UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

SOBRE ESPACIOS BITOPOLÓGICOS, AXIOMAS POR PARES Y TEMAS AFINES

TESIS

Para obtener el grado de:

DOCTORA EN MODELACIÓN MATEMÁTICA

Presenta:

M.C. LUZ DEL CARMEN ÁLVAREZ MARÍN

Director de Tesis:

DR. JOSÉ MARGARITO HERNÁNDEZ MORALES

Huajuapan de León, Oaxaca. Junio de 2018.

Índice general

Dedicatoria

A mi mamá, a quien le debo todo.

A Cali y a Andrea, mis amores eternos.

A Cuauhtémoc, mi mejor amigo, mi compañero.

A mis hermanos: Rocío, Raúl, Socorro,
Jorge, Daniel, Ivonne y Paty, por estar ahí, apoyándome siempre.

Agradecimientos

Primero que nada, quiero agradecer a mi director de tesis, el Dr. José Margarito Hernández Morales, por tenerme tanta paciencia y brindarme todo su apoyo cada vez que queria claudicar. También quiero agradecerle a mis sinodales, los doctores Ivonne Lilián Martínez Cortés, Alicia Santiago Santos, Franco Barragán Mendoza, Evodio Muñoz Aguirre, Virgilio Vázquiez Hipólito y Reinaldo Martínez Cruz, por su apoyo, por sus correcciones y paciencia a lo largo de este trabajo.

Quiero hacer un agradecimiento especial a mis maestros de inglés: María Pinto y John Detweiler, por tener la paciencia para enseñarme y mostrarme que puedo aprender su idioma (algo que creí imposible lograr). Además de despertar en mí el interés, me hicieron ver que es divertido y necesario.

También les agradezco de todo corazón a mis amigos Alma, Olivia, Reyna, Carmen Bartolo y Arturo, Liliana Manzano, José Luis, Vulfrano, Juan Luis, Miguelito, Raúl, Juan Ramón, Graciela, Octavio, Marisol, José del Carmen, Laura, Richard, Emma, Adolfo, Rita, Mary, Doña Marce, que todo el tiempo estuvieron echándome porras para confiar en mí y no desistir.

Y no puedo dejar de agradecerle a mi mamá, a quién más he sacrificado por dedicarle tanto a este trabajo. A mis hijas, Andrea y Cali, a quienes he abandoando también durante este proceso, sus abrazos y sus besos me devuelven la vida; a Cuauhtémoc, por no dejarme caer; a mis hermanas, a mis hermanos, a mis sobrinas y mis sobrinos, que tanto me han echado porras y a quienes no he podido abrazar como antes. Y a ti también, muchas gracias por todo tu apoyo. Doris, te toca a ti.

Simbología

Notación	**Significado** (eventualmente puede tener otro uso)
$\mathbb{R}^+$	$\{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$.
$\widehat{\mathbb{R}^+}$	$\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$.
ω	$\{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0\}$.
ρ	cuasi-semimétrica y/o cuasi-métrica.
$\overline{\rho}$	cuasi-semimétrica y/o cuasi-métrica conjugada de ρ.
ρ^s	semimétrica $máx\{\rho, \overline{\rho}\}$.
(X, ρ)	espacio cuasi-semimétrico o cuasimétrico.
p	norma y/o seminorma asimétrica.
$\overline{p}$	norma y/o seminorma asimétrica conjugada de p.
p^s	seminorma $máx\{p, \overline{p}\}$.
(X, p)	espacio normado o seminormado asimétrico.
(X, τ)	espacio topológico.
(X, τ_1, τ_2)	espacio bitopológico.
$\prec$	preorden.
$(X, \prec)$	conjunto preordenado

INTRODUCCIÓN

El área de estudio de esta tesis es la de los espacios bitopológicos, en ésta se estudian las relaciones entre dos topologías τ_1 y τ_2 definidas sobre un mismo conjunto. En 1963, Kelly, [22], define por primera vez los axiomas de separación para espacios bitopológicos, a éstos se les conoce como axiomas de separación por pares: T_0 por pares, T_1 por pares, Hausdorff por pares, regular por pares y normal por pares; tales conceptos generalizan los existentes para espacios topológicos, esto es, coinciden con ellos en el caso de que $\tau_1 = \tau_2$. En 2013, Ajoy Mukharjee, [19], menciona que es interesante analizar qué pasa con los τ_i-interiores de conjuntos τ_j-abiertos no vacíos, pues es posible que éstos sean vacíos. En su trabajo, Ajoy define los axiomas de separación por pares fuertemente, basados en interiores respecto a topologías distintas de conjuntos abiertos no vacíos y muestra la relación existente con los axiomas correspondientes por pares. También en ese mismo artículo, define la compacidad por pares fuerte, que además de ser una generalización de la correspondiente para espacios topológicos, implica la ya dada por Birsan en [3], y la dada por Fletcher en [9], para espacios bitopológicos. En este trabajo, se dan algunas caracterizaciones del concepto de normalidad por pares fuerte, las cuales son la base para las demostraciones de los principales resultados sobre la existencia de funciones bicontinuas que se establecen aquí.

En 1924, el matemático ruso Pavel Samuelovich Urysohn prueba un resultado importante que caracteriza a los espacios topológicos normales mediante la existencia de funciones continuas, esto es, prueba que un espacio topológico es normal si y sólo si, cada par de conjuntos cerrados disjuntos pueden ser separados por medio de una función continua. Posteriormente, Kelly en 1963, con su definición de normalidad por pares para espacios bitopológicos, prueba una generalización del famoso lema de Urysohn, ver [22]. Ahora, para la definición de normalidad por pares fuerte dada por Ajoy

Mukharjee, hemos probado la generalización de este lema, usando el concepto de función bicontinua, obteniendo así un resultado más fuerte que el dado por Kelly.

Katětov, en 1952, establece en [20] y [21] el resultado de que un espacio topológico (X, τ) es normal si y sólo si para cada par de funciones $f,\ g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, con f es semicontinua superiormente (usc), g semicontinua inferiormente (lsc) y $f \leq g$, existe una función continua $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \leq h \leq g$. Posteriormente en el año de 1967, Lane en [25] generaliza el teorema de Katětov para espacios bitopológicos: un espacio bitopológico (X, τ_1, τ_2) es normal por pares si y sólo si para cada par de funciones $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, con f τ_i-usc, g τ_j-lsc y $f \leq g$, existe una función $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ τ_i-lsc y τ_j-usc de tal forma que $f \leq h \leq g$. De igual forma que el lema de Urysohn, aquí mostramos la generalización del teorema de Katětov para la normalidad por pares fuerte dada por Ajoy Mukharjee. Estos resultados ya los hemos publicado en el artículo [16].

Es bien sabido que, existen diversas definiciones del concepto de compacidad para espacios bitopológicos, la cual también es llamada compacidad por pares. Algunos de los autores que trabajaron esta definición fueron Birsan, Swart, Fletcher, Datta, Hoyle and Patty, Kim, por mencionar algunos. Varios de estos conceptos resultaron ser equivalentes y esto lo mencionan Cooke en su artículo [6], parte del cual fue resultado de su tesis doctoral. Sin embargo, al menos dos de ellos resultaron ser generalizaciones de la compacidad, sin ser equivalentes. La compacidad por pares de Birsan, en [3], y la de Fletcher, en [9], resultan ser independientes, en el sentido de que hay ejemplos de espacios bitopológicos que cumplen con una de las definiciones, pero no la otra, por tal razón, estas dos han sido las que decidimos estudiar en este trabajo. Para la definición de Fletcher logramos probar cinco equivalencias de esta definición, análogas a las que se cumplen en espacios topológicos, concluyendo así que este concepto es el que mejor generaliza la compacidad para espacios bitopológicos.

Ajoy Mukharjee en su trabajo, [19], define también la compacidad por pares y muestra como ésta implica la compacidad de Birsan y la de Fletcher, entonces la llama compacidad por pares fuerte. Trabajamos también con este concepto en la tesis, sin embargo, no logramos agregar resultados nuevos a los que ya había dado Mukharjee.

En años recientes se han realizado muchos trabajos de análisis funcional, cuyo objetivo es extender resultados bien conocidos de la teoría clásica de espacios lineales normados al contexto de espacios lineales normados no simétricos, así como en conos normados asimétricamente. En particular, el dual de un espacio lineal normado asimétricamente ha sido construido y estudiado en [13]. En la misma referencia una versión asimétrica del celebre teorema de Alouglu ha sido probada (puede también ver [14]). En [12] y [26] la completación de un espacio normado asimétricamente ha sido explorada y una versión asimétrica del teorema sobre la acotación del operador conjugado en espacios normados de dimensión finita puede ser hallada en [10].

Resulta apropiado mencionar que conos cuasi-normados y otras estructuras no simétricas de Álgebra Topológica y Análisis Funcional, han sido exitosamente estudiadas y aplicadas en los últimos años a varios problemas de teoría de computación, teoría de aproximación y física (puede consultarse [2], [11] y [24]). Por estas razones, consideramos que para poder atacar algunos problemas del análisis no simétrico es necesario profundizar en los axiomas por pares en espacios bitopológicos, con la intención de que con los resultados obtenidos (como son las generalizaciones del Lema de Urysohn, Teorema de Katětov y caracterizaciones de la compacidad en un espacio bitopológico, los cuales son el principal aporte de esta tesis) se logre un mejor entendimiento de la estructura de los espacios cuasi-semimétricos (tipos especiales de los espacios bitopológicos). Estos espacios surgen en diferentes áreas de la modelación matemática, como en el análisis de complejidad de algoritmos en las Ciencias de la Computación, los espacios funcionales con normas asimétricas formados en la Teoría de Aproximación de funciones al intentar obtener un polinomio algebraico de dos variables reales que describa la superficie de un estrato de petróleo dado (donde se conocen valores aproximados de la función que describe tal superficie en puntos definidos por cierta cantidad de pozos de petróleo), etc.

A continuación se describirá brevemente el contenido de esta tesis:

En el primer capítulo se exponen algunos temas que se utilizarán en este trabajo, como es el Lema de Zorn, un breve resumen sobre filtros y un bosquejo de los principales conceptos y resultados de los espacios asimétricos.

En el segundo capítulo se estudian los axiomas de separación en espacios bitopológicos, tanto los dados por Kelly como los dados por Ajoy Muckarjee y se dan caracterizaciones de cada uno de ellos. Posteriormente, en el capítulo tres, damos una extensión del Lema de Urysohn y del Teorema de Katětov para la normalidad por pares fuerte. Finalmente en el capítulo cuatro se exponen tres conceptos de compacidad por pares, a saber: B-compacidad por pares, S-compacidad por pares y compacidad por pares fuerte; y se da un teorema de caracterización para la S-compacidad por pares, así como un ejemplo que muestra que no es posible obtener las mismas caracterizaciones con la B-compacidad por pares.

Capítulo 1

Preliminares

En diversas áreas de la matemática en las que se trabaja con colecciones con una determinada estructura, es esencial el dominio de al menos ciertos conceptos básicos de la Teoría de Conjuntos. Entre los conceptos mencionados tenemos: preordenes y órdenes en un conjunto, elemento maximal, axioma de elección y sus diferentes caracterizaciones, cubiertas, filtros, etc. En la primera parte de este capítulo intentamos dar un breve resumen de éstos, con el objetivo de hacer entendible el contenido de los demás capítulos

.

1.1. Lema de Zorn

Un resultado muy útil en la Teoría de Conjuntos es el llamado Lema de Zorn, el cual utilizaremos en este trabajo. Antes de enunciarlo, es necesario dar algunos conceptos previos a él. Iniciemos esta sección con lo que es un conjunto preordenado y algunas de sus variantes, así como los elementos o subconjuntos que sobresalen en ellos, por cumplir ciertas características.

Definición 1 *Sea A un conjunto, una relación $\prec$ es llamada un preorden si se cumple:*
a) Para todo $a \in A$, $a \prec a$,
b) Para todo $a, b, c \in A$, si $a \prec b$ y $b \prec c$, entonces $a \prec c$.
Si A tiene un preorden, al par $(A, \prec)$ se le llama conjunto preordenado.

Definición 2 *Sea $(A, \prec)$ un conjunto preordenado. Si la relación $\prec$ cumple la propiedad: para todo $a, b \in A$, si $a \prec b$ y $b \prec a$ implica que $a = b$, entonces a la relación $\prec$ se le llama un orden parcial y al par $(A, \prec)$ conjunto parcialmente ordenado.*

Elementos maximales, cotas inferiores y superiores, cadenas, etc. son conceptos clave en la Teoría de Conjuntos.

Definición 3 *Sean $(A, \prec)$ un conjunto parcialmente ordenado y $B \subset A$. Se tiene que:*

1) *un elemento $m \in A$ es llamado un elemento maximal de A si cada $a \in A$ no está relacionado con m o cumple que $a \prec m$.*

2) *$a_0 \in A$ es llamado una cota superior para el subconjunto B si cumple que para cada $b \in B - \{a_0\}$, se cumple que $b \prec a_0$.*

3) *B es llamada una cadena de A si cualesquiera dos elementos de B están relacionados.*

4) *Si A mismo es una cadena, entonces a $\prec$ se le llama un orden total y al par $(A, \prec)$ conjunto totalmente ordenado.*

Definición 4 *Un conjunto $(A, \prec)$ parcialmente ordenado es llamado bien ordenado si todo subconjunto no vacío de A tiene un primer elemento, esto es, si $B \subset A$ y $B \neq \emptyset$, entonces existe $b_0 \in B$ tal que $b_0 \prec b$, para todo $b \in B$.*

Nótese que todo conjunto bien ordenado es también totalmente ordenado.

Si $(A, \prec)$ es un conjunto bien ordenado y $w \notin A$, podemos construir sobre el conjunto $W = A \cup \{w\}$ un buen orden de la siguiente manera: Para $x \in A$, $x \prec w$ y $w \prec w$. Es claro que si $B \subset W$ es no vacío, entonces pueden suceder dos cosas, que $B = \{w\}$ o que $B \cap W \neq \emptyset$, en el primer caso, es claro que w es el primer elemento. Para el segundo caso, el primer elemento de B es el mismo que el de $B - \{w\} \subset A$, pues A es bien ordenado.

En un conjunto bien ordenado $(A, \prec)$, todo elemento de A que tiene un sucesor, tiene un sucesor inmediato, pues para $a \in A$, el conjunto

$B = \{x \in A : a \prec x, a \neq x\}$ es no vacío, y por estar en un conjunto bien ordenado existe un primer elemento s de B el cual cumple evidentemente que es un sucesor de a y no existe $c \in A$, con $c \neq a$, tal que $a \prec c \prec s$.

Existen tres postulados fundamentales en la teoría de conjuntos, los cuales resultan ser equivalentes, uno de ellos es de gran utilidad en este trabajo para obtener un resultado que consideramos importante. A continuación aparecen enunciados.

Axioma de Elección: Dada una familia no vacía $\{A_\alpha : \alpha \in \mathcal{L}\}$ de conjuntos no vacíos disjuntos a pares, existe un conjunto S consistente de exactamente un elemento de cada A_α.

Lema de Zorn: Sea X un conjunto preordenado. Si cada cadena en X tienen una cota superior, entonces X tiene al menos un elemento maximal.

Teorema de Zermelo: Todo conjunto puede ser bien ordenado.

La prueba del siguiente resultado es demasiado extensa para incluirla aquí, pero puede ser consultada en [8].

Teorema 1 *Los enunciados que acontinuación se enlistan son equivalentes:*
1) Axioma de elección.
2) Lema de Zorn.
3) Teorema de Zermelo.

1.2. Filtros

Antes de comenzar a trabajar con espacios bitopológicos, es necesario estudiar los conceptos de filtro y base de filtro, así como algunos resultados y conceptos referentes a ellos. Cabe mencionar que el primero que introdujo los conceptos de filtro y ultrafiltro fue F. Riez en 1908, en su artículo "Stetigkeitsbegriff und abstrakte mengenlehre.[en] [28], posteriormente Henry Cartan, en 1937, en [17] y [18], presentó estos conceptos con más claridad y los utilizó para reemplazar el papel de las sucesiones y usarlos en espacios más abstractos. Para mayor profundidad de este tema se puede consultar [8].

Definición 5 *Sean X un conjunto y $\mathbf{F}$ una colección de subconjuntos de X. La familia $\mathbf{F}$ es llamada un filtro sobre X si cumple:*

i) $\mathbf{F} \neq \emptyset$ *y* $\emptyset \notin \mathbf{F}$,

ii) Si $A_1, A_2 \in \mathbf{F}$, *entonces* $A_1 \cap A_2 \in \mathbf{F}$,

iii) Si $C \subset X$ *y* $A \in \mathbf{F}$ *es tal que* $A \subset C$, *entonces* $C \in \mathbf{F}$.

La propiedad *ii)* nos indica que la familia es cerrada bajo intersecciones finitas, mientras que la propiedad *iii)* indica que la familia contiene a los superconjuntos.

Ejemplo 1 *Sea X un conjunto no vacío, entonces $\mathbf{F} = \{X\}$ es un filtro sobre X, llamado filtro indiscreto o trivial.*

Ejemplo 2 *Sea X un conjunto no finito. Definamos*

$$\mathbf{F} = \{A \subset X : \ X - A \text{ es finito}\}.$$

Se tiene que $\mathbf{F}$ es un filtro sobre X llamado filtro cofinito.

Ejemplo 3 *Sean X un conjunto, $C \subset X$, no vacío y*

$$\mathbf{F}_C = \{A \subset X : \ C \subset A\}.$$

La familia $\mathbf{F}_C$ es un filtro sobre X llamado filtro principal del conjunto C sobre X.

Ejemplo 4 *Sean $(X, \boldsymbol{\tau})$ un espacio topológico y $x \in X$. La familia*

$$\mathbf{V}(x) = \{V \subset X \ : \ V \text{ es vecindad de } x\},$$

es un filtro sobre X llamado el filtro de vecindades de x.

Al igual que sucede al trabajar con otras estructuras matemáticas, como espacio vectorial, espacio topológico, por mencionar algunos, en lugar de trabajar con los filtros se puede trabajar con una colección "más pequeña"que proporcione la misma información que un filtro, tal concepto es llamado base de filtro.

Definición 6 *Sean X un conjunto y $\mathbf{B}$ una colección de subconjuntos de X no vacía. La familia $\mathbf{B}$ es llamada base de filtro para X si se cumplen las siguientes condiciones:*

$i)$ Para cada $A \in \mathbf{B}$, $A \neq \emptyset$,

y

$ii)$ Si $A_1, A_2 \in \mathbf{B}$, existe $A_3 \in \mathbf{B}$, tal que $A_3 \subset A_1 \cap A_2$

A continuación veamos algunos ejemplos de base de filtros.

Ejemplo 5 *Sea $(X, \boldsymbol{\tau})$ un espacio topológico y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en el espacio X. Al conjunto*

$$A_N = \{x_n : n \geq N\}, \quad N \in \mathbb{N}$$

se le llama una cola de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. La colección de colas $\{A_N : N \in \mathbb{N}\}$ es una base de filtro para X.

Ejemplo 6 *Sean $(X, \boldsymbol{\tau})$ un espacio topológico y $\mathbf{F}$ un filtro para X. El conjunto*

$$\bar{\mathbf{F}} = \{\ clA\ : A \in \mathbf{F}\},$$

es una base de filtro.

Observación 1 *Nótese que todo filtro, es una base de filtro y por tanto, todos los ejemplos anteriores de filtros nos sirven también como ejemplos de bases de filtros.*

Dada una base de filtro $\mathbf{B}$ en un conjunto X, la colección de todos los superconjuntos de $\mathbf{B}$ forman un filtro $\mathbf{F}(\mathbf{B})$ de X, llamado filtro generado por $\mathbf{B}$, en tal caso decimos que $\mathbf{B}$ es base de filtro para

$$\mathbf{F}(\mathbf{B}) = \{A \subset X : B \subset A, \text{ para algún } B \in \mathbf{B}\}.$$

Análogamente, si $\mathbf{F}$ es un filtro sobre X, $\mathbf{B} \subset \mathbf{F}$ es una base de filtro para $\mathbf{F}$, si para cada $F \in \mathbf{F}$, existe $A \in \mathbf{B}$ tal que $A \subset F$.

Si en un conjunto X, hay dos filtros $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$, tales que para cada $F \in \mathbf{F}$ se cumple que $F \in \mathbf{G}$, entonces denotaremos este hecho por $\mathbf{F} \subset \mathbf{G}$ o también por $\mathbf{G} \mapsto \mathbf{F}$, y en este caso se acostumbra decir que $\mathbf{G}$ es más fino que $\mathbf{F}$ o que $\mathbf{F}$ es más grueso que $\mathbf{G}$.

Definición 7 *Un filtro* $\mathbf{F}$ *sobre un conjunto* X *es llamado filtro maximal o ultrafiltro si no existe otro filtro* $\mathbf{G}$ *sobre* X *tal que* $\mathbf{F} \subset \mathbf{G}$.

Ejemplo 7 *Sean* X *un conjunto cualquiera y* $p \in X$, *la colección*

$$F_p = \{A \subset X : p \in A\},$$

es un ultrafiltro o filtro maximal de X.

La demostración del siguiente resultado puede consultarse en [4].

Teorema 2 *Sea* X *un conjunto. Si* $\mathbf{B}$ *es una base de filtro para* X *(respectivamente* $\mathbf{F}$ *un filtro), entonces existe un filtro maximal* $\mathbf{M}$ *que contiene a* $\mathbf{B}$ *(respectivamente a* $\mathbf{F}$*).*

El siguiente teorema que caracteriza a los filtros maximales puede ser consultado en [4].

Teorema 3 *Sea* X *un conjunto. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

a) $\mathbf{M}$ *es un filtro maximal.*

b) Para cada $E \subset X$ *tal que* $E \cap F \neq \emptyset$ *para todo* $F \in \mathbf{M}$ *implica que* $E \in \mathbf{M}$.

c) Si $E \subset X$, *entonces* $E \in \mathbf{M}$ *o* $E^c \in \mathbf{M}$.

d) Si $A, B \subset X$ *y* $A \cup B \in \mathbf{M}$, *entonces* $A \in \mathbf{M}$ *o* $B \in \mathbf{M}$.

Definición 8 *Sea* $(X, \boldsymbol{\tau})$ *un espacio topológico. Una base de filtro* $\mathbf{B}$ *(un filtro* $\mathbf{F}$*) para* X *se dice que converge a* $x \in X$, *si para toda vecindad* $V \in \mathbf{V}(x)$, *existe* $A \in \mathbf{B}$ $(F \in \mathbf{F})$ *tal que* $A \subset V$ $(F \subset V)$.

Si la base de filtro $\mathbf{B}$ converge al punto x, se acostumbra denotar ésto por $\mathbf{B} \to x$, análogamente $\mathbf{F} \to x$ para un filtro $\mathbf{F}$.

Definición 9 *Sea* $(X, \boldsymbol{\tau})$ *un espacio topológico y y* $x \in X$. *Dada* $\mathbf{B}$ *una base de filtro (*$\mathbf{F}$ *un filtro) para* X, *se dice que* x *es un punto de acumulación para* $\mathbf{B}$ $(\mathbf{F})$, *si para toda vecindad* $V \in \mathbf{V}(x)$, *y para todo* $A \in \mathbf{B}$ $(A \in \mathbf{F})$ *se cumple que* $V \cap A \neq \emptyset$.

