{para cada}\, i \in \{1, \ldots, k\}, U_i \,\text{es abierto en}\; X \;\text{y}\; k \in \mathbb{N}\}$$

es una base para una topología en el hiperespacio $CL(X)$. Además, vimos que si X es T_1, entonces $\mathcal{F}_n(X) \subseteq CL(X)$. Así, la topología para $\mathcal{F}_n(X)$, es la topología para $CL(X)$ restringida a $\mathcal{F}_n(X)$. Con esto, tuvo sentido estudiar propiedades topológicas en el n-ésimo producto simétrico. Se demostró, por ejemplo, que si X es un espacio topológico T_1, entonces $\mathcal{F}_n(X)$ es también T_1. También se probó que para un espacio topológico T_1, X es perfecto si y sólo si $\mathcal{F}_n(X)$ es perfecto. En cuanto a propiedades dinámicas, fue necesario definir una función del hiperespacio $\mathcal{F}_n(X)$ en él mismo. Si $f : X \to X$ es una función, se define $CL(f) : CL(X) \to CL(X)$ como $CL(f)(A) = f(A)$, para cada $A \in CL(X)$, puesto que $\mathcal{F}_n(X) \subseteq CL(X)$, $\mathcal{F}_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ se define como $\mathcal{F}_n(f)(A) = CL(f)\mid_{\mathcal{F}_n(X)} (A)$, para cada $A \in \mathcal{F}_n(X)$. Una vez definida esta función, se prueba que si $A = \{x_1, \ldots, x_r\} \in \mathcal{F}_n(X)$ y $cl(\mathcal{O}(A, \mathcal{F}_n(f))) = \mathcal{F}_n(X)$, entonces para cada $x_i \in A$, $cl(\mathcal{O}(x_i, f)) = X$.

- En cuanto a la segunda línea de investigación, vimos, por ejemplo, que f es un homeomorfismo si y sólo si $\mathcal{F}_n(f)$ es un homeomorfismo. Referente a propiedades dinámicas, algunos de los resultados que se verificaron son los siguientes:

  - Si $\mathcal{F}_n(f)$ es órbita-transitiva, entonces f es órbita-transitiva.
  - Si $\mathcal{F}_n(f)$ es estrictamente órbita-transitiva, entonces f es estrictamente órbita-transitiva.
  - Si $\mathcal{F}_n(f)$ es ω-transitiva, entonces f es ω-transitiva.

  Una vez que se obtuvieron estos resultados, nos preguntamos por el recíproco de cada uno de ellos, y al no obtener resultados positivos para un espacio topológico T_1 y una función en general, se pidieron condiciones a la función o al espacio. Por ejemplo, para una función órbita-transitiva, se prueba que sus inducidas $\mathcal{F}_n(f)$ son óbita-transitivas, cuando además cada subconjunto abierto de X es $+$invariante. Más aún, esta condición nos ayudó a obtener resultados semejantes para las funciones estrictamente órbita-transitivas y ω-transitivas, por mencionar algunas. Otro resultado que se obtuvo y en el cual, la continuidad de la función jugó un papel muy importante es el siguiente: Si f es continua, caótica y débilmente mezclante, entonces $\mathcal{F}_n(f)$ es caótica.

Es importante mencionar que hasta donde sabemos, el problema tratado en el último capítulo sólo se había considerado cuando X es un espacio métrico (o un continuo). Nosotros hemos generalizado estas ideas considerando espacios topológicos T_1, contribuyendo de esta manera, tan sólo un poco al engrandecimiento de las matemáticas.

Bibliografía

[1] G. Acosta, A. Illanes, H. Méndez-Lango, *The transitivity of induced maps*, Topology Appl. 156 (2009), no. 5, 1013-1033.

[2] E. Akin and J. D. Carlson, *Conceptions of topological transitivity*, Topology Appl. 159 (2012) 2815-2830.

[3] L. Alseda, J. Llibre, M. Misiurewics, *Combinatorial dynamics and entropy in dimension one*, Advanced Series in Nonlinear Dynamics, 5 (1993), World Scientific, Singapore.

[4] J. Auslander, Y. Katznelson, *Continuos maps of the circle without periodic points*, Israel J. Math., 32 (1979), 375-381.

[5] F. Barragán, *Induced maps on the n-fold symmetric product suspensions*, Topology and its Appl., 158 (2012), 1192-1205.

[6] F. Barragán, S. Macías, J. F. Tenorio, *More on induced maps on n-fold symmetric product suspensions*, Glasnik math., 50 (2015), 489-512.

[7] F. Barragán, A. Santiago, J. F. Tenorio, *Dynamic properties for the induced maps on n-fold symmetric product suspensions*, Glasnik math., 51 (2016), 0-22.

[8] M. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Academic Press, Inc., San Diego, 1988.

[9] W. Bauer, K. Sigmund, *Topological dynamics of transformations induced on the space of probability measures*, Monatsh. Math. 79 (1975), 81-92.

[10] G. D. Birkhoff, *Dinamical Systems*, American Math. Soc., Colloquium publications, Volume IX, 1927.

[11] K. Borsuk y S. Ulam, *On symmetric products of topological space*, Bull. Amer. Math. Soc., 37 (1931), 875-882.

[12] H. Diederich, F. M. José L., C. F. Andrés y A. P. Ángel, *Topología General*, Serie Textos No. 22, Soc. Mat. Mex., 2003.

[13] Fidel C. Segura, Ángel T. Mascarúa, *Elementos de topología general*, Serie Textos, No. 37, Sociedad Matemática Mexicana, 2012.

[14] S. Flores, *Un acercamiento a la dinámica colectiva*, Tesis de Licenciatura, Universidad Tecnológica de la Mixteca, 2017.

[15] J. L. García, D. Kwietniak, M. Lampart, P. Oprocha, A. Peris, *Chaos on hyperspaces*, Nonlinear Anal. 71 (2009), no. 1-2, 1-8.

[16] J. L. Gómez-Rueda, A. Illanes y H. Méndez, *Dynamic properties for the induced maps in the symmetric products*, Chaos, Sol. & Fract., 45 (2012), 1180-1187.

[17] C. Good, S. Macías, *Symmetric products of generalized metric spaces*, Topology Appl. 206 (2016) 93-114.

[18] F. Hausdorff, *Grundzuge der Mengenlehre*, Leipzig, 1914.

[19] Higuera R. Galo, *Funciones inducidas en productos simétricos*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, BUAP, 2009.

[20] G. Higuera y A. Illanes, *Induced mappings on symmetric products*, Topology Proc., 37 (2011), 367-401.

[21] V. M. Grijalva , *Dinámica de funciones inducidas entre productos simétricos*, Tesis de Mestría, Universidad Tecnológica de la Mixteca, 2016.

[22] A. Illanes, *Hiperespacios de continuos*, Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, 2004.

[23] A. Illanes y S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces: fundamentals and recent advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, New York, Basel, 1999.

[24] J. E. King Dávalos, H. Méndez Lango, *Sistemas dinámicos discretos*, Serie: Temas de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, (2014).

[25] J. Mai y W. Sun, *Transitivities of maps of general topological spaces*, Topology Appl., 157 (2010), 946-953.

[26] S. Macías, *Topics on Continua*, Pure and Applied Mathematics Series, Vol. 275, Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2005.

[27] J. R. Munkres, *Topología*, Segunda Edición, Pearson Educación, S.A., Madrid, 2002.

[28] L. Vietoris, *“Bereiche zweiter Ordnung”*, *Monatshefte fur Mathematik und Physik* 32 (1922), 258-280.

Índice alfabético