Si la base de filtro $\mathbf{B}$ tiene a x como punto de acumulación, se acostumbra denotar por $\mathbf{B} \succ x$, análogamente para filtros $\mathbf{F} \succ x$.

Es fácil ver que la base de filtro $\mathbf{B}$ (filtro $\mathbf{F}$) tiene a x como un punto de acumulación si y sólo si $x \in \bigcap_{A \in B} \bar{A}$ (análogamente $x \in \bigcap_{A \in F} \bar{A}$). Nótese también que si una base de filtro $\mathbf{B}$ converge a x entonces también $\mathbf{B} \succ x$. Análogamente esto se cumple también para filtros.

1.3. Espacios asimétricos

La teoría de los espacios cuasi-métricos está en desarrollo desde mediados del siglo pasado, pero en forma acelerada desde hace unos veinte años; en ella se encuentran resultados análogos a los resultados clásicos para espacios métricos y normados; se han trasladado estas definiciones y resultados al caso de los espacios cuasi-métricos y normados asimétricos, principalmente. Como parte básica de esta sección, mencionamos los conceptos topológicos escenciales para la buena comprensión de los resultados obtenidos. Dichos conceptos son, por ejemplo: como los de bolas abiertas y cerradas, topología de las cuasi-semimétricas (normas asimétricas), etc. [1], [5], [10], [11], [12], [14], [15] y [22].

1.3.1. Espacios cuasi-métricos

Comenzaremos el estudio de los espacios asimétricos con la definición de cuasi-semimétrica.

Definición 10 *Una cuasi-semimétrica sobre un conjunto arbitrario* X *no vacío, es una función* $\rho : X \times X \longrightarrow [0, +\infty)$, *que satisface las condiciones siguientes*:

1) $\rho(x, x) = 0$;
2) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$, *para toda* $x, y, z \in X$.

Si para toda $x, y \in X$, ρ *cumple también:*
3) $\rho(x, y) = \rho(y, x) = 0$ *si y sólo si* $x = y$, *entonces* ρ *es llamada una cuasi-métrica.*

El par (X, ρ) recibe el nombre de espacio *cuasi-semimétrico*, respectivamente *cuasi-métrico*. La conjugada de una cuasi-semimétrica ρ, denotada por $\overline{\rho}$, es también una cuasi-semimétrica, ésta se define por $\overline{\rho}(x, y) = \rho(y, x)$, para cada $x, y \in X$, mientras que la función:

$$\rho^s(x, y) = máx\{\rho(x, y), \overline{\rho}(x, y)\},$$

para cada $x, y \in X$, es una semimétrica sobre X. Note que ρ^s es métrica si y sólo si ρ es una cuasi-métrica.

Las desigualdades siguientes son inmediatas de la definición.

$$\rho(y, x) \leq \rho^s(x, y) \quad \text{y} \quad \overline{\rho}(x, y) \leq \rho^s(x, y). \tag{1.1}$$

para cada $x, y \in X$.

Ejemplo 8 *En el conjunto de los números naturales* $\mathbb{N}$ *se define*

$$\rho(n, m) = \begin{cases} 0, & si \;\; n \leq m; \\ 1, & si \;\; n > m. \end{cases}$$

Se tiene que ρ es una cuasi-métrica. En efecto, $\rho(n,n) = 0$ para todo número natural n, y $\rho(n,m) \geq 0$. Veamos que se cumple la desigualdad triangular:

$$\textbf{\textit{Caso 1:}}\ \ n \leq m,\ \rho(n,m) = 0 \leq \begin{cases} 0+1 = \rho(n,r)+\rho(r,m), & n \leq m < r; \\ 0+0 = \rho(n,r)+\rho(r,m), & n < r < m; \\ 1+0 = \rho(n,r)+\rho(r,m), & r < n \leq m. \end{cases}$$

$$\textbf{\textit{Caso 2:}}\ n > m,\ \rho(n,m) = 1 \leq \begin{cases} 0+1 = \rho(n,r)+\rho(r,m), & m < n < r; \\ 1+1 = \rho(n,r)+\rho(r,m), & m < r < n; \\ 1+0 = \rho(n,r)+\rho(r,m), & r < m < n. \end{cases}$$

En cualquiera de los dos casos obtenemos que se cumple dicha desigualdad. Ahora, si $\rho(n,m) = \rho(m,n) = 0$, entonces $n \leq m$ y $m \leq n$. Por tanto $n = m$. Así, ρ es una cuasi-métrica. Ahora, no es difícil mostrar que:

$$\overline{\rho}(n,m) = \begin{cases} 0, & si \ \ n \geq m; \\ 1, & si \ \ n < m. \end{cases}$$

y que

$$\rho^s(n,m) = \begin{cases} 0, & si \ \ n = m; \\ 1, & si \ \ n \neq m. \end{cases}$$

Esto es, ρ^s es la métrica discreta.

1.3.2. Espacios normados asimétricamente

Análogamente como en las métricas, quitando la simetría en la definición de norma para un espacio lineal real, tenemos el siguiente concepto:

Definición 11 *Sea X un espacio lineal real. Una función $p : X \longrightarrow [0,+\infty)$ es una norma asimétrica sobre X, si para toda $x, y \in X$ y $r \geq 0$, se tiene que:*

1) $p(x) = p(-x) = 0$ *si y sólo si* $x = 0$;
2) $p(rx) = rp(x)$;
3) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

El par (X, p) recibe el nombre de espacio lineal asimétrico, espacio no simétrico o espacio normado asimétricamente. Si p sólo satisface las condiciones 2) y 3), entonces ésta es llamada una seminorma asimétrica, y el par (X, p), espacio seminormado asimétricamente. También en algunas instancias, el valor $+\infty$ podrá ser permitido para p, en cuyo caso p será una norma (seminorma) asimétrica extendida.

La conjugada de la seminorma asimétrica p se define por:

$$\overline{p}(x) = p(-x), \text{ para cada } x \in X,$$

y con ella se define también

$$p^s(x) = máx\{p(x), \overline{p}(x)\}, \text{ para cada } x \in X,$$

la cual resulta ser una seminorma llamada la seminorma asociada a p. La seminorma asimétrica p es una norma asimétrica si y sólo si, p^s es una norma sobre X. Algunos autores que trabajan con normas asimétricas denotan a éstas por el símbolo $\|\cdot|$, dicha notación que fue propuesta por Krein y Nudelman en [**?**], su libro sobre la teoría de momentos de Markov.

Una seminorma asimétrica p define una cuasi-semimétrica ρ_p sobre X, llamada la cuasi-semimétrica generada por p, mediante la fórmula:

$$\rho_p(x, y) = p(y - x), \text{ para cada } x, y \in X. \tag{1.2}$$

En este caso, las desigualdades (1.1) dan como consecuencia

$$p(x) \leq p^s(x) \quad \text{ y } \quad \overline{p}(x) \leq p^s(x), \text{ para toda } x \in X. \tag{1.3}$$

Las conjugadas de ρ y p con frecuencia son denotadas también por ρ^{-1} y p^{-1}, una notación que no usaremos en este trabajo.

Ejemplo 9 *En $\mathbb{R}$ la norma asimétrica definida por*

$$p(x) = \text{máx}\{0, x\}, \text{ para cada } x \in \mathbb{R},$$

tiene como cuasi-métrica asociada a

$$\rho_p(x, y) = p(y - x) = \text{máx}\{0, y - x\}.$$

A esta norma asimétrica también se le encuentra como:

$$u(x) = \begin{cases} x, & si \quad x \geq 0; \\ 0, & si \quad x < 0. \end{cases}.$$

La ausencia de simetría en la definición de espacios cuasi-métricos causa una gran cantidad de problemas, principalmente en lo que concierne a completez, compacidad y acotación total en tales espacios. La noción de convergencia para sucesiones en un espacio lineal normado se generaliza a espacios lineales normados asimétricamente en la forma que enseguida describimos.

Si (X, ρ) es un espacio cuasi-semimétrico, entonces para cada $x \in X$ y $r > 0$ se definen las bolas en X por:

$$\begin{aligned} B_\rho(x, r) &= \{y \in X : \rho(x, y) < r\} - \text{ bola abierta, y} \\ B_\rho[x, r] &= \{y \in X : \rho(x, y) \leq r\} - \text{ bola cerrada.} \end{aligned} \tag{1.4}$$

En el caso de un espacio seminormado asimétricamente (X, p), de (1.4) y de la definición de métrica generada por una norma, las bolas abiertas y cerradas[1] están dadas por:

$$B_p(x, r) = \{y \in X : p(y - x) < r\} \quad \text{y} \quad B_p[x, r] = \{y \in X : p(y - x) \leq r\},$$

respectivamente.

La topología τ_ρ de un espacio cuasi-semimétrico (X, ρ), al igual que para un espacio métrico, es definida partiendo de la familia $\nu_\rho(x)$ de τ_ρ-vecindades de un punto arbitrario $x \in X$:

[1] En realidad estas bolas son cerradas pero con respecto a la métrica conjugada $\overline{\rho}$. Puede consultar [5].

$$V \in \nu_\rho(x) \text{ si y sólo si, existe } r > 0,\ B_\rho(x,r) \subset V.$$

Un conjunto $G \subset X$ es τ_ρ-abierto si y sólo si G es una τ_ρ-vecindad de cada uno de sus puntos. La convergencia de una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a x con respecto a τ_ρ, es llamada ρ-convergencia y se denota por $x_n \xrightarrow{\rho} x$, ésta puede ser caracterizada de la forma siguiente:

$$x_n \xrightarrow{\rho} x \text{ si y sólo si } \rho(x,x_n) \to 0. \tag{1.5}$$

También:

$$x_n \xrightarrow{\overline{\rho}} x \text{ si y sólo si } \overline{\rho}(x,x_n) \to 0 \tag{1.6}$$

si y sólo si $\rho(x_n,x) \to 0$.

Y es claro que

$$x_n \xrightarrow{\rho^s} x \text{ si y sólo si } (x_n \xrightarrow{\rho} x \ \text{ y } \ x_n \xrightarrow{\overline{\rho}} x). \tag{1.7}$$

Usando la cuasi-semimétrica conjugada $\overline{\rho}$ se obtiene otra topología $\tau_{\overline{\rho}}$, una tercera es la topología τ_{ρ^s} generada por la semimétrica ρ^s. De esta forma, dado un espacio cuasi-semimétrico (seminormado asimétricamente) (X,ρ), con las topologías τ_ρ y $\tau_{\overline{\rho}}$ puede ser visto como un espacio bitopológico, en el sentido de Kelly [22], y con esto, todos los resultados válidos para un espacio bitopológico se pueden aplicar a un espacio cuasi-semimétrico, así como a un espacio normado asimétricamente.

Kelly define un espacio bitopológico simplemente como un conjunto X provisto de dos topologías τ_1 y τ_2, y se denota por (X,τ_1,τ_2). Un espacio bitopológico (X,τ_1,τ_2) es llamado cuasi-semimetrizable si existe una cuasi-semimétrica ρ tal que $\tau_1 = \tau_\rho$ y $\tau_2 = \tau_{\overline{\rho}}$. Si ρ es una semimétrica, entonces $\tau_2 = \tau_2$.

Definición 12 *Una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio lineal normado asimétricamente (X,p), se dice que converge a un elemento f en este espacio, si para todo $\varepsilon > 0$, existe una $N \in \mathbb{N}$, tal que para toda $n \geq N$ se tiene $p(f_n - f) < \varepsilon$. Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f, escribimos $f = \lim_p f_n$ o $f_n \xrightarrow{p} f$*
.

Decimos que una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio lineal normado asimétricamente (X,p) es una sucesión K-Cauchy por la izquierda (por la derecha), si dado $\varepsilon > 0$, existe una $N \in \mathbb{N}$, tal que para toda $n, m \in \mathbb{N}$, con $N \leq n \leq m$, se tiene $p(f_m - f_n) < \varepsilon$ (respectivamente, $p(f_n - f_m) < \varepsilon$), y que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es p^s-Cauchy si para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, para $n, m \geq n_0$, $p(f_n - f_m) < \varepsilon$. Es fácil verificar que cada sucesión convergente en un espacio normado asimétricamente es una sucesión p^s-Cauchy.

Un espacio cuasi-semimétrico (X,ρ) es llamado bicompleto si el espacio semimétrico (X,ρ^s) es completo. Un espacio (X,p) normado asimétricamente bicompleto es llamado bi-Banach.

Definición 13 *Dado (X,ρ) un espacio cuasi-métrico, se define en X una relación de orden como sigue: $x \leq_\rho y$ si y sólo si $\rho(x,y) = 0$.*

Afirmamos que $\leq_\rho$ es un orden parcial. En efecto, dado que $\rho(x,x) = 0$, implica que $x \leq_\rho x$ para toda $x \in X$, se concluye que $\leq_\rho$ es reflexivo.

Ahora, si $x \leq_\rho y$ y $y \leq_\rho z$, entonces $\rho(x,y) = 0$ y $\rho(y,z) = 0$. Luego $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z) = 0 + 0 = 0$, de aquí que $x \leq_\rho z$ y con esto $\leq_\rho$ es transitivo. Finalmente, para la antisimetría: si $x \leq_\rho y$ y $y \leq_\rho x$, entonces $\rho(x,y) = \rho(y,x) = 0$, lo que por definición de cuasi-métrica, se concluye que $x = y$.

Por tanto, $\leq_\rho$ es un orden parcial.

Definición 14 *Sea (X,ρ) un espacio cuasi-métrico y (Y,p) un espacio normado asimétricamente. Una función $f : X \to Y$ es llamada (ρ,p)-creciente o $\leq_{\rho,p}$-creciente si para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \leq_\rho y$ se cumple que $f(x) \leq_p f(y)$.*

Recordar que un espacio topológico (X,τ) es T_1 si para cualesquiera dos puntos distintos $x, y \in X$, existen $U, V \in \tau$ tales que $x \in U$, $y \notin U$ y $y \in V$, $x \notin V$.

Observación 2 *Si (X,τ_ρ) es T_1, entonces cualquier función $f : X \to Y$ es (ρ,p)-creciente. En efecto, si $x \leq_\rho y$, $\rho(x,y) = 0$, lo que provocaría que para cualquier $\varepsilon > 0$, $y \in B(x,\varepsilon)$ pero al ser (X,τ_ρ) un espacio T_1, obliga a que $x = y$ y por tanto $p(f(x) - f(y)) = p(0) = 0$. Así $f(x) \leq_p f(y)$.*

Dado (X,ρ) espacio cuasi-métrico y (Y,p) un espacio normado asimétricamente, denotemos por $Y^X_{(\rho,p)}$ al conjunto de todas funciones (ρ,p)-crecientes, esto es:

$$Y^X_{(\rho,p)} = \{f : X \to Y : \; f \quad \text{es} \; (\rho,p)\text{-creciente}\}.$$

Los ejemplos dados a continuación, muestran que $Y^X_{(\rho,p)}$ no es un espacio lineal, pero si tiene una estructura matemática conocida como cono.

Ejemplo 10 *Sean* $X = \{0,1,2\}$ *y* ρ *definida mediante:*

$$\rho(0,0) = \rho(0,1) = \rho(0,2) = \rho(1,1) = \rho(2,2) = 0,$$

$$\rho(1,0) = \rho(2,1) = 1$$

y

$$\rho(2,0) = 2.$$

Es fácil ver que ρ *es una cuasi-métrica. Ahora si* $Y = \mathbb{R}$, *con*

$$p(x) = u(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

se tiene la cuasi-métrica del Ejemplo 5. Sea $f : X \to Y$, *definida mediante* $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ *y* $f(2) = 2$. *Nótese que* $0 \leq_\rho 1$ *y*

$$p(f(0) - f(1)) = p(0-1) = 0,$$

$0 \leq_\rho 2$, *y*

$$p(f(0) - f(2)) = p(0-2) = 0,$$

$1 \leq_\rho 2$,

$$p(f(1) - f(2)) = p(1-2) = 0.$$

De aquí que f *es* (ρ,p)*-creciente. Sin embargo* $-f$ *no lo es, pues* $0 \leq_\rho 2$ *y*

$$p(-f(0) - (-f)(2)) = p(0+2) = 2.$$

así que $0 \leq_\rho 2$, *pero* $(-f(0)) \nleq_p (-f(2))$.

Ejemplo 11 *Sea* $X = \mathbb{R}$, *con la cuasi-métrica generada por* u, *esto es,* $\rho_u(x,y) = u(y-x)$, *y sea* $Y = \mathbb{R}$ *con la norma asimétrica* u. *Supongamos que* $f : X \to Y$ *es dada por* $f(n) = n$, *probemos que* f *es una función* (ρ_u, u)*-creciente.*

Si $x \leq_\rho y$, *entonces* $\rho_u(x,y) = 0$, *luego* $y \leq x$ *y*

$$u(f(y) - f(x)) = u(y-x) = 0.$$

Así, $f(x) \leq_\rho f(y)$.

Sin embargo, si $x \leq_\rho y$, $\rho_u(x,y) = 0$, *entonces* $y \leq x$, *pero* $u((-f)(y) - (-f)(x)) = u(y-x) = y - x \nleq 0$, *luego* $(-f)(x) \nleq_\rho (-f)(y)$. *Así,* f *es* (ρ_u, u)*-creciente, pero* $-f$ *no lo es.*

Definición 15 *Un cono es un conjunto* X *no vacío en el cual están definidas dos operaciones, una suma interna* $+ : X \times X \to X$ *y un producto por escalares,* $\cdot : \mathbb{R}^+ \times X \to X$ *tales que* $(X, +)$ *es un monoide abeliano y para cualesquiera* $r, s \in \mathbb{R}^+$ *y para todo* $x, y \in X$,*el producto por escalares satisface:*

1) $r(sx) = (rs)x$,
2) $r(x+y) = rx + ry$,
3) $(r+s)x = rx + sx$,
4) $1x = x$.

Definición 16 *Dado un cono* X, *una cuasi-norma en* X *es una función* $p : X \to \mathbb{R}^+$ *que satisface lo siguiente, para cualesquiera* $x, y \in X$ *y toda* $r \in \mathbb{R}^+$*:*

1) $p(rx) = rp(x)$,
2) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$,
3) Si existe $x \in X$ *tal que* $-x \in X$ *y* $p(x) = p(-x) = 0$, *entonces* $x = 0$.

Al par (X, p) *se le llama cono cuasi-normado.*

En caso de que se cumpla: $p(x) = 0$ *si y sólo si* $x = 0$, *al par* (X, p) *se le llama cono normado.*

En el Ejemplo 12 se muestra que el conjunto $Y^X_{(\rho,p)}$ en general no es un espacio lineal. Sin embargo es un cono. En efecto, sean $f, g \in Y^X_{(\rho,p)}$, si $x \leq_\rho y$, entonces $f(x) \leq_p f(y)$ y $g(x) \leq_p g(y)$. Luego para $\alpha \geq 0$,

$$\begin{aligned} p\left(\left(f+\alpha g\right)(x)-\left(f+\alpha g\right)(y)\right) &= p\left(\left(f(x)-f(y)\right)+\alpha\left(g(x)-g(y)\right)\right) \\ &\leq p\left(f(x)-f(y)\right)+\alpha p\left(g(x)-g(y)\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Así $\left(f+\alpha g\right)(x) \leq_p \left(f+\alpha g\right)(y)$. Por tanto, $f+\alpha g \in Y^X_{(\rho,p)}$, para toda $\alpha \geq 0$.

Capítulo 2

Espacios Bitopológicos

Como se ha mencionado en la introducción, el primero en hablar de los espacios bitopológicos fue Kelly, en [22], y fue el primero que introduce los axiomas de separación por pares, el término por pares es agregado para involucrar ambas topologías. Kelly sólo define espacios Hausdorff, regular y normal por pares, los conceptos T_0 y T_1 por pares surgieron después.

Definición 17 *Un conjunto X en el cual están definidas dos topologías τ_1 y τ_2 es llamado un espacio bitopológico y se denota por (X, τ_1, τ_2).*

Si (X, ρ) es un espacio cuasi-métrico, entonces X es un espacio bitopológico pues ρ y $\overline{\rho}$ generan dos topologías en X, las cuales son distintas si ρ no es simétrica.

En un espacio bitopológico (X, τ_1, τ_2), a los elementos de τ_i, $i = 1, 2$, los llamaremos τ_i-abiertos. Un conjunto F es τ_i-cerrado si es el complemento de un τ_i-abierto. Dado $A \subset X$, denotemos por $int_{\tau_i} A$ al interior de A respecto a la topología τ_i, y por $cl_{\tau_i} A$, a la clausura de A respecto a la topología τ_i.

En adelante, para referirnos en forma general a alguna de las topologías τ_1 o τ_2 se pondrá τ_i donde $i \in \{1, 2\}$, y si incluimos τ_j se entenderá que $i, j \in \{1, 2\}$ e $i \neq j$.

2.1. Axiomas de separación

Como se mencionó antes, Kelly en [22] sólo enuncia tres axiomas de separación por pares, en [27] aparecen los conceptos de T_0 y T_1 por pares, que a continuación presentamos:

Definición 18 *Un espacio bitopológico* (X, τ_1, τ_2) *es llamado* T_0 *por pares si para cada par de puntos distintos* $x, y \in X$ *existe un conjunto* τ_i *-abierto* U *tal que* $x \in U$ *e* $y \notin U$ *o existe* V τ_j *-abierto tal que* $y \in V$ *y* $x \notin V$.

Ejemplo 12 *El conjunto* $X = \{a, b, c\}$, *con las topologías*

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{a\}\}$$

y

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$$

es un espacio bitopológico T_0 *por pares.*

Teorema 4 *Sea* (X, ρ) *un espacio cuasi-semimétrico. El espacio bitopológico* $\left(X, \tau_\rho, \tau_{\bar{\rho}}\right)$ *es* T_0 *por pares si y sólo si* $\rho(x, y) > 0$, *para todo* $x, y \in X$, $x \neq y$.

Demostración. Supongamos que $\left(X, \tau_\rho, \tau_{\bar{\rho}}\right)$ es T_0 por pares y que existen $x, y \in X$, $x \neq y$, tales que $\rho(x, y) = 0$. Luego $y \in B_\rho(x, \varepsilon)$ y $x \in B_{\bar{\rho}}(y, \varepsilon)$, para todo $\varepsilon > 0$, esto contradice el hecho de que $\left(X, \tau_\rho, \tau_{\bar{\rho}}\right)$ sea T_0 por pares.

Recíprocamente, supongamos que siempre ocurre que $\rho(x, y) > 0$, para $x, y \in X$, $x \neq y$. Sean $x, y \in X$, con $x \neq y$. Para $\varepsilon = \frac{\rho(x,y)}{2}$, $y \notin B_\rho(x, \varepsilon) \in \tau_\rho$ y como $\bar{\rho}(y, x) = \rho(x, y)$, $x \notin B_{\bar{\rho}}(y, \varepsilon) \in \tau_{\bar{\rho}}$. Así $\left(X, \tau_\rho, \tau_{\bar{\rho}}\right)$ es T_0 por pares. ■

Definición 19 *El espacio* (X, τ_1, τ_2) *es llamado* T_1 *por pares si para cada par de puntos distintos* $x, y \in X$ *existen conjuntos* U τ_i *-abierto y* V τ_j *-abierto tales que* $x \in U$ *pero* $y \notin U$ *e* $y \in V$ *pero* $x \notin V$.

Claramente el Ejemplo 13 no es T_1 por pares, pues para b y c no existen τ_1 -abiertos que contenga a uno de ellos y al otro no.

Ejemplo 13 *Sea $X = \mathbb{R}$ con τ_1 como la topología usual y τ_2 la topología cofinita, esto es:*

$$\tau_2 = \{A \subset \mathbb{R} : \mathbb{R} - A \text{ es finito o } \emptyset\}.$$

La terna (X, τ_1, τ_2) es un espacio bitopológico T_1 por pares. En efecto, para $x, y \in \mathbb{R}$, el conjunto $\mathbb{R} - \{x\} \in \tau_2$ contiene a y pero no contiene a x, mientras que el conjunto $\left(x - \frac{|y-x|}{2}, x + \frac{|y-x|}{2}\right) \in \tau_1$ contiene a x y no a y. Análogamente, el conjunto $\left(y - \frac{|y-x|}{2}, y + \frac{|y-x|}{2}\right) \in \tau_1$, contiene a y, pero no a x, mientras que $x \in \mathbb{R} - \{y\} \in \tau_2$, pero no contiene a y.

2.1.1. Hausdorff por pares

El concepto siguiente es debido a Kelly.

Definición 20 *El espacio bitopológico (X, τ_1, τ_2) es Hausdorff por pares si para cualesquiera $x, y \in X$, $x \neq y$, existe U τ_i-abierto y V τ_j-abierto, tales que:*

$$x \in U, \; y \in V \quad y \quad U \cap V = \emptyset.$$

El Ejemplo 14 no es un espacio Hausdorff por pares, pues para $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, no existen τ_2-abiertos que contengan a a y no a b.

Ejemplo 14 *([19], Ejemplo 2.3, pág. 167) Sea $X = \mathbb{R}$, con τ_1 la topología usual y*

$$\tau_2 = \{\emptyset\} \cup \{U \cup (x, +\infty) : U \in \tau_1\}.$$

Dados $x, y \in X$, con $x < y$, sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $a < x < b < y < c$, pongamos

$$U_1 = (\alpha, b) \in \tau_1, \quad V_1 = (b, c) \cup (c, +\infty) \in \tau_2.$$

Claramente $x \in U_1$, $y \in V_1$ y $U_1 \cap V_1 = \emptyset$. De igual manera, haciendo

$$U_2 = (b, c) \in \tau_1, \quad V_2 = (a, b) \cup (c, +\infty) \in \tau_2$$

se cumple que $x \in V_2$, $y \in U_2$ y $U_2 \cap V_2 = \emptyset$. Por tanto (X, τ_1, τ_2) es Haudorff por pares.

El siguiente resultado nos habla de la relación existente entre los axiomas de separación T_0, T_1 y Hausdorff por pares en los espacios cuasi-semimétricos. Este resultado puede consultarse en [5] aunque su demostración no aparece en allí, la damos aquí para una mayor claridad.

Teorema 5 *En un espacio cuasi-semimétrico* (X, ρ)*, los siguientes enunciados son equivalentes:*
1) $\left(X, \tau_\rho, \tau_{\bar{\rho}}\right)$ *es* T_0 *por pares.*
2) $\left(X, \tau_\rho, \tau_{\bar{\rho}}\right)$ *es* T_1 *por pares.*
3) $\left(X, \tau_\rho, \tau_{\bar{\rho}}\right)$ *es Hausdorff por pares.*

Demostración.
1) $\Rightarrow$ **2)** Si $\left(X, \tau_\rho, \tau_{\bar{\rho}}\right)$ es T_0 por pares, entonces por el Teorema 4, $\rho(x,y) > 0$, para cualesquiera $x, y \in X$, con $x \neq y$. Para $x, y \in X$, con $x \neq y$, sea $\varepsilon = \frac{\rho(x,y)}{2} = \frac{\bar{\rho}(y,x)}{2}$, se tiene que $y \notin B_\rho(x, \varepsilon) \in \tau_\rho$ y $x \notin B_{\bar{\rho}}(y, \varepsilon) \in \tau_{\bar{\rho}}$.

Análogamente, para $\delta = \frac{\rho(y,x)}{2} = \frac{\bar{\rho}(x,y)}{2}$ se tiene que:

$$y \notin B_{\bar{\rho}}(x, \delta)$$

y

$$x \notin B_\rho(y, \delta).$$

Así que $\left(X, \tau_\rho, \tau_{\bar{\rho}}\right)$, es T_1 por pares.

2) $\Rightarrow$ **3)** Para $\varepsilon = mín\left\{\frac{\rho(x,y)}{2}, \frac{\bar{\rho}(x,y)}{2}\right\}$, $y \notin B_\rho(x, \varepsilon) \in \tau_\rho$ y

$$x \notin B_{\bar{\rho}}(y, \varepsilon) \in \tau_{\bar{\rho}},$$

además, si sponemos que $z \in B_\rho(x, \varepsilon) \cap B_{\bar{\rho}}(y, \varepsilon)$, entonces

$$\begin{aligned} \rho(x,y) &\leq \rho(x,z) + \rho(z,y) \\ &= \rho(x,z) + \bar{\rho}(y,z) \\ &< 2\varepsilon \\ &\leq \rho(x,y), \end{aligned}$$

De aquí $B_\rho(x, \varepsilon) \cap B_{\bar{\rho}}(y, \varepsilon) = \emptyset$. Así $\left(X, \tau_\rho, \tau_{\bar{\rho}}\right)$ es T_2 por pares.

3) $\Rightarrow$ **1**) Es inmediato. ■

En el siguiente resultado se incluyen algunas equivalencias que encontramos del concepto de Hausdorff por pares. Cabe mencionar que los incisos 3), 4) y 5), son de nuestra autoría, no los encontramos en alguno de los trabajos que revisamos.

Teorema 6 *Sea (X, τ_1, τ_2) un espacio bitopológico, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1) *X es de Hausdorff por pares.*

2) *Dada $x \in X$, para cada $y \in X$, $x \neq y$, existe*
   U τ_i -abierto tal que $x \in U$ y $y \notin cl_{\tau_j}(U)$.
3) *Para cada $x \in X$, se cumple:*

$$\cap \{cl_{\tau_i}(U) : x \in U, \quad U \quad \tau_j\text{-abierto}\} = \{x\}.$$

4) *En el espacio bitopológico $(X \times X, \tau_1 \times \tau, \tau_2 \times \tau_1)$,*
   el conjunto

$$\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$$

   es $\tau_i \times \tau_j$-cerrado en $X \times X$.
5) *Toda base de filtro convergente respecto a τ_i y a τ_j converge a un único elemento, respecto a τ_i y a τ_j.*

Demostración.
1) $\Rightarrow$ **2**) Dados $x, y \in X$ con $x \neq y$, existe U τ_i -abierto y V τ_j -abierto tales que:

$$x \in U, \quad y \in V \text{ y } U \cap V = \emptyset.$$

Claramente $y \notin X - V$, $X - V$ es τ_j -cerrado y $U \subset X - V$. Luego,

$$cl_{\tau_j} U \subset X - V.$$

Como $y \notin X - V$, se tiene que $y \notin cl_{\tau_j}(U)$.

2) $\Rightarrow$ **3**) Sea $x \in X$ y

$$A_x = \{U : x \in U, \; U \quad \tau_i \text{-abierto}\}.$$

Es claro que:

$$x \in \ \cap \left\{ cl_{\tau_j}(U) : U \in A_x \right\}.$$

Para cada $y \in X$, $y \neq x$, existe un conjunto U τ_i-abierto tal que $y \notin cl_{\tau_j}(U)$. Luego,

$$y \notin \cap \left\{ cl_{\tau_j}(U) : U \in A_x \right\}.$$

Por tanto, x es el único elemento de $\bigcap \left\{ cl_{\tau_j}(U) : U \in A_x \right\}$.

3) $\Rightarrow$ **1)** Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Si suponemos que se cumple 3), se tiene que:

$$\{x\} = \bigcap \left\{ cl_{\tau_j}(U) : x \in U, \quad U \quad \tau_i\text{-abierto} \right\}.$$

Por tanto

$$y \notin \bigcap \left\{ cl_{\tau_j}(U) : x \in U, \quad U \quad \tau_i\text{-abierto} \right\}.$$

Así existe U τ_i-abierto, con $x \in U$, y tal que $y \notin cl_{\tau_j}(U)$. Pongamos

$$V = X - cl_{\tau_j}(U),$$

se cumple que $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

2) $\Rightarrow$ **4)** Supongamos que se cumple 2), probemos que $(X \times X) - \Delta$ es $\tau_i \times \tau_j$-abierto. Sea $(x, y) \in (X \times X) - \Delta$. Luego $x \neq y$. Por 2), existe U τ_i-abierto tal que $x \in U$ y $y \notin cl_{\tau_j}(U)$. Luego $y \in X - cl_{\tau_j} U$, el cual es τ_j-abierto, así, el conjunto $\tau_i \times \tau_j$-abierto $U \times \left(X - cl_{\tau_j}(U)\right)$, cumple:

$$U \times \left(X - cl_{\tau_j}(U)\right) \subset (X \times X) - \Delta.$$

4) $\Rightarrow$ **1)** Sean $x, y \in X$, con $x \neq y$. Luego $(x, y) \notin (X \times X) - \Delta$, por el inciso 4) de este teorema, existe un $\tau_i \times \tau_j$-abierto $U \times V$ tal que $(x, y) \in U \times V$ con $U \times V \subset (X \times X) - \Delta$. Así, $x \in U, y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

1) $\Rightarrow$ **5)** Sea $\mathcal{F}$ una base de filtro convergente respecto a τ_i y a τ_j. Supongamos que $\mathcal{F}$ converge a x y a y respecto a τ_i y a τ_j. Supongamos $x \neq y$. Por hipótesis, existen U τ_1-abierto y V, τ_2-abierto tales que:

$$x \in U, \ y \in V \ \text{ y } \ U \cap V = \emptyset.$$

Por la convergencia de $\mathcal{F}$, existen $A, B \in \mathcal{F}$ tales que:

$$A \subset U \quad \text{y} \quad B \subset V.$$

Luego

$$A \cap B \subset U \cap V = \emptyset,$$

pero esto no puede ocurrir porque $A \cap B \in \mathcal{F}$. Por tanto, $x = y$.

5) $\Rightarrow$ **1)** Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Si X no es Hausdorff por pares, entonces para cualesquiera U τ_1-abierto y V τ_2-abierto tales que $x \in U$, $y \in V$ se cumple que $U \cap V \neq \emptyset$. Así la base de filtro $U(x) \cap V(x)$ es más fina que las bases $U(x)$ y $V(x)$. Pero $U(x)$ converge a x y $V(y)$ converge a y, por tanto se cumple que $U(x) \cap V(x)$ converge tanto a x como a y, pero por hipótesis , el límite es único, luego $x = y$, contradiciendo lo supuesto. Así, X es de Hausdorff por pares. ■

Nótese que si (X, τ_1, τ_2) es Hausdorff por pares, entonces por 3) del Teorema 6, cada punto $x \in X$ puede verse como un conjunto τ_i-cerrado. Además, es fácil ver que todo espacio Hausdorff por pares (X, τ_1, τ_2) cumple que tanto (X, τ_1) como (X, τ_2) son ambos espacios T_1.

2.1.2. Regularidad por pares

Otro de los conceptos dado por Kelly en [22] es el axioma de regularidad de una topología respecto a la otra, que a continuación se presenta.

Definición 21 *Sea (X, τ_1, τ_2) un espacio bitopológico. Se dice que τ_i es regular respecto a τ_j, si para cada punto $x \in X$ y para cada conjunto F τ_i-cerrado con $x \notin F$, existen U τ_i-abierto y V τ_j-abierto tales que $x \in U$, $F \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$.*

Definición 22 *Un espacio bitopológico (X, τ_1, τ_2) es regular por pares si τ_i es regular respecto a τ_j, para $i, j \in \{1, 2\}, i \neq j$.*

Ejemplo 15 *Consideremos el conjunto* $X = \{a, b, c\}$ *, con las topologías*

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{a\}\}$$

y

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}.$$

Nótese que $\{b, c\}$ *es el único* τ_1*-cerrado no trivial y* $a \notin \{b, c\}$, *claramente* $a \in \{a\} \in \tau_1$, $\{b, c\} \subset \{b, c\} \in \tau_2$ *e* $\{a\} \cap \{b, c\} = \emptyset$. *Por tanto,* τ_1 *es regular respecto a* τ_2, *sin embargo* τ_2 *no es regular respecto a* τ_1 *ya que* $\{a, c\}$ *es* τ_2*-cerrado y no existe un* τ_1*-abierto no trivial que lo contenga. Por tanto, no es regular por pares.*

Ejemplo 16 *Sea* $X = \{a, b, c\}$ *con las topologías:*

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{a\}\}$$

y

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{b, c\}\}.$$

El espacio (X, τ_1, τ_2) *es regular por pares.*

El siguiente resultado puede ser consultado en [29].

Teorema 7 *Sea* (X, τ_1, τ_2) *un espacio bitopológico. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1) *La topología* τ_i *es regular con respecto a* τ_j.

2) *Para cada punto* $x \in X$ *y cada un conjunto* U τ_i*-abierto que contiene a* x, *existe un conjunto* τ_i*-abierto* V *tal que*

$$x \in V \subset cl_{\tau_j}(V) \subset U.$$

3) *Para cada punto* $x \in X$ *y* C *un conjunto* τ_i*-cerrado que no contiene a* x, *existe un conjunto* τ_i*-abierto* V *tal que:*

$$x \in V \text{ y } cl_{\tau_j}(V) \cap C = \emptyset.$$

2.1.3. Normalidad por pares

Finalmente, el último axioma de separación dado en [22] es el siguiente:

Definición 23 *Un espacio bitopológico* (X, τ_1, τ_2) *se dice normal por pares si, dados un conjunto* F τ_i *-cerrado y* G τ_j *-cerrado con* $F \cap G = \emptyset$, *existe un conjunto* U, τ_j *-abierto y un conjunto* V, τ_i *-abierto tales que* $F \subset U$ *y* $G \subset V$ *y* $U \cap V = \emptyset$.

Ejemplo 17 *El conjunto* $X = \{a, b, c\}$ *,con las topologías:*

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{a\}\}$$

y

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{b, c\}\}$$

es normal por pares. En efecto, los únicos conjuntos cerrados con respecto a las topologías distintas son $F = \{b, c\}$ τ_1*-cerrado,* $G = \{a\}$ τ_2*-cerrado y claramente* $U = \{b, c\}$ *es* τ_2*-abierto,* $V = \{a\}$ *es* τ_1*-abierto y cumplen lo requerido.*

En el siguiente resultado se incluyen algunas equivalencias que encontramos en [23] y [29] del concepto de normalidad por pares, pero además estamos anexando 4) y 5) que nosotros hemos deducido.

Teorema 8 *En un espacio bitopológico* (X, τ_1, τ_2) *, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1) X *es normal por pares.*

2) *Para cada* $F \subset X$ τ_i *-cerrado y para cada* $U \subset X$ τ_j *-abierto, con* $F \subset U$, *existe* A τ_j *-abierto y* G τ_i *-cerrado tales que:*

$$F \subset A \subset G \subset U.$$

3) *Para cada* $F \subset X$ τ_i *-cerrado y para cada* $U \subset X$

τ_j -abierto, con $F \subset U$, existe A τ_j -abierto que cumple:

$$F \subset A \subset cl_{\tau_i} A \subset U.$$

4) *Para cada $F_1 \subset X$ τ_i -cerrado y $F_2 \subset X$ τ_j -cerrado con $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ existe un $U \subset X$ τ_j -abierto, cumpliendo:*

$$F_1 \subset U \quad y \quad F_2 \cap cl_{\tau_i} U = \emptyset.$$

5) *Para cada $F_1 \subset X$ τ_i -cerrado y $F_2 \subset X$ τ_j -cerrado con $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, existen $U \subset X$ τ_j -abierto, $V \subset X$ τ_i -abierto tales que:*

$$F_1 \subset U, F_2 \subset V \quad y \quad cl_{\tau_i} U \cap cl_{\tau_j} V = \emptyset.$$

Demostración.
1) $\Rightarrow$ **2)** Supongamos que X es normal por pares. Sean F, un conjunto τ_i -cerrado y U un conjunto τ_j -abierto tales que $F \subset U$. Así el conjunto $X - U$ es τ_j -cerrado y satisface:

$$(X - U) \cap F = \emptyset.$$

Luego, existen A τ_j -abierto y B τ_i -abierto tales que $F \subset A$, y $(X - U) \subset B$ con $A \cap B = \emptyset$. De aquí:

$$G = (X - B) \subset U.$$

Así pues, tenemos los conjuntos A τ_j -abierto y G τ_i -cerrado que satisfacen:

$$F \subset A \subset G \subset U.$$

2) $\Rightarrow$ **3)** Sean F τ_i -cerrado y U τ_j -abierto, con $F \subset U$. Por 2), existen conjuntos A τ_j -abierto y G τ_i -cerrado, que satisfacen:

$$F \subset A \subset G \subset U.$$

De aquí, $cl_{\tau_i}(A) \subset G$. Así, $F \subset A \subset cl_{\tau_i}(A) \subset U$.

3) $\Rightarrow$ **4)** Sea $F_1 \subset X$, τ_i-cerrado y sea $F_2 \subset X$, τ_j-cerrado con $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, entonces $X - F_2$ es τ_j-abierto y $F_1 \subset X - F_2$. Por 3), existe U, τ_j-abierto, que cumple:

$$F_1 \subset U \subset cl_{\tau_i}(U) \subset X - F_2.$$

Luego

$$F_2 \subset X - cl_{\tau_i}(U).$$

Por tanto, $F_1 \subset U$ y $F_2 \cap cl_{\tau_i}(U) = \emptyset$.

4) $\Rightarrow$ **5)** Sea $F_1 \subset X$ τ_i-cerrado y sea $F_2 \subset X$ τ_j-cerrado con $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Luego por 4), existe un $U \subset X$ τ_j-abierto, tal que $F_1 \subset U$ y $F_2 \cap cl_{\tau_i}(U) = \emptyset$. Análogamente, para F_2 y $cl_{\tau_i}(U)$ existe un $V \subset X$ τ_i-abierto tal que $F_2 \subset V$ y $cl_{\tau_i}(U) \cap cl_{\tau_j}(V) = \emptyset$.

5) $\Rightarrow$ **1)** Es inmediato. ∎

Recordemos que en un espacio topológico, la unión arbitraria de cerrados no necesariamente es un cerrado. Por lo anterior existen el concepto de conjuntos F_σ los cuales son intersecciones numerables (infinitas) de conjuntos cerrados, mientras que las intersecciones numerables de conjuntos abiertos son denotados por G_δ. Es fácil darse cuenta de que el complemento de un F_σ es un G_δ y que el complemento de un G_δ es un F_σ.

El resultado siguiente puede encontrarse en [5] y su demostración está basada en las equivalencias anteriores. Este resultado es clave en la generalización del teorema de Katětov en espacios bitopológicos.

Teorema 9 *Sea (X, τ_1, τ_2) un espacio bitopológico normal por pares. Sean $A, B \subset X$ tales que A es τ_1-F_σ, B es τ_2-F_σ y*

$$cl_{\tau_1}(A) \cap B = \emptyset = A \cap cl_{\tau_2}(B).$$

Entonces existe un conjunto U τ_2-abierto, con $A \subset U$ y un conjunto V τ_1-abierto, donde $B \subset V$ y tal que $U \cap V = \emptyset$. Más aún, estos conjuntos satisfacen también la relación:

$$A \subset U \subset cl_{\tau_1} U \subset X - B$$

y

$$B \subset V \subset cl_{\tau_2} V \subset X - A.$$

Demostración. Como A y B son conjuntos τ_1-F_σ y τ_2-F_σ respectivamente, podemos suponer que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, siendo cada uno de los A_n τ_1-cerrado y B_n τ_2-cerrado, para todo $n \in \mathbb{N}$. Aplicando el inciso 3) del Teorema 8 a A_1 y a $X - cl_{\tau_2}(B)$, existe un conjunto U_1 τ_2-abierto tal que

$$A_1 \subset U_1 \subset cl_{\tau_1} U_1 \subset X - cl_{\tau_2}(B).$$

Intercambiando τ_1 y τ_2, usando el mismo teorema, existe un conjunto V_1 τ_1-abierto tal que

$$B_1 \subset V_1 \subset cl_{\tau_2}(V_1) \subset X - cl_{\tau_1}(A).$$

Continuando de esta manera, se definen inductivamente los conjuntos U_n τ_2-abiertos y los conjuntos V_n τ_1-abiertos tales que:

$$\begin{aligned} A_n \cup cl_{\tau_1} U_1 \cup \cdots \cup cl_{\tau_1} U_{n-1} &\subset U_n \\ &\subset cl_{\tau_1} U_n \\ &\subset X - (cl_{\tau_2} B \cup cl_{\tau_2} V_1 \cup \cdots \cup cl_{\tau_2} V_{n-1}). \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} B_n \cup cl_{\tau_2} V_1 \cup \cdots \cup cl_{\tau_2} V_{n-1} &\subset V_n \\ &\subset cl_{\tau_2}(V_n) \\ &\subset X - (cl_{\tau_1} A \cup cl_{\tau_1} U_1 \cup \cdots \cup cl_{\tau_1} U_{n-1}), \end{aligned}$$

para todo número natural n, donde por conveniencia podemos tomar a $U_0 = V_0 = \emptyset$.

Sea $U = \bigcup_{i=0}^{\infty} U_i$. Note que U es τ_2-abierto, mientras que $V = \bigcup_{i=0}^{\infty} V_i$ es τ_1-abierto y

$$A \subset U,\ B \subset V \ \text{ y } \ U \cap V = \emptyset. \tag{2.1}$$

Dado que V es τ_1-abierto, de (2.1) se sigue que:

$$cl_{\tau_1}\ (U) \cap V = \emptyset,$$

así que $cl_{\tau_1}\ (U) \cap B = \emptyset$, esto es,

$$cl_{\tau_1}\ (U) \subset X - B.$$

Análogamente se obtiene $B \subset V \subset cl_{\tau_2}\ (V) \subset X - A$. ■

2.2. Axiomas de separación por pares fuerte

En el 2013, Ajoy Mukharjee, en [19], define los axiomas de separación fuerte aprovechando el hecho de tener dos topologías fijas en un mismo espacio y que posiblemente los interiores respecto a topologías contrarias pudieran ser vacíos. Analizaremos los conceptos dados por Mukharjee, mencionaremos algunos resultados que ya existían y otros que hemos obtenido análogos a los que se han mencionado en la sección anterior.

Antes de comenzar con los axiomas de separación dado por Mukharjee, se enunciará un concepto importante dado también en [19].

Definición 24 *Sea (X, τ_1, τ_2) un espacio bitopológico. Un subconjunto A de X es (τ_i, τ_j)-dualmente abierto si existe un τ_j-abierto B, tal que:*

$$A = int_{\tau_i}\,(B)\,.$$

Análogamente, un subconjunto C de X es (τ_i, τ_j)-dualmente cerrado, si existe un τ_j-cerrado D, tal que $C = cl_{\tau_i}\,(D)\,.$

En general no se tiene que con esta clase de conjuntos se pueda obtener una topología, pues con el siguiente ejemplo mostramos que la unión finita de conjuntos dualmente abiertos, no necesariamente vuelve a ser un conjunto del mismo tipo.

Ejemplo 18 *Sea* $X = \mathbb{R}$, *para* $a \in \mathbb{R}$ *fijo, consideremos las topologías*

$$\tau_1 = \{\mathbb{R}, \emptyset, (-\infty, a), [a, +\infty)\}$$

y

$$\tau_2 = \{\mathbb{R}, \emptyset, (-\infty, a), (a, +\infty), \mathbb{R} - \{a\}\}.$$

Nótese que $(a, +\infty)$ *es* (τ_2, τ_1)*-dualmente abierto pues* $[a, +\infty)$ *es* τ_1*-abierto y* $(a, +\infty) = int_{\tau_2}[a, +\infty)$. *De la misma manera, se tiene que* $(-\infty, a)$ *es también* (τ_2, τ_1)*-dualmente abierto, sin embargo,* $(-\infty, a) \cup (a, +\infty)$ *no lo es.*

2.2.1. Hausdorff por pares fuertemente

Definición 25 *Un espacio bitopológico* (X, τ_1, τ_2) *se dice Hausdorff por pares fuertemente, si para cada par de puntos* $x, y \in X$, $x \neq y$, *existe* U τ_i*-abierto y* V τ_j*-abierto, tales que*

$$x \in int_{\tau_j} U, \; y \in int_{\tau_i} V \;\; y \;\; U \cap V = \emptyset.$$

Ejemplo 19 *([19], Ejemplo 2.2, pág. 167) Sea* $X = \mathbb{R}$, *con* τ_1 *la topología usual y* τ_2 *la topología generada por los intervalos de la forma* $(a, b]$, *con* $a, b \in \mathbb{R}$. *A ésta topología se le llama topología del límite superior.*
Dados $x, y \in X$, *con* $x < y$, *sean* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *tales que* $a < x < b < y < c$, *pongamos* $U_1 = (a, b) \in \tau_1$, $V_1 = (b, c] \in \tau_2$. *Claramente* $x \in int_{\tau_2}(U_1)$, $y \in int_{\tau_1}(V_1)$ *y* $U_1 \cap V_1 = \emptyset$. *De igual manera, haciendo* $U_2 = (b, c) \in \tau_1$, $V_2 = (a, b] \in \tau_2$ *se cumple que* $x \in int_{\tau_1}(V_2)$, $y \in int_{\tau_2}(U_2)$ *y* $U_2 \cap V_2 = \emptyset$. *Por tanto* (X, τ_1, τ_2) *es Haudorff por pares fuertemente.*

Nótese que si (X, τ_1, τ_2) es Hausdorff por pares fuertemente, entonces es Hausdorff por pares según Kelly. Sin embargo, lo contrario no es cierto, como lo muestra el ejemplo siguiente.

Ejemplo 20 *Sea* $X = \mathbb{R}$, *con las topologías del Ejemplo 14,* τ_1 *la usual y*

$$\tau_2 = \{\emptyset\} \cup \{U \cup (x, +\infty) : x \in \mathbb{R}, \; U \in \tau_1\}.$$

Probamos ya que $(\mathbb{R}, , \tau_1, \tau_2)$ *es Hausdorff por pares, sin embago no es Hausdorff por pares fuertemente, pues si* $x < y$, *entonces cualquier intevalo* $(\alpha, b) \in \tau_1$, *con* $x \in (\alpha, b)$, *tendrá interior vacío respecto a la topología* τ_2.

Con los dos ejemplos anteriores, tenemos que estos conceptos no son equivalentes.

Una de las intenciones de este trabajo, fue la de obtener equivalencias de los conceptos dados por Mukharjee, análogos a los que mostramos en la sección 2.1, para los axiomas de separación dados por Kelly. Cabe resaltar que estas equivalencias no se encuentran en [19] ni en algún otro artículo sobre el tema, según nuestra búsqueda. El siguiente resultado es análogo al Teorema 6, en el sentido de que incluye caracterizaciones de este axioma.

Teorema 10 *Sea* (X, τ_1, τ_2) *un espacio bitopológico, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1) *X es de Hausdorff por pares fuertemente.*

2) *Dado* $x \in X$ *, para cada* $y \in X$, $x \neq y$ *, existe* U τ_i*-abierto tal que:*

$$x \in int_{\tau_j}(U) \quad y \quad y \notin cl_{\tau_i}\left(cl_{\tau_j} U\right)$$

3) *Para cada* $x \in X$, *se cumple que:*

$$\cap \left\{ cl_{\tau_i}\left(cl_{\tau_j}(U)\right) : x \in U, \quad U \ \tau_i\text{-}abierto \right\} = \{x\}.$$

4) *El conjunto* $(X \times X) - \Delta$ *es la unión arbitraria de subconjuntos* A, $(\tau_j \times \tau_i, \tau_i \times \tau_j)$*-dualmente abiertos, para los cuales* $A = int_{\tau_j \times \tau_i} W$, *con* $W \subset (X \times X) - \Delta$, $\tau_i \times \tau_j$*-abierto, donde*

$$\Delta = \{(x, x) : x \in X\} \subset (X \times X, \tau_i \times \tau_j, \tau_j \times \tau_i)$$

Demostración.
1) $\Rightarrow$ **2)** Supongamos que se cumple 1), sea $x \in X$, para cada $y \in X$, con $x \neq y$, existe U, τ_i-abierto y V, τ_j-abierto, tales que:

$$x \in int_{\tau_j} U, \ y \in int_{\tau_i} V \ \text{ y } \ U \cap V = \emptyset.$$

Como $U \subset X - V$ con $X - V$ τ_j-cerrado, se tiene que $cl_{\tau_j}(U) \subset X - V$, pero $int_{\tau_i}(V) \subset V$ luego $X - V \subset X - int_{\tau_i}(V)$ siendo éste último τ_i-cerrado, de aquí $cl_{\tau_i}\left(cl_{\tau_j}(U)\right) \subset X - int_{\tau_i}(V)$, como $int_{\tau_i}(V) \cap int_{\tau_j}(U) = \emptyset$, concluímos que $y \notin cl_{\tau_i}\left(cl_{\tau_j}(U)\right)$.

2) $\Rightarrow$ **3**) Sea $x \in X$, consideremos

$$M = \cap \left\{ cl_{\tau_i} \left(cl_{\tau_j}(U) \right) : x \in U, \quad U \ \tau_i\text{-abierto} \right\}.$$

Claramente $x \in M$, y para $y \neq x$,existe U τ_i-abierto tal que $x \in A$ con $y \notin cl_{\tau_i}\left(cl_{\tau_j}(A)\right)$, luego $y \notin M$. Por tanto $M = \{x\}$.

3) $\Rightarrow$ **4**) Sean $(x, y) \in (X \times X) - \mathbf{\Delta}$, $x \neq y$, por 3) existe U τ_i-abierto tal que $x \in int_{\tau_j}(U)$ y $y \notin cl_{\tau_i}\left(cl_{\tau_j}(U)\right)$, luego:

$$y \in X - cl_{\tau_i}\left(cl_{\tau_j}(U)\right) = int_{\tau_i}\left(X - cl_{\tau_j}(U)\right).$$

Sea $V = X - cl_{\tau_j}(U)$, V es τ_j-abierto y

$$(x, y) \in int_{\tau_j}(U) \times int_{\tau_i}(V) = int_{\tau_j \times \tau_i}(U \times V).$$

Dado que $U \subset cl_{\tau_j}(U)$, se tiene que $V = X - cl_{\tau_j}(U) \subset X - U$, por tanto $V \cap U = \emptyset$; obteniendo que $U \times V \subset (X \times X) - \mathbf{\Delta}$. Así, si tomamos $(x, y) \in (X \times X) - \Delta$, $x \neq y$, existen U τ_i-abierto, V τ_j-abierto, tales que $x \in int_{\tau_j}(U)$, $y \in int_{\tau_i}(V)$ y $U \cap V = \emptyset$. De donde $(U \times V) \cap \Delta = \emptyset$. Luego,

$$(x, y) \in int_{\tau_j}(U) \times int_{\tau_i}(V) \subset U \times V \subset (X \times X) - \Delta,$$

pero:

$$int_{\tau_j}(U) \times int_{\tau_i}(V) = int_{\tau_j \times \tau_i}(U \times V).$$

Haciendo $A = int_{\tau_j \times \tau_i}(U \times V)$, tenemos que A es $(\tau_j \times \tau_i, \tau_i \times \tau_j)$-dualmente abierto. Por tanto, $(X \times X) - \Delta$ es unión de conjuntos dualmente abiertos.

4) $\Rightarrow$ **1**) Si $x, y \in X$, $x \neq y$, entonces $(x, y) \in (X \times X) - \Delta$ luego existe A $(\tau_j \times \tau_i, \tau_i \times \tau_j)$-dualmente abierto tal que $(x, y) \in A = int_{\tau_j \times \tau_i}(U \times V)$, con $U \times V$ $\tau_i \times \tau_j$-abierto y $U \times V \subset (X - \Delta)$. De lo anterior, claramente se tiene que $x \in int_{\tau_j}(U)$, $y \in int_{\tau_i}(V)$ y $U \cap V = \emptyset$. ■

2.2.2. Regularidad por pares fuertemente

La regularidad fuerte por pares podría definirse inicialmente como:

Ün espacio bitopológico (X, τ_1, τ_2), se dice que es regular por pares fuertemente, si para cada F τ_i-cerrado, y para cada $x \in X$, con $x \notin F$, existe un τ_j-abierto V y un τ_i-abierto W tales que $F \subset int_{\tau_i}(V)$ y $x \in int_{\tau_j}(W)$, con $W \cap V = \emptyset$."

Sin embargo, los espacios bitopológicos (X, τ_1, τ_2) que satisfacen esta condición en realidad son espacios cuyas topologías son iguales, esto es, $\tau_1 = \tau_2$. Por esta razón, Ajoy Mukharjee define la regularidad por pares de la siguiente manera:

Definición 26 *Un espacio bitopológico (X, τ_1, τ_2), se dice que es regular por pares fuertemente, si para cada F τ_i-cerrado, y para cada $x \in X$, con $x \notin F$, existe un τ_j-abierto V y un τ_i-abierto W tales que $F \subset int_{\tau_i}(V)$ y $x \in W$, con $W \cap V = \emptyset$.*

Ejemplo 21 *([19], Ejemplo 2.4, pág. 168) Para $X = \mathbb{R}$, τ_1 la topología del limite superior dada en el Ejemplo 19; τ_2 la topología generada por los intervalos de la forma $[a, b)$ con $a, b \in \mathbb{R}$, llamada la topología del límite inferior.*

Verifiquemos que este espacio bitopológico es regular por pares fuertemente. Sean $x \in \mathbb{R}$, F un conjunto τ_1-cerrado, con $x \notin F$, como τ_1 está generada por los intervalos de la forma $(a, b]$ y $\mathbb{R} - F \in \tau_1$, existe una colección $\mathcal{L}$ de subintervalos de la forma $(a, b]$, tales que:

$$\mathbb{R} - F = \bigcup \{(a, b] : (a, b] \in \mathcal{L}\}.$$

Dado que $x \notin F$, existe $(a_0, b_0] \in \mathcal{L}$ tal que $x \in (a_0, b_0]$. Escojamos $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que $a_0 < \alpha < x \leq b_0$ y hagamos $U = (\alpha, b_0]$, el cual, claramente cumple que $x \in U \in \tau_1$. Por otro lado, si definimos

$$V = (-\infty, \alpha) \cup (b_0, \infty) \in \tau_i, \ i = 1, 2,$$

éste claramente cumple que $F \subset int_{\tau_1} V = V$ con $U \cap V = \emptyset$. Si F fuese τ_2-cerrado, con $x \notin F$, existe una colección $\mathcal{F}$ de subintervalos de la forma $[a, b)$, tales que

$$\mathbb{R} - F = \bigcup \{[a, b) : [a, b) \in \mathcal{F}\}.$$

Dado que $x \notin F$, existe $[a_0, b_0) \in \mathcal{F}$ tal que $x \in [a_0, b_0)$. Escojamos $\beta \in \mathbb{R}$, tal que $a_0 \leq x < \beta < b_0$ y hagamos

$$U = [a_0, \beta), \quad V = (-\infty, a_0) \cup (\beta, \infty) \in \tau_i, \ i = 1, 2.$$

Estos conjuntos claramente cumplen que $x \in U \in \tau_2$, $F \subset int_{\tau_2} V = V$ con $U \cap V = \emptyset$. Por tanto, $(\mathbb{R}, \tau_1, \tau_2)$ es regular por pares fuertemente.

El siguiente resultado, fue producto nuestro al intentar obtener un teorema de caracterización de la regularidad por pares fuerte, análogo al Teorema 7 y el cual no aparece en el artículo del creador de este concepto, [19].

Teorema 11 *Sea (X, τ_1, τ_2) un espacio bitopológico. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1) *X es regular por pares fuertemente.*
2) *Para cada $x \in X$ y U τ_i-abierto, con $x \in U$, existe W τ_i-abierto y C τ_j-cerrado tal que:*

$$x \in W \subset C \subset cl_{\tau_i} C \subset U.$$

3) *Para cada $x \in X$ y U τ_i-abierto, con $x \in U$, existe un conjunto W τ_i-abierto tal que:*

$$x \in W \subset cl_{\tau_i} W \subset cl_{\tau_j} \left(cl_{\tau_i} (W) \right) \subset U.$$

Demostración.
1) $\Rightarrow$ **2)** Sea $x \in X$ y U τ_i-abierto, con $x \in U$. Como $X - U$ es τ_i-cerrado y $x \notin X - U$, entonces existen existe W τ_i-abierto y V τ_j-abierto tales que $X - U \subset int_{\tau_i} (V)$ y $x \in W$ con $W \cap V = \emptyset$. De aquí que:

$$W \subset X - V \subset X - int_{\tau_i} (V) = cl_{\tau_i} (X - V) \subset U.$$

Pongamos $C = X - V$, el cual es claramente τ_j-cerrado, con esto se concluye que:

$$x \in W \subset C \subset cl_{\tau_i} (C) \subset U.$$

2) $\Rightarrow$ **1)** Supongamos que F es τ_i-cerrado y para cada $x \in X$, con $x \notin F$, se tiene que $x \in X - F$. Por 2), existe W τ_i-abierto y C τ_j-cerrado tal que $x \in W \subset C \subset cl_{\tau_i}(C) \subset X - F$. La última contención implica que $F \subset X - cl_{\tau_i}(C) = int_{\tau_i}(X - C)$. Sea $V = X - C$, el cual claramente es τ_j-abierto y cumple que:

$$W \cap V \subset W \cap (X - W) = \emptyset.$$

1) $\Rightarrow$ **3)** Dados $x \in X$ y U τ_i-abierto, con $x \in U$. Por 2), existen V τ_i-abierto y C τ_j-cerrado tales que $x \in V \subset C \subset cl_{\tau_i}(C) \subset U$. Hagamos $W = int_{\tau_i}(C)$, el cual es distinto del vacío, es τ_i-abierto y claramente:

$$x \in W \subset cl_{\tau_i}(W) \subset cl_{\tau_j}(cl_{\tau_i}(W)) \subset U.$$

3) $\Rightarrow$ **1)** Sean $x \in X$ y F τ_i-cerrado, con $x \notin F$, por 3), existe un conjunto W τ_i-abierto tal que

$$x \in W \subset cl_{\tau_i}(W) \subset cl_{\tau_j}(cl_{\tau_i}(W)) \subset X - F.$$

Así, $x \in W$, $F \subset int_{\tau_i}(X - cl_{\tau_i}(W))$ y

$$(X - cl_{\tau_i}(W)) \cap W = int_{\tau_i}(X - W) \cap W = \emptyset.$$

Por tanto, (X, τ_1, τ_2) es regular por pares. ■

2.2.3. Normalidad por pares fuertemente

El último axioma de separación dado por Ajoy Mukharjee en [19], es la normalidad por pares. Hemos obtenido una caracterización para este concepto, el cual es análogo al Teorema 8, el cual fue necesario para obtener una generalización del Teorema 9, y que es la base para la generalización del Teorema de Katětov que se trabajará en el siguiente capítulo.

A continuación enunciamos la definición de normalidad por pares fuertemente y enseguida el resultado análogo al Teorema 8.

Definición 27 *Un espacio bitopológico* (X, τ_1, τ_2), *se dice que es normal por pares fuertemente, si para cada par de subconjuntos* F τ_i*-cerrado y* G τ_j*-cerrado, con* $F \cap G = \emptyset$, *existe un* τ_j*-abierto* U *y un* τ_i*-abierto* V *tales que* $F \subset int_{\tau_i}U$ *y* $G \subset int_{\tau_j}V$ *con* $U \cap V = \emptyset$.

Teorema 12 *En un espacio bitopológico* (X, τ_1, τ_2), *los siguientes enunciados son equivalentes:*

1) (X, τ_1, τ_2) *es normal por pares fuertemente.*
2) *Para cada* F τ_i*-cerrado y* U τ_j*-abierto, con* $F \subset U$, *existen* W τ_j*-abierto y* D τ_i*-cerrado tales que:*
$$F \subset int_{\tau_i}W \subset W \subset D \subset cl_{\tau_j}D \subset U. \tag{2.2}$$
3) *Para cada* F τ_i*-cerrado y* U τ_j*-abierto, con* $F \subset U$, *existe* W τ_j*-abierto, tal que*
$$F \subset int_{\tau_i}W \subset cl_{\tau_i}W \subset cl_{\tau_j}\left(cl_{\tau_i}W\right) \subset U. \tag{2.3}$$
4) *Para cada par de conjuntos* F τ_i*-cerrado y* G τ_j*-cerrado, con* $F \cap G = \emptyset$, *existe un* τ_j*-abierto* W *tal que*
$$F \subset int_{\tau_i}W \quad y \quad G \cap cl_{\tau_j}\left(cl_{\tau_i}W\right) = \emptyset.$$

Demostración.
1) $\Rightarrow$ **2)** Supongamos que (X, τ_1, τ_2) es normal por pares fuertemente, sean F τ_i-cerrado y U τ_j-abierto, con $F \subset U$. Como $X - U$ es τ_j-cerrado, y $F \cap (X - U) = \emptyset$, existen W τ_j-abierto, V τ_i-abierto tales que $F \subset int_{\tau_i}W$ y $X - U \subset int_{\tau_j}V$ con $W \cap V = \emptyset$. De lo anterior,
$$cl_{\tau_j}(X - V) = X - int_{\tau_j}V \subset U$$
y
$$int_{\tau_j}V \subset V \subset X - W \subset X - int_{\tau_i}W \subset X - F.$$
Luego $F \subset int_{\tau_i}W \subset W \subset X - V \subset X - int_{\tau_j}V = cl_{\tau_j}(X - V) \subset U$. Haciendo $D = X - V$, el cual claramente es τ_i-cerrado, se obtiene el resultado.

2) $\Rightarrow$ **3)** Sea F τ_i-cerrado, U τ_j-abierto, con $F \subset U$, como $X - U$ es τ_j-cerrado y $F \cap (X - U) = \emptyset$, por 2), existe W τ_j-abierto y D τ_i-cerrado tales que $F \subset int_{\tau_i} W \subset W \subset D \subset cl_{\tau_j} D \subset U$. Dado que D es τ_i-cerrado $cl_{\tau_i} W \subset D \subset cl_{\tau_j} D$, luego $cl_{\tau_j}(cl_{\tau_i} W) \subset cl_{\tau_j} D \subset U$. Esto implica

$$F \subset int_{\tau_i} W \subset cl_{\tau_i} W \subset cl_{\tau_j}(cl_{\tau_i} W) \subset U.$$

3) $\Rightarrow$ **4)** Sean F τ_i-cerrado, G τ_j-cerrado, tales que $F \cap G = \emptyset$, luego $F \subset X - G$ el cual es τ_j-abierto. Por 3), existe W τ_j-abierto, tal que $F \subset int_{\tau_i} W \subset cl_{\tau_i} W \subset cl_{\tau_j}(cl_{\tau_i} W) \subset X - G$, luego $G \subset X - cl_{\tau_j}(cl_{\tau_i} W)$, de aquí que $G \cap cl_{\tau_j}(cl_{\tau_i} W) = \emptyset$.

4) $\Rightarrow$ **1)** Supongamos que se cumple 4). Sean F τ_i-cerrado y G τ_j-cerrado, tales que $F \cap G = \emptyset$. Por hipótesis, existe W τ_j-abierto tal que $F \subset int_{\tau_i} W$ y $G \cap cl_{\tau_j}(cl_{\tau_i} W) = \emptyset$. Luego $G \subset int_{\tau_j}(X - cl_{\tau_i} W)$. Tomando $V = X - cl_{\tau_i} W$, el cual es τ_i-abierto, se cumple que $V \cap W \subset (X - W) \cap W = \emptyset$. ■

Ejemplo 22 *([19], Ejemplo 2.5, pág. 168) Consideremos al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, para $a \in \mathbb{R}$, fijo, consideremos las topologías*

$$\tau_1 = \{\mathbb{R}, \emptyset, (-\infty, a), [a, +\infty)\},$$

$$\tau_2 = \{\mathbb{R}, \emptyset, \mathbb{R} - \{a\}, (-\infty, a), (-\infty, a], (a, +\infty)\}.$$

Los posibles conjuntos τ_1-cerrado son los mismos abiertos de τ_1, y los posibles τ_2-cerrados son $\mathbb{R}, \emptyset, \{a\}, [a, +\infty)$, $(a, +\infty)$ y $(-\infty, a]$. Las parejas formadas por un τ_1-cerrado con un τ_2-cerrado, no triviales, cuya intersección es vacía, son: $\{(-\infty, a), [a, +\infty)\}, \{(-\infty, a), \{a\}\}, \{(-\infty, a), (a, +\infty)\}$. Para cada pareja de la lista anterior, existen un τ_i-abierto U y un τ_j-abierto V, disjuntos, cuyos interiores respecto a las topologías contrarias, contienen a los cerrados dados. Por ejemplo, para la primera pareja, $(-\infty, a)$ es τ_1-cerrado y $(-\infty, a) \subset int_{\tau_1}(-\infty, a) = (-\infty, a) \in \tau_2$, mientras que $[a, +\infty)$ es τ_2-cerrado y $[a, +\infty) \subset int_{\tau_1}[a, +\infty) = [a, +\infty) \in \tau_1$. Por tanto, este espacio bitopológico es normal por pares fuertemente.

Del hecho de que $int_{\tau_i}U \subset U$, se deduce que la normalidad por pares fuertemente implica la normalidad por pares de Kelly. Sin embargo, en [19] se da un ejemplo donde el recíproco no se cumple:

Ejemplo 23 *([19], Ejemplo 2.5, pág. 168) Sea* $X = \{a, b, c\}$ *, con topologías*

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$$

y

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{b\}, \{b, c\}\}.$$

Veamos que este espacio bitopológico es normal por pares. Los posibles conjuntos τ_1*-cerrados no triviales son* $\{b, c\}, \{c\}, \{b\}$*, y los posibles* τ_2*-cerrados no triviales son* $\{a, c\}, \{a\}$*. Las parejas formadas por un* τ_1*-cerrado con un* τ_2*-cerrado, no triviales, cuya intersección es vacía, son:*

$$\textit{i)}\ \{\{b, c\}, \{a\}\},\ \textit{ii)}\ \{\{c\}, \{a\}\},$$
$$\textit{iii)}\ \{\{b\}, \{a\}\}\ \ y\ \ \textit{iv)}\ \{\{b\}, \{a, c\}\}.$$

Para cada pareja de la lista anterior, existen un τ_i*-abierto* U *y un* τ_j*-abierto* V*, disjuntos, que contienen a los cerrados dados. Por ejemplo, para la pareja i),* $\{b, c\}$ *es* τ_1*-cerrado y* $\{b, c\} \subset \{b, c\} \in \tau_2$*, mientras que* $\{a\}$ *es* τ_2*-cerrado y* $\{a\} \subset \{a\} \in \tau_1$*. Por tanto, este espacio bitopológico es normal por pares, sin embargo no es normal por pares fuertemente, pues para la pareja del inciso i) los interiores de los únicos abiertos disjuntos* $int_{\tau_2}\{a\}$ *,* $int_{\tau_1}\{b, c\}$ *son vacíos.*

El siguiente resultado es análogo al Teorema 10 cuya hipótesis principal era la normalidad por pares, ahora ha sido formulado y demostrado por nosotros con la hipótesis de normalidad por pares fuerte y como comentamos en la introducción, ya fue ya publicado en [16].

Teorema 13 *Dado* (X, τ_1, τ_2) *un espacio bitopológico normal por pares fuertemente, sean* $A, B \subset X$ *tales que* A *es un* τ_i*-*F_σ*,* B *es un* τ_j*-*F_σ *y*

$$cl_{\tau_i} A \cap B = \emptyset = A \cap cl_{\tau_j} B.$$

Entonces existe un conjunto U τ_j*-abierto y un conjunto* V τ_i*-abierto, con* $A \subset int_{\tau_i} U$, $B \subset int_{\tau_j} V$ *y tales que* $U \cap V = \emptyset$*. Estos conjuntos satisfacen también la relación*

$$A \subset int_{\tau_i} U \subset U \subset cl_{\tau_i} U \subset cl_{\tau_j} \left(cl_{\tau_i} U\right) \subset X - B \tag{2.4}$$

y

$$B \subset int_{\tau_j} V \subset V \subset cl_{\tau_j} V \subset cl_{\tau_i} \left(cl_{\tau_j} V\right) \subset X - A.$$

Demostración.

Sean $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, con A_n τ_i-cerrado y B_n τ_j-cerrado. Aplicando el inciso 3) del Teorema 12, (2.3), a A_1 y $X - cl_{\tau_j}(B)$, existe un conjunto U_1 τ_j-abierto con

$$\begin{aligned} A_1 &\subset int_{\tau_i}(U)_1 \subset cl_{\tau_i}(U)_1 \\ &\subset cl_{\tau_j}(cl_{\tau_i}(U_1)) \subset X - cl_{\tau_j}(B). \end{aligned}$$

Dado que $B_1 \cap (cl_{\tau_i}(A) \cup cl_{\tau_i}(U_1)) \subset (B \cap cl_{\tau_i}(A)) \cup (B \cap cl_{\tau_i}(U_1)) = \emptyset$, usando nuevamente el inciso 3) del Teorema 12 para los conjuntos B_1 y $X - (cl_{\tau_i}(A) \cup cl_{\tau_i}(U_1))$, existe un conjunto V_1, τ_i-abierto tal que

$$\begin{aligned} B_1 &\subset int_{\tau_j}(V_1) \subset cl_{\tau_j}(V_1) \\ &\subset cl_{\tau_i}(cl_{\tau_j}(V_1)) \\ &\subset X - (cl_{\tau_i}(A) \cup cl_{\tau_i}(U_1)). \end{aligned}$$

Ahora, como $(A_2 \cup cl_{\tau_i}(U_1)) \cap \left(cl_{\tau_j}(B) \cup cl_{\tau_j}(V_1)\right) = \emptyset$ podemos aplicar nuevamente el inciso 3) del Teorema 12 a:

$$A_2 \cup cl_{\tau_i}(U_1) \subset X - \left(cl_{\tau_j}(B) \cup cl_{\tau_j}(V_1)\right)$$

para obtener un conjunto U_2 τ_j-abierto para el cual

$$\begin{aligned} A_2 \cup cl_{\tau_i}(U_1) &\subset int_{\tau_i}(U_2) \\ &\subset cl_{\tau_i}(U_2) \subset cl_{\tau_j}(cl_{\tau_i}(U_2)) \\ &\subset X - \left(cl_{\tau_j}(B) \cup cl_{\tau_j}(V_1)\right). \end{aligned}$$

Una vez más aplicando el mismo resultado a $B_2 \cup cl_{\tau_j}(V_1)$ y a:

$$X - (cl_{\tau_i}(A) \cup cl_{\tau_i}(U_1) \cup cl_{\tau_i}(U_2)),$$

puesto que $(B_2 \cup cl_{\tau_j}(V_1)) \cap (cl_{\tau_i}(A) \cup cl_{\tau_i}(U_1) \cup cl_{\tau_i}(U_2)) = \emptyset$, se obtiene un conjunto V_2 τ_i-abierto tal que:

$$\begin{aligned} B_2 \cup cl_{\tau_j}(V_1) &\subset int_{\tau_j}(V_2) \\ &\subset cl_{\tau_j}(V_2) \subset cl_{\tau_i}(cl_{\tau_j}(V_2)) \\ &\subset X - (cl_{\tau_i}(A) \cup cl_{\tau_i}(U_1) \cup cl_{\tau_i}(U_2)). \end{aligned}$$

Continuando de esta manera, se definen inductivamente los conjuntos U_n τ_j-abiertos y los conjuntos V_n τ_i-abiertos, satisfaciendo

$$\begin{aligned} A_n \cup cl_{\tau_i} U_1 \cup ... \cup cl_{\tau_i} U_{n-1} &\subset int_{\tau_i}(U_n) \\ &\subset cl_{\tau_i}(U_n) \subset cl_{\tau_j}(cl_{\tau_i}(U_n)) \\ &\subset X - \left(cl_{\tau_j} B \cup cl_{\tau_j} V_1 \cup ... \cup cl_{\tau_j} V_{n-1}\right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} B_n \cup cl_{\tau j} V_1 \cup ... \cup cl_{\tau_j} V_{n-1} &\subset int_{\tau_j}(V_n) \\ &\subset cl_{\tau_j}(V_n) \subset cl_{\tau_i}(cl_{\tau_j}(V_n)) \\ &\subset X - (cl_{\tau_i} A \cup cl_{\tau_i} U_1 \cup ... \cup cl_{\tau_i} U_n) \end{aligned}$$

para todo número natural n, donde $U_0 = V_0 = \emptyset$.

Si hacemos $U = \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n$ y $V = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n$ se tiene que U es τ_j-abierto, mientras que V es τ_i-abierto y claramente

$$A \subset U, \quad B \subset V \;\; \text{y} \;\; U \cap V = \emptyset.$$

Dado que V es τ_i-abierto y $U \cap V = \emptyset$, se sigue que $cl_{\tau_i}(U) \cap V = \emptyset$, así que $cl_{\tau_i}(U) \cap B = \emptyset$. Más aún, como $\bigcup_{n=0}^{\infty} int_{\tau_i}(U_n) \subset int_{\tau_i}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} U_n\right)$, se sigue que

$$A \subset int_{\tau_i}(U) \subset cl_{\tau_i}(U) \subset X - B.$$

Ahora, una vez más podemos aplicar la equivalencia de normalidad por pares fuertemente (3) a los conjuntos $cl_{\tau_i} U$ y $X - B$ para obtener un W τ_j -abierto, tal que

$$\begin{aligned} cl_{\tau_i} U \; &\subset \; int_{\tau_i}(W) \subset cl_{\tau_i}(W) \subset \\ &\subset \; cl_{\tau_j}(cl_{\tau_i}(W)) \subset X - B, \end{aligned}$$

y así, por $cl_{\tau_j}(cl_{\tau_i} U) \subset cl_{\tau_j}(cl_{\tau_i} W) \subset X - B$, se llega a

$$A \subset int_{\tau_i}(U) \subset cl_{\tau_i}\ (U) \subset cl_{\tau_j}(cl_{\tau_i}\ (U)) \subset X - B.$$

Análogamente, se puede obtener:

$$B \subset int_{\tau_j}(V) \subset cl_{\tau_j}\ (V) \subset cl_{\tau_i}(cl_{\tau_j}(V)) \subset X - A,$$

lo que prueba el teorema. ■

Capítulo 3

Aplicaciones de los axiomas de separación

3.1. Lema de Urysohn

En esta sección mostraremos uno de los resultados más importantes de este trabajo, a saber, la generalización del Lema de Urysohn para espacios bitopológicos normales por pares fuertemente.

El Lema de Urysohn nos da una caracterización de los espacios topológicos normales, cabe señalar que Kelly mostró este hecho para la normalidad por pares. En [16] obtuvimos la extensión de este importante resultado para la normalidad por pares fuertemente y con esto mostramos que efectivamente, el axioma dado por Ajoy Mukharjee en [19] es más fuerte que el dado por Kelly.

Antes de mostrar los resultados, daremos algunos conceptos y resultados importantes necesarios para la comprensión de este lema.

Definición 28 *Sea (X, τ) un espacio topológico. Una función $f : X \to \mathbb{R}$ es semicontinua superiormente si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) < \alpha\}$$

es un abierto en X. Análogamente, f es llamada semicontinua inferiormente si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

es un abierto en X.

Por su abreviatura del concepto en inglés , se acostumbra usar lsc para denotar a las funciones semicontinuas inferiormente y por usc a las funciones semicontinuas superiormente, así, en el caso de un espacio bitopológico (X,τ_1,τ_2) podemos usar τ_i-lsc o τ_i-usc para hacer referencia a la topología utilizada.

Antes de enunciar el lema de Urysohn para espacios topológicos, es necesario dar algunos conceptos referentes a la continuuidad de funciones en dichos espacios. El siguiente resultado puede consultarse en [7].

Lema 1 *Sean (X,τ) un espacio topológico y D un subconjunto denso en $\mathbb{R}$. Supongamos que $\{U_\alpha\}_{\alpha\in D}$ es un cubrimiento abierto de X que satisface:*
i) Si $\alpha,\beta\in D$, $\alpha<\beta$, entonces $cl\,(U_\alpha)\subset U_\beta$,
ii) $\bigcap\limits_{\alpha\in D} U_\alpha=\emptyset$.
La función $f:X\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\acute{\imath}nf\,\{\alpha\in D : x\in U_\alpha\}$ es continua.

Demostración. Sea $x_0\in X$ arbitrario pero fijo. Dado que $\{U_\alpha\}_{\alpha\in D}$ es un cubrimiento abierto de X, el conjunto $A=\{\alpha\in D : x_0\in U_\alpha\}$ es no vacío. Veamos que este conjunto está acotado inferiormente. Si esto no ocurriera, existiría en A una subsucesión estrictamente decreciente,

$$\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset\{\alpha\in D : x_0\in U_\alpha\},$$

lo que provocaría por $i)$ que para cualquier $\alpha\in D$, existe un $k_0\in\mathbb{N}$ tal que $\alpha_{k_0}<\alpha,$ así $x_0\in cl\left(U_{\alpha_{k_0}}\right)\subset U_\alpha$, de lo anterior podemos concluir que $A=D$ y por tanto $x_0\in\bigcap\limits_{\alpha\in D}U_\alpha=\emptyset$, contradiciendo $ii)$, así A debe estar acotado inferiomente y por esta razón, si se define $f(x_0)=\acute{\imath}nf\,\{\alpha\in D : x_0\in U_\alpha\}$, f está bien definida.

Probemos la continuidad de f en x_0. Sea $\varepsilon>0$, escojamos $\alpha_0\in D$ tal que $x_0\in U_{\alpha_0}$ y $f(x_0)\le\alpha_0<f(x_0)+\varepsilon$. Elijamos $\alpha_1,\ \alpha_2\in D$ tales que $f(x_0)-\varepsilon\le\alpha_1<\alpha_2\le f(x_0)$, esto es que $(\alpha_1,\alpha_2)\subset(f(x_0)-\varepsilon,\ f(x_0)+\varepsilon)$. Por i) y por la definición de $f(x_0)$, $x_0\in U_{\alpha_0}-cl\,(U_{\alpha_1})$. Por otra parte, para cualquier $x\in U_{\alpha_0}-cl\,(U_{\alpha_1})$ se cumple que:

$$\alpha_0\in\{\alpha\in D : x\in U_\alpha\}\subseteq[\alpha_1,+\infty).$$

Por tanto $\alpha_1 \leq f(x) \leq \alpha_0$ y así queda demostrado que:

$$\begin{aligned} f\left(U_{\alpha_0} - cl\left(U_{\alpha_1}\right)\right) &\subseteq [\alpha_1, \alpha_0] \\ &\subseteq \left(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon\right). \end{aligned}$$

y como x_0 es arbitrario, se sigue que f es continua. ■

Al conjunto de números racionales $D = \left\{\frac{k}{2^n} : n \in \mathbb{N}, k = 1, ..., 2^{n-1}\right\}$ se le conoce como el conjunto de los números diádicos.

Teorema 14 *El conjunto de los números diádicos es denso en el intervalo* $(0,1)$.

Demostración. Para probar que D es denso en $(0,1)$, basta con probar que para cualesquiera $x, y \in (0,1)$, con $x < y$, existe $\frac{k_0}{2^n} \in D$, tal que $x < \frac{k_0}{2^n} < y$.

Sean $x, y \in (0,1)$ y supongamos que $x < y$. Elijamos un número natural n tal que $\frac{1}{2^n} < y - x$. Sea $k_0 = mín\left\{k \in \mathbb{N} : x < \frac{k}{2^n}\right\}$. Si ocurre que $y < \frac{k_0}{2^n}$, entonces $\frac{k_0-1}{2^n} \leq x < y < \frac{k_0}{2^n}$ luego $y - x < \frac{k_0-(k_0-1)}{2^n} = \frac{1}{2^n}$, lo cual es una contradicción, así $x < \frac{k_0}{2^n} < y$. Por tanto D es denso en $(0,1)$. ■

A continuación se enuncia el lema de Urysohn para un espacio topológico, cuya prueba puede consultarse en [8]. La expresion $f\mid_F$ representa la función f restringida al conjunto F.

Teorema 15 *(Lema de Urysohn, 1924) Sea* (X, τ) *un espacio topológico. Si* X *es un espacio normal, entonces para cada par de subconjuntos cerrados disjuntos* A *y* B *de* X *existe una función continua* $f : X \to [0,1]$ *tal que:*

$$f\mid_A = 0 \quad y \quad f\mid_B = 1.$$

Para hablar de continuidad de una función entre espacios bitopológicos, tenemos que indicar respecto a qué topologías se refiere la continuidad, por tal razón, tenemos la siguiente definición.

Definición 29 *Sean* (X,τ_1,τ_2) *y* $(Y,\upsilon_1,\upsilon_2)$ *dos espacios bitopológicos. Una función* $f : X \to Y$ *se dice* (τ_i,υ_j)*-continua, si* $f : (X,\tau_i) \to (Y,\upsilon_j)$ *es continua,* $i,j \in \{1,2\}$.

Nuestro ineterés está en el caso de que $i = j$, y por tanto necesitaremos la siguiente definición:

Definición 30 *Sean* (X,τ_1,τ_2) *y* (Y,σ_1,σ_2) *dos espacios bitopológicos. Una función* $f : (X,\tau_1,\tau_2) \to (Y,\sigma_1,\sigma_2)$ *es llamada continua por pares o bicontinua si las dos funciones* $f : (X,\tau_i) \to (Y,\sigma_i)$ $i = 1,2$ *son continuas.*

En el caso de funciones bicontinuas de valores reales $f : (X,\tau_1,\tau_2) \to \mathbb{R}$, se considera al espacio real como el espacio bitopológico $(\mathbb{R},\upsilon_1,\upsilon_2)$, donde $\upsilon_1 = \upsilon_2$ representa a la topología usual. De igual forma, en la expresión $f : (X,\tau_1,\tau_2) \to [0,1]$ bicontinua, el conjunto $[0,1]$ representa al espacio $([0,1],\upsilon_1,\upsilon_2)$, donde $\upsilon_1 = \upsilon_2$ será la topología usual restringida al intervalo.

A continuación daremos el lema de Urysohn para espacios bitopológicos, primero con los axiomas de separación por pares según Kelly, y después para los axiomas por pares fuertemente. Hacemos énfasis que este último fue obtenido por nosotros y publicado en [16], el cual claramente resulta ser más fuerte que el obtenido por Kelly en [22].

Para el caso de la normalidad por pares, Kelly obtuvo el siguiente resultado:

Teorema 16 *(Urysohn, [22]) Si* (X,τ_1,τ_2) *es un espacio bitopológico normal por pares, entonces para cualesquiera par de conjuntos* F τ_1*-cerrado y* G τ_2*-cerrado con* $F \cap G = \emptyset$*, existe una función* $f : (X,\tau_1,\tau_2) \to [0,1]$ *que satisface:*

a) $f(x) = 0$, *para toda* $x \in F$ *y* $f(x) = 1$, *para toda* $x \in G$ *y*

b) f *es* τ_1*-semicontinua inferiormente y* τ_2*-semicontinua superiormente.*

Para el caso de normalidad por pares fuertemente, hemos obtenido lo que sigue, ver [16]:

Teorema 17 *(Extensión del lema de Urysohn, [16]) Sea* (X, τ_1, τ_2) *un espacio bitopológico normal por pares fuertemente. Si* $A, B \subset X$ *son tales que* A *es* τ_i*-cerrado,* B *es* τ_j*-abierto y* $A \cap B = \emptyset$*, entonces existe una función* $f : X \longrightarrow [0,1]$ *bicontinua que satisface:*

$$f_{|A} = 0 \quad y \ f_{|B} = 1,$$

esto es, para cada $x \in A$, $f(x) = 0$*, y para* $x \in B$ *se cumple que* $f(x) = 1$.

Demostración. Seguiremos el esquema de la clásica demostración del teorema de Urysohn, ver por ejemplo [8]. Hagamos $D_0 = A$ y $V_1 = X - B$. De esta forma, D_0 es τ_i-cerrado, V_1 es τ_j-abierto y $D_0 \subset V_1$. Por (2.2) existen $D_{\frac{1}{2}}$ τ_i-cerrado y $V_{\frac{1}{2}}$ τ_j-abierto, tal que:

$$D_0 \subset int_{\tau_i}\left(V_{\frac{1}{2}}\right) \subset V_{\frac{1}{2}} \subset D_{\frac{1}{2}} \subset cl_{\tau_j}\left(D_{\frac{1}{2}}\right) \subset V_1.$$

Aplicando la misma propiedad a los pares $D_0 \subset V_{\frac{1}{2}}$ y $D_{\frac{1}{2}} \subset V_1$, afirmamos la existencia de dos pares de conjuntos $D_{\frac{1}{4}}, D_{\frac{3}{4}}$ τ_i-cerrados y $V_{\frac{1}{4}}, V_{\frac{3}{4}}$ τ_j-abiertos tal que:

$$\begin{aligned} D_0 &\subset int_{\tau_i}\left(V_{\frac{1}{4}}\right) \subset V_{\frac{1}{4}} \subset D_{\frac{1}{4}} \\ &\subset cl_{\tau_j}\left(D_{\frac{1}{4}}\right) \subset V_{\frac{1}{2}} \subset D_{\frac{1}{2}} \\ &\subset int_{\tau_i}\left(V_{\frac{3}{4}}\right) \subset V_{\frac{3}{4}} \\ &\subset D_{\frac{3}{4}} \subset cl_{\tau_j}\left(D_{\frac{3}{4}}\right) \subset V_1. \end{aligned}$$

Continuando en esta forma obtenemos dos familias de conjuntos no decrecientes $\{D_{\frac{k}{2^n}}\}$, $k = 0, 1, ..., 2^{n-1}$, $n = 1, 2, ...$ y $\{V_{\frac{k}{2^n}}\}$ $k = 1, ..., 2^{n-1}$, $n = 1, 2, ...$, que satisfacen:

$$\begin{aligned} D_{\frac{k-1}{2^n}} &\subset int_{\tau_i}\left(V_{\frac{k}{2^n}}\right) \subset V_{\frac{k}{2^n}} \\ &\subset D_{\frac{k}{2^n}} \subset cl_{\tau_j}\left(D_{\frac{k}{2^n}}\right) \\ &\subset V_{\frac{k+1}{2^n}} \subset D_{\frac{k+1}{2^n}} \end{aligned}$$

para $k = 1, ..., 2^{n-1}$. Por conveniencia hacemos $D_1 = X$ y $V_0 = \emptyset$. De manera general:

$$D_q \subset int_{\tau_i}(V_p) \subset V_p \subset D_p \tag{3.1}$$

$$\subset cl_{\tau_j}(D_p) \subset V_r \subset D_r.$$

para cada $q, p, r \in D$, (donde D es el conjunto de números diádicos), con $q < p < r$.

Con lo anterior, se puede definir la función $f : X \longrightarrow [0,1]$, por:

$$f(x) = \acute{\imath}nf\{p : x \in V_p\}, \ x \in X, \tag{3.2}$$

la cual es la misma que propone Kelly y que como se menciona en [22] y en [5], que esta función f así definida, también es igual a:

$$f(x) = \acute{\imath}nf\{p : x \in D_p\},$$

para cada $x \in X$. En el mismo trabajo se prueba que f es τ_i-lsc y τ_j-usc, ahora probaremos que ésta es τ_i-usc y τ_j-lsc. Afirmamos que $f(x)$, definida por (3.2), es también igual a:

$$\acute{\imath}nf\{p : x \in int_{\tau_i}(V_p)\}, \quad \text{e} \tag{3.3}$$

$$\acute{\imath}nf\{p : x \in cl_{\tau_j}(D_p)\}. \tag{3.4}$$

En efecto, para ver que (3.3) es igual a $f(x)$, de la expresión:

$$\acute{\imath}nf\{p : x \in D_p\} \leq \acute{\imath}nf\{p : x \in int_{\tau_i}(V_p)\}$$

se puede deducir de $\{p : x \in int_{\tau_i}(V_p)\} \subset \{p : x \in D_p\}$, y si

$$p_1 = \acute{\imath}nf\{p : x \in D_p\} < \acute{\imath}nf\{p : x \in int_{\tau_i}(V_p)\} = p_2,$$

entonces existen $q, r \in (p_1, p_2) \cap D$ con $q < r$ para los cuales (utilizando 3.1)

$$x \in D_q \subset int_{\tau_i}(V_r) \subset V_r \subset D_r \subset cl_{\tau_j}(D_r),$$

lo que contradice la definición de p_2.

De manera similar se verifica que (3.4) es igual a $f(x)$. También es claro que $0 \leq f(x) \leq 1$, $x \in X$; $f(x) = 0$, $x \in A$ y $f(x) = 1$, $x \in B$.

Para probar que f es τ_i-usc, veamos que dado un número α, con $0 < \alpha \leq 1$, el conjunto $f^{-1}([0,\alpha))$ es τ_i-abierto, ya que por (3.3)

$$f(x) < \alpha \text{ si y sólo si, existe } p,\ p < \alpha,\ x \in int_{\tau_i}(V_p)$$
$$\text{si y sólo si } x \in \bigcup_{p<\alpha} int_{\tau_i}(V_p),$$

probando así que $f^{-1}([0,\alpha)) = \bigcup\limits_{p<\alpha} int_{\tau_i}(V_p)$ es τ_i-abierto. La τ_j-lsc de f se deduce de la expresión (3.4) de $f(x)$ y de que

$$\begin{aligned} f(x) \ > \ \alpha & \text{ si y sólo si, existe } p,\ p > \alpha,\ x \in (X - cl_{\tau_j}(D_p)) \\ \text{si y sólo si } x \ \in & \bigcup_{p>\alpha}(X - cl_{\tau_j}(D_p)). \end{aligned}$$

Probando así que el conjunto $f^{-1}((\alpha,1])$ es τ_j-abierto. ∎

3.2. Teorema de Katětov

En 1952 Katětov en [20] y [21], establece el siguiente resultado: en un espacio topológico (X,τ) normal, para cada par de funciones $f,g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, con f usc, g lsc y $f \leq g$, (esto es, $f(x) \leq g(x)$, para cada $x \in X$), existe una función continua $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \leq h \leq g$. Posteriormente, en el año de 1967, Lane en [25] generaliza el teorema de Katětov para espacios bitopológicos: un espacio bitopológico (X,τ_1,τ_2) es normal por pares si y sólo si para cada par de funciones $f,g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, con f τ_i-usc, g τ_j-lsc y $f \leq g$, existe una función $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ τ_i-usc y τ_j-lsc, tal que $f \leq h \leq g$.

Formalmente Katětov presenta el siguiente resultado:

Teorema 18 *(Katětov) Si (X,τ) es un espacio topológico normal, entonces para cualesquiera par de funciones $f,g : X \to \mathbb{R}$ con f semicontinua superiormente, g semicontinua inferiormente y $f \leq g$, existe una función continua $h : X \to \mathbb{R}$ tal que $f \leq h \leq g$.*

Unos años después, en 1967, Lane en [25] extiende este resultado para espacios bitopológicos de la siguiente manera:

Teorema 19 *(Extensión Teorema Katětov, Lane [25]) Un espacio bitopológico (X,τ_1,τ_2) es normal por pares si y sólo si para cualesquiera par de funciones $f,g : X \to \mathbb{R}$ con f τ_i-semicontinua superiormente, g*

τ_j-semicontinua inferiormente y $f \leq g$, existe una función $h : X \to \mathbb{R}$ que cumple:

a) $f \leq h \leq g$ y

b) h es τ_i-semicontinua superiormente y τ_j-semicontinua inferiormente.

Recientemente, en [16], hemos mostrado una extensión de este resultado para la normalidad por pares fuertemente, que a continuación enunciamos. Para la demostración de este teorema utilizaremos el Teorema 13, que fue enunciado y demostrado en el Capítulo 2.

Teorema 20 *(Extensión del teorema de Katětov, Her-Alv. [16]) Un espacio bitopológico (X, τ_1, τ_2) es normal por pares fuertemente si y sólo si para cada par de funciones $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, con f τ_i-usc, g τ_j-lsc y $f \leq g$ existe una función bicontinua $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \leq h \leq g$.*

Demostración. Supóngase primero el caso particular $f, g : X \longrightarrow [0,1]$. Pongamos $D_0 = \emptyset$ y para cada $r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$, sean $D_r = g^{-1}([0,r))$ y $O_r = f^{-1}((r,1])$. Se tiene que, para cada $0 < r\acute{} < r$, $g^{-1}([0, r\acute{}])$ es τ_j-cerrado ya que la función g es τ_j-lsc. Como se puede ver $D_r = \bigcup\limits_{0<r\acute{}<r} g^{-1}([0, r\acute{}])$, por tal motivo D_r es un τ_j-F_σ. Ahora puesto que f es τ_i-usc, se tiene que el conjunto $f^{-1}([r\acute{}, 1])$ es τ_j-cerrado y así $O_r = \bigcup\limits_{r<r\acute{}<1} f^{-1}([r\acute{}, 1])$ es un τ_j-F_σ. Además, es fácil verificar que:

$$cl_{\tau_i}\ (D_r) \cap O_r = \emptyset = D_r \cap cl_{\tau_j}\ (O_r)\,. \tag{3.5}$$

Por la forma en que se han definido los conjuntos D_r y O_r y las igualdades dadas en (3.5) obtenemos que D_1 y O_1 satisfacen las hipótesis del Teorema 13 que aparecen en (2.4), de aquí que existe un conjunto U_1 τ_j-abierto tal que:

$$\begin{aligned} D_1 &\subset int_{\tau_i}(U_1) \subset U_1 \subset cl_{\tau_i}(U_1) \\ &\subset cl_{\tau_j}(cl_{\tau_i}(U_1)) \subset X - O_1. \end{aligned}$$

De igual manera, existe un conjunto $U_{\frac{1}{2}}$ τ_j-abierto tal que:

$$\begin{aligned} D_{\frac{1}{2}} &\subset int_{\tau_i}\left(U_{\frac{1}{2}}\right) \subset U_{\frac{1}{2}} \subset cl_{\tau_i}\left(U_{\frac{1}{2}}\right) \\ &\subset cl_{\tau_j}\left(cl_{\tau_i}\left(U_{\frac{1}{2}}\right)\right) \\ &\subset [X - O_{\frac{1}{2}}] \cap U_1. \end{aligned}$$

Similarmente existen dos conjuntos $U_{\frac{1}{4}}$ y $U_{\frac{3}{4}}$ τ_j-abiertos tales que:

$$\begin{aligned} D_{\frac{1}{4}} &\subset int_{\tau_i}\left(U_{\frac{1}{4}}\right) \subset U_{\frac{1}{4}} \\ &\subset cl_{\tau_i}\left(U_{\frac{1}{4}}\right) \subset cl_{\tau_j}\left(cl_{\tau_i}\left(U_{\frac{1}{4}}\right)\right) \\ &\subset [X - O_{\frac{1}{4}}] \cap U_{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} D_{\frac{3}{4}} \cup cl_{\tau_i}\left(U_{\frac{1}{2}}\right) &\subset int_{\tau_i}\left(U_{\frac{3}{4}}\right) \subset U_{\frac{3}{4}} \\ &\subset cl_{\tau_i}\left(U_{\frac{3}{4}}\right) \subset cl_{\tau_j}\left(cl_{\tau_i}\left(U_{\frac{3}{4}}\right)\right) \\ &\subset [X - O_{\frac{3}{4}}] \cap U_1. \end{aligned}$$

Continuando inductivamente, obtenemos conjuntos U_r τ_j-abiertos, que satisfacen la relación general

$$\begin{aligned} D_{\frac{2i-1}{2^m}} \cup cl_{\tau_i}\left(U_{\frac{i-1}{2^{m-1}}}\right) &\subset int_{\tau_i}\left(U_{\frac{2i-1}{2^m}}\right) \\ &\subset U_{\frac{2i-1}{2^m}} \subset cl_{\tau_i}\left(U_{\frac{2i-1}{2^m}}\right) \\ &\subset cl_{\tau_j}\left(cl_{\tau_i}\left(U_{\frac{2i-1}{2^m}}\right)\right) \\ &\subset [X - O_{\frac{2i-1}{2^m}}] \cap U_{\frac{i}{2^{m-1}}}, \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, ..., 2^{m-1}$, $m \in \mathbb{N}$, donde $U_0 = \emptyset$. De lo anterior, si ponemos $r = \frac{2i-1}{2^m}$, se puede ver que se cumple:

$$\begin{aligned} D_r &\subset int_{\tau_i} U_r \subset U_r \\ &\subset cl_{\tau_i}(U_r) \subset cl_{\tau_j}(cl_{\tau_i}(U_r)) \\ &\subset X - O_r \end{aligned}$$

para todo $r \in D$ y

$$U_r \subset cl_{\tau_j}(cl_{\tau_i}(U_r)) \subset int_{\tau_i}(U_{r'}) \subset U_{r'}$$

para cada $r, r' \in D$, con $r < r'$.

Así, podemos definir la función

$$h(x) = \acute{\imath}nf\{r \in D : x \in U_r\},\ x \in X$$

De igual manera que en la demostración del Lema de Urysohn, Teorema 17, respecto a la definición de la función f, se pueden deducir otras expresiones para h

$$\begin{aligned} h(x) &= \acute{\imath}nf\{r \in D : x \in int_{\tau_i}(U_r)\} \\ &= \acute{\imath}nf\{r \in D : t \in cl_{\tau_i}(U_r)\} \\ &= \acute{\imath}nf\{r \in D : t \in cl_{\tau_j}(cl_{\tau_i}U_r)\},\ x \in X \end{aligned}$$

La bicontinuidad de h se deduce de manera similar a la de f en el Teorema 17.

Resta probar que $f \leq h \leq g$. Para hacerlo, sean $x \in X$ y $r \in D$ tales que $r < f(x)$, entonces para cada $r' \in D$ con $0 \leq r' < r$, se tiene $x \notin X - O_{r'}$ y por tanto $x \notin U_{r'}$, implicando que $h(x) \geq r$; pero si $h(x) \geq r$ para cada $r \in D$ con $r < f(x)$ y así $f(t) \leq h(t)$. Si $r \in D$ es tal que $g(t) < r$, entonces $t \in D_r \subset U_r$ y por tanto $h(t) \leq r$, para todo $r \in D$ con $g(t) < r$, implicando que $h(t) \leq g(t)$.

Para deducir el caso general $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ se usará el caso particular ya probado, al utilizar el homomorfismo estrictamente creciente $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow (0,1)$ dado por:

$$\varphi(t) = \frac{|t| + t + 1}{2(|t| + 1)},\ t \in \mathbb{R}.$$

Consecuentemente se puede aplicar el resultado probado para las funciones $\overline{f} = \varphi \circ f$ y $\overline{g} = \varphi \circ g$, encontrando una función $\overline{h} : X \longrightarrow (0,1)$ bicontinua tal que $\overline{f} \leq \overline{h} \leq \overline{g}$. De tal forma que la función buscada es $h = \varphi^{-1} \circ \overline{h} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ igualmente bicontinua.

Recíprocamente, supongase que A y B son dos subconjuntos disjuntos τ_i-cerrado y τ_j-cerrado, respectivamente. Las funciones características χ_A y χ_{X-B} son funciones τ_i-usc, τ_j-lsc y satisfacen $\chi_A \leq \chi_{X-B}$. Por hipótesis existe una función bicontinua $h : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $\chi_A \leq h \leq \chi_{X-B}$, por la bicontinuidad de h, $U = h^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ es un conjunto τ_i-abierto y τ_j-abierto, mientras que $D = h^{-1}([\frac{1}{4}, 1])$ es un conjunto τ_i-cerrado y τ_j-cerrado. Así:

$$A \subset int_{\tau_i}(U) \subset U \subset D \subset cl_{\tau_j}(D) \subset X - B.$$

Con lo que queda probado el resultado. ■

Capítulo 4

Compacidad

4.1. Cubiertas

Antes de comenzar a hablar de la compacidad en espacios bitopológicos, es necesario hablar de cubiertas abiertas por pares, que son generalizaciones de las cubiertas abiertas en espacios topológicos a bitopológicos.

Comenzaremos recordando cuatro definiciones que corresponden a espacios topológicos, por tal razón omitimos ejemplos de ellas.

Para las siguientes definiciones, las letras **A** y **B** representan conjuntos de índices.

Definición 31 *Sea (X, τ) un espacio topológico. La familia*

$$L = \{A_\alpha : \alpha \in \mathbf{A}\}$$

de subconjuntos de X es una cubierta de X, (o que L cubre a X) si se cumple que $X = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{A}} A_\alpha$; y si además cada $A_\alpha \in \tau$, entonces L es llamada una cubierta abierta de X.

Definición 32 *Sean (X, τ) un espacio topológico y $L = \{A_\alpha : \alpha \in \mathbf{A}\}$ una cubierta de X. Diremos que L es* ***puntualmente finita,*** *si para cada $x \in X$, x pertenece a lo más a un número finito de conjuntos A_α.*

Definición 33 *Sean* (X,τ) *un espacio topológico,* $M = \{B_\beta : \beta \in \mathbf{B}\}$ *y* $L = \{A_\alpha : \alpha \in \mathbf{A}\}$ *dos familias de subconjuntos de* X. *Diremos que* M *es un* ***refinamiento de la cubierta*** L *de* X, *si* M *cubre a* X *y para cada* $\beta \in \mathbf{B}$, *existe* $\alpha \in \mathbf{A}$ *tal que* $B_\beta \subset A_\alpha$.

Definición 34 *Sean* (X,τ) *un espacio topológico,* $L = \{A_\alpha : \alpha \in \mathbf{A}\}$ *y* $M = \{B_\alpha : \alpha \in \mathbf{B}\}$ *dos familias de subconjuntos de* X. *La familia* M *es llamada un* ***refinamiento preciso*** *de* L *si* $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ *y todo conjunto* B_α *de* M *está contenido en el correspondiente conjunto* A_α *de* L.

Los conceptos dados a continuación, son generalizaciones de los dados anteriormente para espacios bitopológicos y algunos de éstos aparecen en [6], [19].

Definición 35 *Sea* (X,τ_1,τ_2) *un espacio bitopológico. Dada una colección* $L = \{U_\alpha : \alpha \in \mathbf{A}\}$ *de subconjuntos* X, *se dice que es una* ***cubierta abierta débil por pares,*** *si cada* U_α *es* τ_1*-abierto ó* τ_2*-abierto y además cubren a* X.

Notemos que las cubiertas abiertas débiles por pares, pueden incluir sólo abiertos de un tipo o de ambos. Se hará referencia a las cubiertas abiertas débiles de un sólo tipo de abiertos como cubiertas τ_i-abiertas, $i \in \{1,2\}$.

Ejemplo 24 *Sea* $X = \mathbb{R}$, *para* $a \in \mathbb{R}$ *fijo, consideremos las topologías*

$$\tau_1 = \{\mathbb{R}, \emptyset, (-\infty, a), [a, +\infty)\}$$

y

$$\tau_2 = \{\mathbb{R}, \emptyset, (-\infty, a), (a, +\infty), \mathbb{R} - \{a\}\}.$$

La familia $L = \{(-\infty, a), [a, +\infty)\}$ *es una cubierta abierta débil por pares, en particular es una cubierta* τ_1*-abierta.*

La definición que sigue es parecida a la anterior pero es un poco más fuerte y es la que más se utiliza en la teoría de los espacios bitopológicos.

Definición 36 *Sea (X, τ_1, τ_2) un espacio bitopológico. Una colección de subconjuntos $L = \{U_\alpha : \alpha \in \mathbf{A}\}$ de X, se dice que es una* ***cubierta abierta por pares****, si L cubre a X y cada U_α es τ_1-abierto o τ_2-abierto, con $L \cap \tau_1 \neq \emptyset$, $L \cap \tau_2 \neq \emptyset$.*

Análogamente, una familia $\{U_\alpha : \alpha \in \mathbf{A}\}$ se dice cerrada por pares si $\{X - U_\alpha : \alpha \in \mathbf{A}\}$ es abierta por pares.

Nótese que toda cubierta abierta por pares es una cubierta abierta débil por pares, lo inverso no es necesariamente cierto.

Definición 37 *Sea (X, τ_1, τ_2) un espacio bitopológico. Una cubierta abierta por pares $L = \{U_\alpha : \alpha \in \mathbf{A}\}$ de X es llamada* ***localmente finita por pares,*** *si dado cualquier $x \in X$, existe una vecindad de x τ_i-abierta la cual intersecta a lo más a un número finito de conjuntos τ_j-abiertos de L.*

La Definición 37 es una generalización de lo que se conoce como una cubierta localmente finita en el contexto de los espacios bitopológicos, mientras que la siguiente definición no tiene precedente en la teoría de los espacios con una sola topología.

Definición 38 *Sean (X, τ_1, τ_2) un espacio bitopológico y $L = \{U_\alpha : \alpha \in \mathbf{A}\}$ una cubierta abierta por pares (débil) de X. La cubierta abierta por pares $M = \{V_\beta : \beta \in \mathbf{B}\}$, es llamada un* ***refinamiento paralelo*** *de L, si todo conjunto $V_\beta \in M$ τ_i-abierto, está contenido en algún conjunto U_α también τ_i-abierto, $i = 1, 2$.*

Ejemplo 25 *Sea $X = [0, 1]$, con las topologías:*

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{0\}, \{[0, a) : a \in X\}\},$$

y

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{(a, 1] : a \in X\}\}.$$

La familia $L = \{(a, 1] : a \in X\} \cup \{0\}$ es una cubierta abierta por pares. Además, $M = \left\{(\frac{1}{n}, 1] : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ es un refinamiento paralelo de L.

Ejemplo 26 *Sea $X = \mathbb{R}$, con las topologías*

$$\tau_1 = \{\mathbb{R}, \emptyset, \{1\}\},$$

y

$$\tau_2 = \{\mathbb{R}, \emptyset, \mathbb{R} - \{1\}\} \cup \{(-\infty, a) - \{1\} : a\epsilon\mathbb{R}\}.$$

La familia $L = \{\mathbb{R} - \{1\}, \{1\}\}$ es localmente finita por pares, pues para $x \in \mathbb{R}$, si $x = 1$, las únicas vecindades τ_1-abierta de x son $\mathbb{R}$ y $\{1\}$, e intersectan a cero conjuntos τ_2-abiertos de L. Además, la única vecindad τ_2-abierta de x es $\mathbb{R}$ e intersecta a un único τ_1-abierto de L. Si $x \neq 1$, la única vecindad τ_1-abierta de x es $\mathbb{R}$, e intersecta sólo al τ_2-abierto $\mathbb{R} - \{1\}$ de L. Además las vecindades τ_2-abiertas de x son $(-\infty, a) - \{1\}$ con $a\epsilon\mathbb{R}$, e intersectan a cero conjuntos τ_1-abiertos de L.

El siguiente resultado es producto de nuestro intento de extender a los espacios bitopológicos, teoremas existentes en espacios topológicos.

Teorema 21 *Sean (X, τ_1, τ_2) un espacio bitopológico y $L = \{U_\alpha : \alpha \in \mathbf{A}\}$, una cubierta abierta por pares. Si L admite un refinamiento paralelo localmente finito por pares, entonces, admite un refinamiento paralelo localmente finito por pares y preciso.*

Demostración. Sea $L = \{U_\alpha : \alpha \in \mathbf{A}\}$, una cubierta abierta por pares, y sea $M = \{V_\beta : \beta \in \mathbf{B}\}$ un refinamiento paralelo localmente finito por pares de L. Se tiene que para cada $V_\beta \in M$ τ_i-abierto, existe $U_\alpha \in L$ τ_i-abierto, con $V_\beta \subset U_\alpha$. Dotemos de un buen orden al conjunto $\mathbf{A}$, y sea $h : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ definida por

$$h(\beta) = \alpha_\beta = ínf\,\{\alpha : V_\beta \subset U_\alpha, V_\beta, U_\alpha \in \tau_i\}, \; i = 1, 2.$$

Para cada $\alpha \in \mathbf{A}$, definamos $C_\alpha = \bigcup \{V_\beta : h(\beta) = \alpha\}$, puede suceder que para algunos $\alpha \in \mathbf{A}$, los conjuntos C_α sean vacíos, sin embargo esto no ocasiona problemas.

Nótese que por construcción, si U_α es τ_i-abierto, entonces C_α es τ_i-abierto, $i = 1, 2$; además, para cada $\alpha \in A$, $C_\alpha \subset U_\alpha$, de lo anterior, la familia $\{C_\alpha : \alpha \in \mathbf{A}\}$ es un refinamiento paralelo preciso de L y cubre a X, pues $X = \bigcup V_\beta \subset \bigcup C_\alpha$.

Resta probar que $\{C_\alpha : \alpha \in \mathbf{A}\}$ es localmente finita por pares. Dado $x \in X$, existe una vecindad V_x de x, τ_i-abierta la cual intersecta a lo más a un número finito de conjuntos τ_j-abiertos de M, esto es, $V_x \cap V_\beta = \emptyset$, excepto quizás para un número finito de $V_\beta \in M \cap \tau_j$. Claramente, dado que $V_\beta \subset C_\alpha$, para $h(\beta) = \alpha$, V_x intersectará a lo más a un número finito de τ_j-abiertos C_α, luego $\{C_\alpha : \alpha \in \mathbf{A}\}$ es un refinamiento preciso localmente finito por pares de L. ■

4.2. Compacidad por pares

A continuación, enunciaremos tres conceptos distintos de compacidad por pares existentes en la literatura, los cuales pueden ser consultados en [6]. Se analizarán algunas de las relaciones entre ellos.

El primer concepto de compacidad en un espacio bitopológico que mencionaremos es el dado por Birsan en [3], en el año de 1969, al cual lo llamaremos B-compacto por pares.

Definición 39 *Sea (X, τ_1, τ_2) un espacio bitopológico. El espacio X es τ_1-**compacto respecto a** τ_2 si toda τ_1-cubierta abierta (débil) por pares posee un refinamiento τ_2-abierto.*

Definición 40 *Un espacio bitoplológico (X, τ_1, τ_2) es B-**compacto por pares,** si es τ_i-compacto respecto a τ_j, para $i, j \in \{1, 2\}, i \neq j$.*

Aunque no todo subconjunto cerrado de un espacio B-compacto por pares es B-compacto por pares, sí se tiene una parte de la B-compacidad por pares, como lo mostramos en el resultado siguiente. Cabe mencionar que este teorema no lo encontramos en ningún artículo y aunque sencillo, es un resultado propio.

Teorema 22 *Sea* (X, τ_1, τ_2) *un espacio bitopológico. Si* X *es un espacio B-compacto por pares, entonces todo conjunto* F τ_i*-cerrado es* τ_{iF}*-compacto respecto a* τ_{jF}*, donde* τ_{iF} *representa la topología* τ_i *restringida al subespacio* F*.*

Demostración. Nótese que si el espacio X es τ_i-compacto respecto a τ_j y F es un conjunto τ_i-cerrado, puesto que $X - F$ es τ_i-abierto, se tiene que para cualquier τ_{iF}-cubierta abierta de F, $L = \{U_\alpha \cap F : \alpha \in \mathbf{A}\}, U_\alpha \in \tau_i$, se cumple que $\{U_\alpha : \alpha \in \mathbf{A}\} \cup \{X - F\}$ es una τ_i-cubierta abierta de X. Como X es B-compacto por pares, existe un refinamiento finito M τ_j-abierto que cubre a X. Quitando los abiertos de M contenidos en $X - F$, intersectando a los restantes con F obtenemos un refinamiento finito de L que cubre a F. Por tanto, en un espacio B-compacto por pares, todo τ_i-cerrado es τ_{iF}-compacto respecto a τ_{jF}. ■

Sin embargo, en un espacio B-compacto por pares un conjunto F τ_i-cerrado no necesariamente es τ_{jF}-compacto respecto a τ_{iF}, este hecho lo veremos en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 27 *Sea* $X = [0, 1]$*, con las topologías*

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{0\}, \{[0, b) : b \in X\}\},$$

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{(a, 1] : a \in X\}\}.$$

Este espacio es B-compacto por pares, sin embargo, el conjunto $F = [0, 1)$ *es* τ_2 *-cerrado; la familia* $\{[0, a) : a \in X\}$ *es una* τ_{1F}*-cubierta abierta y no posee un refinamiento* τ_{2F}*-abierto finito.*

Los siguientes resultados, los hemos obtenido generalizando los existentes para espacios topológicos, mezclando los conceptos involucrados en esta tesis: los axiomas de separación por pares y la compacidad por pares, cabe mencionar, que estos resultados son de autoría propia.

Teorema 23 *Sea* (X, τ_1, τ_2) *un espacio bitopológico y* F *un subconjunto de* X τ_{jF}*-compacto respecto a* τ_{iF}*. Si* X *es Hausdorff por pares, entonces* F *es un conjunto* τ_i*-cerrado de* X*.*

Demostración. Probemos que $X - F$ es τ_i-abierto. Sea $x \in X - F$ fijo, para cada $a \in F$ existen $U_a \in \tau_i$, $V_a^x \in \tau_j$ tales que $x \in U_a$, $a \in V_a^x$ con $U_a \cap V_a^x = \emptyset$. La familia $L = \{V_a^x \cap F : a \in F\}$ es claramente una τ_j-cubierta abierta de F, por la τ_{jF}-compacidad de F respecto a τ_{iF}, existe un τ_{iF}-refinamiento finito $M = \left\{W_{a_k}^x \cap F : k = 1, 2, ..., n\right\}$ de L que cubre a F. Definamos $U = \bigcap_{k=1}^{n} U_{a_k} \in \tau_i$, claramente por la construcción

$$U \cap F \subset U_{a_i} \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} \left(W_{a_k}^x \cap F \right) \right) = \emptyset.$$

Así $x \in U \subset (X - F)$ y por tanto, $X - F$ es τ_i-abierto. ■

Teorema 24 *Sea (X, τ_1, τ_2) un espacio bitopológico. Si X es Hausdorff por pares y B-compacto por pares entonces es normal por pares.*

Demostración. Sean $F, G \subset X$, F τ_i-cerrado y G τ_j-cerrado, con $F \cap G = \emptyset$. Por el Teorema 24, F es τ_{iF}-compacto respecto a τ_{jF} y G es τ_{jG}-compacto respecto a τ_{iG}. Para $a \in F$ fijo, y para cada $b \in G$ existen $U_b^a \in \tau_i, V_b^a \in \tau_j$ tales que $a \in U_b^a$, $b \in V_b^a$ con $U_b^a \cap V_b^a = \emptyset$. Ahora, la familia $L = \{V_b^a \cap G : b \in G\}$ es una τ_{jG}-cubierta abierta de G, por la τ_{jG}-compacidad de G respecto a τ_{iG}, existe un τ_{iG}-refinamiento finito

$$M = \left\{W_{b_k}^a \cap G : W_{b_k}^a \in \tau_i, k = 1, 2, ..., n\right\}$$

de L que cubre a G. Sean $W_a = \bigcup_{k=1}^{n} W_{b_k}^a \in \tau_i$, y $U_a = \bigcap_{k=1}^{n} U_{b_k}^a \in \tau_i$. Nótese que $W_a \cap U_a = \emptyset$. La familia $\{U_a \cap F : a \in F\}$ es una τ_i-cubierta abierta de F, por ser τ_{iF}-compacto respecto a τ_{jF}, existe un τ_{jF}-refinamiento finito $\left\{Z_{a_k} \cap F : Z_{a_k} \in \tau_j, k = 1, 2, ..., m\right\}$ que cubre a F. Hagamos

$$V = \bigcap_{k=1}^{n} W_{a_i}, \; U = \bigcup_{k=1}^{m} Z_{a_i},$$

$V \in \tau_i$, $U \in \tau_j$. Con esto, $F \subset U$, $G \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$. Por tanto X es normal por pares. ■

Otro concepto de compacidad por pares es el que enseguida mencionamos y fue dado por Swart en el año 1971, [30]. Cabe mencionar que Datta también manejó este concepto al que llamó semi-compacidad.

Definición 41 *Sea (X, τ_1, τ_2) un espacio bitopológico. El espacio X es semi-**compacto por pares,** si toda cubierta abierta débil por pares posee una subcubierta finita.*

Teorema 25 *Si el espacio X es semi-compacto por pares, entonces todo subconjunto F τ_i-cerrado es semi-compacto por pares, $i \in \{1, 2\}$.*

Demostración. Sea F τ_i-cerrado, $i \in \{1, 2\}$. Luego $X - F$ es τ_i-abierto, por lo que

$$L = \{U_\alpha \cap F : \alpha \in \mathbf{A}, \;\; U_\alpha \in \tau_i \text{ o } U_\alpha \in \tau_j\}$$

es una cubierta abierta débil por pares de F. Claramente

$$\{U_\alpha : \alpha \in \mathbf{A},\; U_\alpha \in \tau_i \text{ o } U_\alpha \in \tau_j\} \cup \{X - F\}$$

es una cubierta abierta débil por pares de X, luego existe una subcubierta finita $M = \{U_{\alpha_i} : i = 1, ..., n\}$ que cubre a X. El abierto $X - F$ puede pertenecer a M o no. Si $X - F \in M$, entonces la colección:

$$\{U_{\alpha_i} \cap F : i = 1, ..., n\} - \{X - F\}$$

es una subcubierta finita débil por pares de L que cubre a F. Si $X - F \notin M$, entonces $\{U_{\alpha_i} \cap F : i = 1, ..., n\}$ es ya una subcubierta finita débil por pares de L que cubre a F. Por tanto, todo τ_i-cerrado es semi-compacto por pares. ■

Teorema 26 *Sea (X, τ_1, τ_2) un espacio bitopológico. Si X es Hausdorff por pares y semi-compacto por pares, entonces es normal por pares.*

Demostración. Sean $A, B \subset X$, con A τ_i-cerrado, B τ_j-cerrado y $A \cap B = \emptyset$. Por el Teorema 25, A es semi-compacto por pares respecto a las topologías $\{\tau_1 \cap A, \tau_2 \cap A\}$ y B es semi-compacto por pares respecto a las topologías $\{\tau_1 \cap B, \tau_2 \cap B\}$. Para $a \in A$ fijo, y para cada $b \in B$ existen $Z_b^a \in \tau_j, W_b^a \in \tau_i$ tales que $a \in Z_b^a$, $b \in W_b^a$ con $Z_b^a \cap W_b^a = \emptyset$. La familia $L = \{W_b^a \cap B : b \in B\}$ es una cubierta abierta débil por pares de B, por la semi-compacidad por pares de B, existe una subcubierta finita $M = \left\{W_{b_k}^a \cap B : W_{b_k}^a \in \tau_i, k = 1, 2, ..., r\right\}$ de L que cubre a B. Sean

$W_a = \bigcup_{k=1}^{r} W_{b_k}^a \in \tau_i$, y $Z_a = \bigcap_{k=1}^{r} Z_{b_i}^a \in \tau_j$. La familia $\{Z_a \cap A : a \in A\}$ es una cubierta abierta débil por pares de A, por la semi-compacidad de A, existe una subcubierta abierta débil finita $\left\{Z_{a_l} \cap A : Z_{a_l} \in \tau_j, l = 1, 2, ..., m\right\}$ que cubre a A. Hagamos $V = \bigcap_{l=1}^{m} W_{a_l}$, $U = \bigcup_{l=1}^{m} Z_{a_l}$, $V \in \tau_i$, $U \in \tau_j$. Con esto, $A \subset U$, $B \subset V$ con $U \cap V = \emptyset$. Por tanto, X es normal por pares. ■

Finalmente enunciaremos el concepto de compacidad por pares según Fletcher, quien lo propone en su artículo [9] en el año 1969. A nuestra consideración, esta es la compacidad que mejor se adapta a la teoría, puesto que una gran cantidad de resultados de la compacidad en los espacios topológicos se llegan a generalizar a los espacios bitopológicos mediante este concepto.

Definición 42 *Sea (X, τ_1, τ_2) un espacio bitopológico. El espacio X es S-**compacto por pares,** si toda cubierta abierta por pares posee una subcubierta finita.*

Teorema 27 *Si el espacio (X, τ_1, τ_2) es S-compacto por pares y F es un conjunto τ_i-cerrado, $i \in \{1, 2\}$, entonces $(F, \tau_{1F}, \tau_{2F})$ es S-compacto por pares.*

Demostración. En efecto, si F es τ_i-cerrado, entonces $X - F$ es τ_i-abierto. Sea

$$L = \{U_\alpha \cap F : \alpha \in \mathbf{A}, U_\alpha \in \tau_i \text{ o } U_\alpha \in \tau_j\}$$

una cubierta abierta por pares de $(F, \tau_{1F}, \tau_{2F})$. Claramente

$$\{U_\alpha : \alpha \in \mathbf{A}, U_\alpha \in \tau_i \text{ o } U_\alpha \in \tau_j\} \cup \{X - F\}$$

es una cubierta abierta por pares de X, luego existe una subcubierta abierta finita $M = \{U_{\alpha_i} : i = 1, ..., n\}$ que cubre a X. El abierto $X - F$ puede pertenecer a M o no. Si $X - F \in M$, entonces

$$\{U_{\alpha_i} \cap F : i = 1, ..., n\} - \{X - F\}$$

es una subcubierta finita por pares de L que cubre a F. Si $X - F \notin M$, entonces $\{U_{\alpha_i} \cap F : i = 1, ..., n\}$ es ya una subcubierta finita por pares de L que cubre a F. Por tanto, la S-compacidad por pares es heredada a los subespacios τ_i-cerrados. ■

Enseguida veremos que los conceptos sobre compacidad dados por Birsan y por Fletcher son de hecho independientes, en el sentido de que hay espacios bitopológicos que son lo uno, pero no lo otro.

Ejemplo 28 *Sea $X = \mathbb{R}$, para $a \in \mathbb{R}$ fijo, consideremos las topologías*

$$\tau_1 = \{\mathbb{R}, \emptyset, (-\infty, a), [a, +\infty)\},$$

$$\tau_2 = \{\mathbb{R}, \emptyset, (-\infty, a), (a, +\infty), \mathbb{R} - \{a\}\}.$$

El espacio bitopológico (X, τ_1, τ_2) es compacto por pares según Fletcher, pues cualquier cubierta abierta por pares es finita y por tanto, posee una subcubierta finita. Pero X no es compacto por pares según Bîrsan, ya que la cubierta

$$\{(-\infty, a), [a, +\infty)\}$$

es τ_1-cubierta y no posee un refinamiento τ_2-abierto que cubra a X.

Con el ejemplo anterior mostramos que la compacidad por pares definida por Fletcher, no implica la compacidad por pares definida por Bîrsan.

Ejemplo 29 *Sea $X = \mathbb{R}$, con las topologías:*

$$\tau_1 = \{\mathbb{R}, \emptyset, \{1\}\}$$

y

$$\tau_2 = \{\mathbb{R}, \emptyset, \mathbb{R} - \{1\}\} \cup \{(-\infty, a) - \{1\} : a \epsilon \mathbb{R}\},$$

es un espacio bitopológico (X, τ_1, τ_2). La única τ_1-cubierta abierta de X es $\{\mathbb{R}\}$ y tiene a $\{\mathbb{R}\}$ como refinamiento τ_2-abierto. Por otro lado, cualquier τ_2-cubierta abierta debe contener al τ_2-abierto $\mathbb{R}$ y por consecuencia, todas *tienen un τ_1-refinamiento finito. Luego, el espacio bitopológico (X, τ_1, τ_2) es compacto por pares, según Bîrsan. Sin embargo,*

$$\{(-\infty, a) - \{1\} : a\epsilon\mathbb{R}\} \cup \{1\}$$

es una cubierta abierta por pares y no posee un subcubierta finita. Así el espacio (X, τ_1, τ_2) no es compacto por pares, según Fletcher.

Con este ejemplo se muestra que la compacidad por pares definida por Bîrsan, no implica la compacidad por pares definida por Fletcher.

De los dos ejemplos anteriores se deduce que los dos conceptos de compacidad por pares son independientes.

Los espacios bitopológicos B-compactos o los semi-compactos pueden ser T_0 o T_1, pero no pueden ser Hausdorff por pares, a menos que sus topologías sean iguales. Para ver los detalles de la demostración del siguiente teorema puede consultar [9].

Teorema 28 *Sea (X, τ_1, τ_2) un espacio bitopológico Hausdorff por pares. Si ocurre:*
a) X es B-compacto por pares o
b) X es semi compacto por pares,
entonces $\tau_1 = \tau_2$.

Mukharjee en [19], define la compacidad fuerte por pares y muestra que todo espacio compacto fuerte por pares es compacto por pares según Fletcher y también B-compacto por pares.

Definición 43 *Sea (X, τ_1, τ_2) un espacio bitopológico. Una colección de subconjuntos de X, $L = \{U_\alpha : \alpha \in \mathbf{A}\}$, es llamada dualmente abierta por pares, si cada $U_\alpha \in L$ es (τ_i, τ_j)-dualmente abierto, $i = 1, 2,$ y para cada $i \in \{1, 2\}$, $L \cap \tau_i$ es no vacía. Y si además la familia L cubre a X, entonces L se llamará cubierta dualmente abierta por pares.*

Definición 44 *Sea* (X, τ_1, τ_2) *un espacio bitopológico, éste es llamado fuertemente compacto por pares si cada cubierta abierta por pares* L *de* X *tiene una subcolección finita* M*, tal que* $\left\{int_{\tau_j} V : V \in M \cap \tau_i, i \in \{1,2\}\right\}$ *cubre a* X*.*

El resultado que a continuación mencionamos es producto de nuestra investigación sobre estos temas.

Teorema 29 *Si* (X, τ_1, τ_2) *es fuertemente compacto por pares entonces todo* F τ_i*-cerrado es S-compacto por pares respecto a las topologías* τ_{iF} *y* τ_{jF}*.*

Demostración. Nótese que si el espacio X es fuertemente compacto por pares y F es un conjunto τ_1-cerrado, entonces $X - F$ es τ_1-abierto. Sea $L = \{U_\alpha \cap F : U_\alpha \in \tau_i, i \in \{1,2\}, \alpha \in \mathbf{A}\}$, cualquier cubierta abierta por pares de F, se cumple que $\{U_\alpha : \alpha \in \mathbf{A}\} \cup \{X - F\}$ es una cubierta abierta por pares de X. Como X es fuertemente compacto por pares, existe una subcubierta finita M tal que

$$\left\{int_{\tau_j} U_{\alpha_k} : U_{\alpha_k} \in M \cap \tau_i, i \in \{1,2\}\right\} \cup \{int_{\tau_2}(X - F)\}$$

cubre a X. Nótese que $F \cap (int_{\tau_2}(X - F)) = \emptyset$ y por tanto

$$\begin{aligned} F &\subset \left(\bigcup_{U_{\alpha_k} \in M \cap \tau_i} int_{\tau_j} U_{\alpha_k} \right) \cap F \\ &= \bigcup_{U_{\alpha_k} \in M \cap \tau_i} \left(\left(int_{\tau_j} U_{\alpha_k} \right) \cap F \right) \\ &\subset \bigcup_{U_{\alpha_k} \in M \cap \tau_i} \left(U_{\alpha_k} \cap F \right), \end{aligned}$$

de lo anterior, la familia

$$\{U_{\alpha_k} \cap F : U_{\alpha_k} \in M\}$$

cubre a F y por tanto $(F, \tau_{iF}, \tau_{jF})$ es S-compacto por pares. ■

Ejemplo 30 *Sea $X=\mathbb{R}$, con las topologías*

$$\tau_1=\{\mathbb{R},\emptyset,(-\infty,a],(a,+\infty)\},$$

$$\tau_2=\{\mathbb{R},\emptyset,(-\infty,a),(a,+\infty),(-\infty,a],\mathbb{R}-\{a\}\}.$$

X es fuertemente compacto por pares.

Si el espacio (X,τ_1,τ_2) es fuertemente compacto por pares, entonces cada cubierta abierta por pares L tiene una subcolección finita M que cumple:

$$X=\cup\left\{int_{\tau_j}(V):V\in M\cap\tau_i,i\in\{1,2\}\right\},$$

pero $int_{\tau_j}V\subset V$, luego

$$X\;=\;\cup\left\{int_{\tau_j}(V):V\in M\cap\tau_i,i\in\{1,2\}\right\}$$

$$\subset\;\cup\{V:V\in M\cap\tau_i,i\in\{1,2\}\}$$

de aquí que M es una subcubierta abierta finita de L y por tanto, la compacidad fuerte por pares implica la compacidad por pares definida por Fletcher. Sin embargo, el recíproco es falso. Veámoslo con el ejemplo siguiente:

Ejemplo 31 *Sea $X=\mathbb{R}$ y $a\in\mathbb{R}$ fijo. Con las topologías:*

$$\tau_1=\{\mathbb{R},\emptyset,(-\infty,a),[a,+\infty)\}$$

y

$$\tau_2=\{\mathbb{R},\emptyset,(-\infty,a),(a,+\infty),\mathbb{R}-\{a\}\}.$$

El espacio no es fuertemente compacto por pares pues la cubierta

$$\{(-\infty,a),[a,+\infty)\},$$

donde $(-\infty,a)\in\tau_2$ y $[a,+\infty)\in\tau_1$ no tiene una subcubierta finita cuyos interiores cubran a X, esto es porque

$$\{int_{\tau_1}(-\infty,a),\;int_{\tau_2}[a,+\infty)\}=\{(-\infty,a),\;(a,+\infty)\}$$

no cubre a X.

El siguiente resultado nos muestra que en un espacio bitopológico fuertemente compacto por pares, todo subconjunto cerrado de X, es B-compacto por pares (Bîrsan).

Teorema 30 *Si* (X, τ_1, τ_2) *es fuertemente compacto por pares entonces todo subconjunto* F τ_j*-cerrado de* X, $j = 1, 2$, *es* τ_{iF}*-compacto respecto a* τ_{jF}.

Demostración. Sea $F \subset X$, τ_j-cerrado, y sea $L = \{U_\alpha \cap F : \alpha \in \mathbf{A}\}$ una τ_{iF}-cubierta abierta de F. Luego $L' \cup \{X - F\}$ es una cubierta abierta por pares de X, donde $L' = \{U_\alpha : \alpha \in \mathbf{A}\}$, así que existe una subcubierta finita $M = \{V_1, ..., V_r\}$ de $L' \cup \{X - F\}$, tal que

$$X = \bigcup_{i=1,2} \left\{int_{\tau_j}(V_k) : V_k \in M \cap \tau_i\right\} \cup int_{\tau_i}(X - F).$$

Como $int_{\tau_i}(X - F) \subset X - F$, el resto de los elementos de la familia M deben cumplir que:

$$\begin{aligned} F &= \bigcup_{i=1,2} \left\{int_{\tau_j}(V_k) : V_k \in M \cap \tau_i\right\} \\ &\subset \bigcup_{i=1,2} \{V_k \cap F : V_k \in M\} \end{aligned}$$

el cual es un refinamiento finito de τ_j-abierto. Por tanto F es τ_{iF}-compacto respecto a τ_{jF}. ■

Nótese también que en un espacio bitopológico (X, τ_1, τ_2), el subconjunto X es cerrado respecto a ambas topologías, luego, si (X, τ_1, τ_2) es fuertemente compacto por pares entonces (X, τ_1, τ_2) es B-compacto por pares según la definición dada por Bîrsan.

4.3. Caracterizaciones de la compacidad por pares

Presentaremos ahora un resultado de caracterización de la compacidad para espacios bitopológicos utilizando la B-compacidad por pares.

Teorema 31 *Sea (X, τ_1, τ_2) un espacio bitopológico. Para $i, j \in \{1, 2\}$, con $i \neq j$, las dos propiedades siguientes son equivalentes:*

1) *X es τ_i-compacto con respecto a τ_j.*

2) *Si una familia $\{F_\alpha : \alpha \in \mathbf{A}\}$ de conjuntos τ_i-cerrados en X satisface*

$$\bigcap_{\alpha \in \Im} F_\alpha = \emptyset,$$

entonces existe una familia finita $\{H_\beta : \beta \in \mathbf{B}\}$ de conjuntos τ_j-cerrados con $\bigcap_{\beta \in \mathcal{L}} H_\beta = \emptyset$ y tal que para cada $\beta \in \mathbf{B}$ existe un $\alpha \in \mathbf{A}$, con $H_\beta \supset F_\alpha$.

Demostración. En esta prueba, los conjuntos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ representan conjuntos de índices.

1) $\Rightarrow$ **2)** Sea $\{F_\alpha : \alpha \in \mathbf{A}\}$ una familia de conjuntos τ_i-cerrados en X satisface

$$\bigcap_{\alpha \in \mathbf{A}} F_\alpha = \emptyset,$$

esto implica que $\bigcup_{\alpha \in \mathbf{A}} (F_\alpha)^c = X$, lo que provoca que $\{F_\alpha^c : \alpha \in \mathbf{A}\}$ sea una τ_i-cubierta abierta. Por la B-compacidad por pares de X, existe un refinamiento $\{H_\beta^c : \beta \in \mathbf{B}\}$ $(\mathbf{B} \subset \mathbf{A})$de conjuntos τ_j-abiertos que cumplen que para cada $\beta \in \mathbf{B}$, existe $\alpha \in \mathbf{A}$, tal que $H_\beta^c \subset F_\alpha^c$ y que sigue cubriendo a X. De aquí que la familia $\{H_\beta : \beta \in \mathbf{B}\}$ es la familia buscada que cumple 2.

2) $\Rightarrow$ **1)** Sea $\Gamma = \{U_\alpha : \alpha \in \mathbf{A}\}$ una τ_i-cubierta abierta de X, esto es, $\bigcup_{\alpha \in \mathbf{A}} U_\alpha = X$, donde $U_\alpha \in \tau_i$.

Sea $\mathbf{F} = \{U_\alpha^c : \alpha \in \mathbf{A}\}$. Esta familia esta formada por conjuntos τ_i-cerrados en X que satisface

$$\bigcap_{\alpha \in \mathbf{A}} U_\alpha^c = \emptyset.$$

Por 2), existe una familia finita $\{H_\beta : \beta \in \mathbf{B}\}$ de conjuntos τ_j-cerrados con $\bigcap_{\beta \in \mathbf{B}} H_\beta = \emptyset$ y tal que para cada $\beta \in \mathbf{B}$ existe un $\alpha \in \mathbf{A}$, con $H_\beta \supset U_\alpha^c$. Es claro que $H_\beta^c \subset U_\alpha$, que $H_\beta^c \in \tau_j$ y que $\bigcup\limits_{\beta\in\mathbf{B}} \mathrm{H}_\beta^c = X$. Así que $\{H_\beta : \beta \in \mathbf{B}\}$ es el refinamiento finito τ_j-abierto buscado. Por tanto, X es τ_i-compacto con respecto a τ_j. ■

Bien es sabido que en un espacio topológico, una caracterización de la compacidad es que cada filtro o cada base de filtro tenga un punto de acumulación, ver [8]. Veamos que sucede en un espacio bitopológico.

Teorema 32 *Sea (X, τ_1, τ_2) un espacio bitopológico. Si X es B-compacto, entonces cada de filtro en X tiene al menos un τ_i-punto de acumulación.*

Demostración. Supongamos que existe un filtro $\mathcal{F}$ que no tiene τ_i-puntos de acumulación, esto es, que $\bigcap\limits_{F\in\mathcal{F}} cl_{\tau_i}(F) = \emptyset$, la familia $\{cl_{\tau_i}(F) : F \in \mathcal{F}\}$ es un familia de τ_i-cerrados que cumplen que $\bigcap\limits_{F\in\mathcal{F}} cl_{\tau_i}(F) = \emptyset$, como X es τ_i-compacto con respecto a τ_j, existe una familia finita $\{H_\beta : \beta \in \mathbf{B}\}$ de conjuntos τ_j-cerrados con $\bigcap\limits_{\beta\in\mathbf{B}} H_\beta = \emptyset$ y tal que para cada $\beta \in \mathbf{B}$, existe un $\alpha \in \mathcal{F}$, con $H_\beta \supset cl_{\tau_i}(F_\alpha)$. Luego

$$\bigcap_{\beta\in\mathbf{B}} F \subset \bigcap_{\beta\in\mathbf{B}} cl_{\tau_i}(F) \subset \bigcap_{\beta\in\mathbf{B}} H_\beta = \emptyset$$

lo cual contradice que $\mathcal{F}$ es un filtro. Así que debe existir $x \in \bigcap\limits_{F\in\mathcal{F}} cl_{\tau_i}(F)$ y por tanto ser un τ_i-punto de acumulación. ■

El recíproco del Teorema 32 es falso como se verá en el ejemplo siguiente:

Ejemplo 32 *Sea* $X = \{a, b, c\}$, *con las topologías*

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a, b\}\}$$

y

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a\}\}.$$

Una τ_2-cubierta abierta de X es $\Gamma = \{\{a, b\}, \{a, c\}\}$ pero éste no tiene un refinamiento finito τ_1-abierto, por tanto X no es τ_2-compacto con respecto a τ_1. Por otro lado, los posibles filtros de X son:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_1 = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\},\ X\},\\
&\mathcal{F}_2 = \{\{b\}, \{a, b\}, \{b, c\},\ X\},\\
&\mathcal{F}_3 = \{\{c\}, \{a, c\}, \{b, c\},\ X\},\\
&\mathcal{F}_4 = \{\{a, b\},\ X\},\\
&\mathcal{F}_5 = \{\{a, c\},\ X\},\\
&\mathcal{F}_6 = \{\{b, c\},\ X\},\\
&\mathcal{F}_7 = \{X\}.
\end{aligned}$$

Obsérvese que $cl_{\tau_2}\{a\} = X$, $cl_{\tau_2}\{a, b\} = X$, $cl_{\tau_2}\{a, c\} = X$, así que $\mathcal{F}_1$ tiene τ_2-puntos de acumulación. Dado que $cl_{\tau_1}\{a\} = \{a, c\}$, $cl_{\tau_1}\{a, b\} = X$, $cl_{\tau_1}\{a, c\} = \{a, c\}$, se sigue que $\mathcal{F}_1$ tiene τ_1-puntos de acumulación.

Por otro lado, $cl_{\tau_2}\{b\} = \{b\}$, $cl_{\tau_2}\{a, b\} = X$, $cl_{\tau_2}\{b, c\} = \{b, c\}$, así que $\mathcal{F}_2$ tiene τ_2-puntos de acumulación, dado que $cl_{\tau_1}\{b\} = X$, $cl_{\tau_1}\{a, b\} = X$, $cl_{\tau_1}\{b, c\} = X$, se tiene que $\mathcal{F}_2$ tiene τ_1-puntos de acumulación.

Para $\mathcal{F}_3$, $cl_{\tau_2}\{c\} = \{c\}$, $cl_{\tau_2}\{a, c\} = X$, $cl_{\tau_2}\{b, c\} = \{b, c\}$, así que $\mathcal{F}_3$ tiene τ_2-puntos de acumulación. Como $cl_{\tau_1}\{c\} = \{c\}$, $cl_{\tau_1}\{a, c\} = \{a, c\}$, $cl_{\tau_1}\{b, c\} = X$, entonces $\mathcal{F}_3$ tiene τ_1-puntos de acumulación.

Para $\mathcal{F}_4, \mathcal{F}_5$ y $\mathcal{F}_6$, $cl_{\tau_2}\{a, b\} = X$, $cl_{\tau_2}\{a, c\} = X$, $cl_{\tau_2}\{b, c\} = \{b, c\}$, así que $\mathcal{F}_4, \mathcal{F}_5$ y $\mathcal{F}_6$, tienen τ_2-puntos de acumulación. De que $cl_{\tau_1}\{a, b\} = X$, $cl_{\tau_1}\{a, c\} = \{a, c\}$, $cl_{\tau_1}\{b, c\} = X$, se concluye que $\mathcal{F}_4, \mathcal{F}_5$ y $\mathcal{F}_6$, tienen τ_1-puntos de acumulación.

Finalmente, $cl_{\tau_i}X = X$, así que $\mathcal{F}_7$ tiene τ_i-puntos de acumulación para $i \in \{1, 2\}$.

Con lo anterior tenemos un espacio bitopológico donde cada filtro tiene τ_i-puntos de acumulación, $i \in \{1, 2\}$, pero que no es B-compacto por pares.

Veamos ahora qué sucede con las caracterizaciones de la compacidad por pares según Fletcher.

Teorema 33 *En un espacio bitopológico* (X, τ_1, τ_2), *las siguientes seis propiedades son equivalentes:*

1) X *es S-compacto por pares.*

2) *Cada cubierta abierta por pares de* X *tiene una subcubierta abierta puntualmente finita de* X.

3) *Cada cubierta abierta por pares de* X *tiene una subcubierta abierta irreducible que cubre a* X.

4) *Si una familia* $\{F_\alpha : \alpha \in \mathbf{A}\}$ *de conjuntos cerrada por pares en* X *satisface* $\bigcap_{\alpha \in \mathbf{A}} F_\alpha = \emptyset$, *entonces existe una subfamilia finita* $\{F_{\alpha_i} : i = 1, .., n\}$ *con* $\bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} = \emptyset$.

5) *Cada filtro* $\mathcal{F}$ *en* X *tiene un elemento* x *que es un* τ_i*-punto de acumulación,* $i = 1, 2$.

6) *Cada de filtro maximal* M *en* X *es* τ_i*-convergente a exactamente un* x, $i \in \{1, 2\}$.

Demostración. En esta prueba, los conjuntos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ representan conjuntos de índices.

1) $\Rightarrow$ **2**) Es claro, ya que cada cubierta abierta finita es puntualmente finita.

2) $\Rightarrow$ **3**) Sea $\{U_\alpha : \alpha \in \mathbf{A}\}$ una cubierta abierta por pares de X. Por 2), ésta tiene una subcubierta $\Lambda = \{U_\beta : \beta \in \mathbf{B}\}$, abierta puntualmente finita, ($\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$). Al igual que antes, llamémosle a una familia $Q \subset \Lambda$ removible si $\Lambda - Q$ sigue cubriendo a X. El conjunto

$$\Upsilon = \{Q \subset \Lambda : Q \text{ es removible}\}$$

con la inclusión se convierte en un conjunto parcialmente ordenado. Si $\{R_\mu\}$ es una cadena en Υ, la familia $R = \underset{\mu}{\cup} R_\mu$ es una cota superior para la cadena y es un elemento de Υ; ya que si esto no ocurre, es decir, si $R \notin \Upsilon$, entonces $\Lambda - R$ no cubre a X y por tanto, existe $x \in X$, tal que el número finito de conjuntos $U_{\beta_1}, ..., U_{\beta_n}$ a los que pertenece x están todos en R. Puesto que $\{R_\mu\}$ es una cadena, estos U_{β_i} deben estár todos en algún R_μ, lo cual contradice que R_μ es removible. Así, por el lema de Zorn existe una familia removible maximal R_0 y así $\Lambda - R_0$ es irreducible.

3) $\Rightarrow$ **4)** Sea $\{F_\alpha : \alpha \in \mathbf{A}\}$ una familia de conjuntos cerrada por pares en X que satisface que $\bigcap\limits_{\alpha\in\mathbf{A}} F_\alpha = \emptyset$. La familia $\Gamma = \{X - F_\alpha : \alpha \in \mathbf{A}\}$ es una cubierta abierta por pares de X y por hipótesis ésta tiene una subcubierta abierta irreducible $\Lambda = \{X - F_\beta : \beta \in \mathbf{B}\}$, con $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$.
Sea $\aleph_\mu$ la cardinalidad de $\mathbf{B}$ y ω_μ el ordinal correspondiente a $\aleph_\mu$. Con lo anterior, podemos reescribir a Λ como $\Lambda = \{X - F_\beta : \beta \prec \omega_\mu\}$. Para cada $\beta \prec \omega_\mu$, si $X - F_\beta$ es τ_i-abierto, se define $W_\beta = \bigcup\{X - F_\alpha : \alpha \preceq \beta$ y $X - F_\alpha$ es τ_i-abierto$\}$. Obsérvese que W_β es τ_i-abierto, $(i = 1, 2)$, y por tanto la familia $\digamma = \{W_\beta : \beta \prec \omega_\mu\}$ es una cubierta de X, que puede ser cubierta abierta por pares o $\digamma \cap \tau_j = \emptyset$ para un $j = 1$ ó 2. Para el primer caso, directamente, si $\aleph_\mu \geq \aleph_0$ la cubierta abierta por pares $\digamma$ no puede tener una subcubierta irreducible. Para el segundo caso podemos agregar de Γ un $X - F_{\alpha_1}$ τ_j-abierto no vacío y distinto de X a $\digamma$ (si algún $X - F_{\alpha_1} = X$, el resultado es claro), de tal manera que $\digamma \cup \{X - F_{\alpha_1}\}$ es una cubierta abierta por pares. Nótese que el conjunto $X - F_{\alpha_1}$ está contenido propiamente en algún W_β, luego las subcubiertas de $\digamma \cup \{X - F_{\alpha_1}\}$ son subcubiertas de $\digamma$. Al igual que en el primer caso, si $\aleph_\mu \geq \aleph_0$ la cubierta abierta por pares $\digamma \cup \{X - F_{\alpha_1}\}$ no podrá tener una subcubierta irreducible. Entonces necesariamente $\aleph_\mu = m$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Por tanto $X = \bigcup\limits_{i=1}^{m} \left(X - F_{\alpha_i}\right)$, de manera equivalente $\bigcap\limits_{i=1}^{m} F_{\alpha_i} = \emptyset$.

4) $\Rightarrow$ **5)** Sea $\mathcal{F} = \{A_\alpha : \alpha \in \mathbf{A}\}$ un filtro en X, puesto que todas las intersecciones finitas de los A_α son no vacías, también lo son todas las intersecciones finitas de combinaciones de los $cl_{\tau_i}(A_\alpha)$ y $cl_{\tau_j}(A_\alpha)$. Si

$$\left[\bigcap\{cl_{\tau_i}(A_\alpha) : \alpha \in \mathbf{A}\}\right] \cap \left[\bigcap\{cl_{\tau_j}(A_\alpha) : \alpha \in \mathbf{A}\}\right] = \emptyset,$$

entonces la hipótesis 4) asegura la existencia de una subcolección finita con intersección vacía, lo cual es contradictorio. Por lo anterior, existe $x \in X$ que cumple

$$x \in \bigcap\{cl_{\tau_i}(A_\alpha) : \alpha \in \mathbf{A}\} \;\text{ y }\; x \in \bigcap\{cl_{\tau_j}(A_\alpha) : \alpha \in \mathbf{A}\}$$

lo cual significa que x es τ_i-punto de acumulación para $\mathcal{F}$, $i = 1, 2$.

5) $\Rightarrow$ **6)** Puesto que M es un filtro, éste tiene un elemento x que es τ_i-punto de acumulación, $i = 1, 2$ y como M es maximal, $M \xrightarrow{\tau_i} x$ para $i = 1, 2$.

6) $\Rightarrow$ **5)** Dado un filtro $\mathcal{F}$, existe un filtro maximal M, $M \mapsto \mathcal{F}$, por 5) este M es τ_i-convergente a un x para $i = 1, 2$ y por tanto $\mathcal{F}$ tiene en x un punto que es τ_i-punto de acumulación, $i = 1, 2$.

5) $\Rightarrow$ **1)** Sea $\{U_\alpha : \alpha \in \mathbf{A}\}$ una cubierta abierta por pares de X. Supongamos que no existe alguna subcolección finita que cubra a X, esto es, que cualquier subcolección finita cumple que $\bigcup\limits_{\alpha \in N} U_\alpha = \emptyset$, para cualquier subconjunto N finito. Luego, la familia $\{X - U_\alpha : \alpha \in \mathbf{A}\}$ es una base de filtro. Por 5), existe un $x \in X$ el cual es τ_i-punto de acumulación para $i = 1, 2$, esto es:

$$x \in \bigcap \{cl_{\tau_i}(X - U_\alpha) : \alpha \in \mathbf{A}\} \ \text{ y } \ x \in \bigcap \{cl_{\tau_j}(X - U_\alpha) : \alpha \in \mathbf{A}\}. \quad (4.1a)$$

Separemos $\mathbf{A}$ como $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2$, donde $\mathbf{A}_i = \{\alpha \in \mathbf{A} : F_\alpha \text{ es } \tau_i\text{-cerrado}\}$, $i = 1, 2$. Con esto (4.1a) puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} x \ &\in \left(\bigcap_{\alpha \in \mathbf{A}_1} (X - U_\alpha) \right) \cap \left(\bigcap_{\alpha \in \mathbf{A}_2} cl_{\tau_1}(X - U_\alpha) \right) \quad \text{y} \\ x \ &\in \left(\bigcap_{\alpha \in \mathbf{A}_2} (X - U_\alpha) \right) \cap \left(\bigcap_{\alpha \in \mathbf{A}_1} cl_{\tau_2}(X - U_\alpha) \right), \end{aligned}$$

así,

$$\begin{aligned}
x &\in \left[\left(\bigcap_{\alpha\in\mathbf{A}_1}(X-U_\alpha)\right)\cap\left(\bigcap_{\alpha\in\mathbf{A}_2}cl_{\tau_1}(X-U_\alpha)\right)\right]\\
&\quad\cap\left[\left(\bigcap_{\alpha\in\mathbf{A}_2}(X-U_\alpha)\right)\cap\left(\bigcap_{\alpha\in\mathbf{A}_1}cl_{\tau_2}(X-U_\alpha)\right)\right],\\
x &\in \left[\left(\bigcap_{\alpha\in\mathbf{A}_1}(X-U_\alpha)\right)\cap\left(\bigcap_{\alpha\in\mathbf{A}_2}(X-U_\alpha)\right)\right]\\
&\quad\cap\left[\left(\bigcap_{\alpha\in\mathbf{A}_1}cl_{\tau_2}(X-U_\alpha)\right)\cap\left(\bigcap_{\alpha\in\mathbf{A}_2}cl_{\tau_1}(X-U_\alpha)\right)\right],\\
x &\in \left(\bigcap_{\alpha\in\mathbf{A}}(X-U_\alpha)\right)\\
&\quad\cap\left[\left(\bigcap_{\alpha\in\mathbf{A}_1}cl_{\tau_2}(X-U_\alpha)\right)\cap\left(\bigcap_{\alpha\in\mathbf{A}_2}cl_{\tau_1}(X-U_\alpha)\right)\right],
\end{aligned}$$

luego $x \in \bigcap_{\alpha\in\mathbf{A}}(X-U_\alpha) \neq \emptyset$ y por consiguiente, $\bigcup_{\alpha\in\mathbf{A}} U_\alpha \neq X$, lo que contradice el hecho de cubrir a X. ■

Conclusiones

En este trabajo utilizamos diversas herramientas de la matemática conjuntista para lograr hacer algunas generalizaciones a los espacios bitopológicos de resultados importantes que se tienen en espacios topológicos, principalmente sobre resultados que se basan en los axiomas de separación, así como sobre caracterizaciones de la compacidad.

Kelly en 1963 realizó la generalización del lema de Urysohn con la normalidad por pares, aquí hemos probado la correspondiente generalización con la normalidad por pares fuerte. En este contexto podemos garantizar que para cualesquiera par de conjuntos A τ_i-cerrado y B τ_j-cerrado de un espacio bitopológico (X, τ_1, τ_2), éstos pueden ser separados por una función real bicontinua, esto es, existe $h : X \to [0, 1]$ bicontinua con $h_{|A} = 0$ y $h_{|B} = 1$.

También logramos la generalización del Teorema de Katĕtov con la normalidad por pares fuerte, en este contexto podemos garantizar la existencia de una función real h bicontinua entre cualquier par de funciones reales $f \leq g$ con f semicontinua superiormente y g semicontinua inferiormente. Cabe mencionar que las generalizaciones de estos dos importantes teoremas han sido publicados en el artículo [17], con el nombre: *On bicontinuous functions in strongly pairwise normal spaces,* en la revista: *Global Journal of Pure and Applied Mathematics.*

Finalmente, en cuanto a la compacidad en espacios bitopológicos, hemos probado cinco caracterizaciones de la compacidad por pares según Fletcher, mientras que no hemos logrado hacer lo mismo con la compacidad según Birsan. Por lo tanto, podemos concluir que la compacidad por pares según Fletcher es la generalización más adecuada del concepto de compacidad en un espacio topológico.

PROBLEMAS ABIERTOS: En el transcurso de la actividad de investigación usualmente van surgiendo preguntas y nuevos problemas, siendo algunas veces reelevantes para el tema que se está considerando. En nuestro caso no hay excepción alguna y nos han quedado interrogantes que necesitan un estudio cuidadoso que nos ayude a ver la luz que nos permita asegurar de si se trata de trivialidades disfrazadas o de problemas delicados que puedan ser denominados abiertos, dado que su solución sería de gran interés para el tema en cuestión. En esta tarea de investigación tenemos dos problemas abiertos: uno es las caracterizaciones de la compacidad por pares fuertemente y el impacto que puedan tener en la generación de nuevos resultados y otro problema es la aplicación de los resultados obtenidos en los espacios de complejidad de algoritmos, ya que estos son casos particulares de espacios bitopológicos y actualmente están siendo ampliamente estudiados.

Bibliografía

[1] Alegre C., Ferrando I., García L. M. y Sánchez-Pérez E. A., *Compactness in asymmetric normed spaces,* Topology Appl., 155, (2008), 527-539.

[2] Alimov A R., *On the estructure of the complements of Chebysev sets,* Funct. Anal. Appl. **35,** (2001), 176-182.

[3] Birsan T., *Compacité dans les espaces bitopologiques*, An. st. Univ. lasi, s. I. a., Matematica 15, (1969), 317-328.

[4] Casarrubias F., y Tamariz A., *Elementos de la Topología de Conjuntos*, Dt. Math.-Verein 81, (1979), 49-86.

[5] Cobzas S., *Functional Analysis in Asymmetric normed Spaces,* Mathematics FA arXiv: 006.117v, (2010).

[6] Cooke I. E. y Reilly I. L., *On bitopological compactness,* J. London Math. Soc. (2) 13(1975), 518-522.

[7] Dávila Albarran J. L., *Lema de Urysohn y sus aplicaciones,* Tesis de Master, Posgrado en Matemáticas, Master de Matemáticas Avanzadas, Universidad de Murcia. (2013).

[8] Dugundji J., *Topology,* Allyn and Bacon Inc. (1966) .

[9] Fletcher P., Hoyle H. B. III y C. W. Patty, *The comparison of topologies,* Duke Math. J. 36, (1969), 325-331.

[10] García-Raffi L. M., *Compactness and finite dimension in asymmetric normed linear spaces*, Topology Appl. **153**, (2005) , 844-853.

[11] García-Raffi L. M, Romaguera S. y Sánchez Pérez E. A., *Sequence spaces and asymmetric norms in the theory of computational complexity*, Math. Comput. Model. **36**, (2002) , 1-11.

[12] García-Raffi L. M., Romaguera S. y Sánchez Pérez E. A., *The bicompletion of an asymmetric normed linear space*, Acta Math. Hungar. **97**, (2002) , 183-191.

[13] García-Raffi L. M, Romaguera S. y Sánchez Pérez E. A., *The dual space of an asymmetric normed linear space*, Quaestiones Mathematicae **26**, (2003) , 83-96.

[14] García-Raffi L. M, Romaguera S., Sánchez Pérez E. A. y O. Valero, *Metrizability of the unit ball of the dual of a quasi-normed cone*, Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8) **7** (2004), No. 2, 483-492.

[15] Hernández J. M., Castañeda C. H., Álvarez L. C., Tochihuitl V., Carrasco J. L., Ramírez T. M. and Vázquez R., *Espacios con distancias no simétricas*, Temas de Ciencia y Tecnología, Vol. 18, number 53, (2014).

[16] Hernández, J. M., Álvarez L. C. *On bicontinuous functions in strongly pairwise normal spaces,* Global Journal of Pure and Applied Mathematics. Volume 12, No. 1. (2016), 1053-1060.

[17] Cartan H., *Théorie des Filtres,* C. R. Acad. Sci. Paris 205, (1937).

[18] Cartan H., *Filtres et ultrafiltres,* C. R. Acad. Sci. Paris 205, (1937).

[19] Mukharjee A., *Some new bitopological notions,* Publications de L´Institute Mathematique. Nouvelle série, tome 93 (107). (2013) , 165-172.

[20] Katetov M., *On real-valued functions in topological spaces*, Fund. Math., 38, (1951), 85-91.

[21] Katetov M., Correction to: *On real-valued functions in topological spaces,* Fund. Math., 40, (1953), 203-205.

[22] Kelly J. C., *Bitopological spaces*, Proc. London Math. Soc. **13,** (1963), 71-89.

[23] Kilicman A. y Salleh Z., *On pairwise Lindelöf bitopological spaces,* Topology and its Applications. Elsevier. 154, (2007), 1600-1607.

[24] Künzi H-P. A., *Nonsymmetric distances and their associated topologies: About the origins of basic ideas in the area of asymmetric topology*, In C.E. Aull and R. Lowen, (editors), Handbook of the History of General Topology, Vol. **3**, Dordrecht, Kluwer Acad. Pub. (2001), 853-968.

[25] Lane E. P., *Bitopological spaces and quasi-uniform spaces,* Proc. Londodn Math. Soc. 17, (1967), 241-256.

[26] Oltra S and Valero O, *Isometries on quasi-normed cones and bicompletation*, New Zealand J. Math. **33,** (2004), 83-90.

[27] Reilly I. L., *Quasi-gauges, quasi-uniformities and bitopological spaces,* Thesis–University of Illinois, (1970).

[28] Riesz F., *Stetigkeisbegriff and abstrkte Mengelehre,* Atti IV Congresso Internaz. Mat. Vol. II (Roma 1908), R. Accad. Lincei, Rome, (1909), 18-24.

[29] Saegrove M. J., *On bitopological spaces*, Iowa State University, Digital Repositroy@Iowa State University. Retrospective Theses and Dissertations. Paper 4914, (1971).

[30] Stwart J., *Total disconnectedness in bitopological spaces and product bitopo0logical spaces,* Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 74, Indag. Math. 33, (1971), 135-145.

[31] Schellekens M., *The Smiyth completion: a commun foundation for denotational semantics and complexity analysis*, Electronic Notes in Theorical Computer Science, 1, (1995), 535-556.