

# Capítulo 7

## Modelado Dinámico por Inspección para Convertidores de Potencia CD a CD Conmutados: Un Enfoque Basado en Grafos

Richard Marquez, Marco Antonio Contreras Ordaz<sup>1</sup>  
José Luis Carrasco Pacheco<sup>2</sup>

---

**Abstract:** Graphs have been used in electrical applications since Kirchoff. This work in progress uses some basic principles of Graph Theory to analyze and obtain dynamical models of a large class of PWM (switch-mode) DC-DC power converters operating on continuous conduction mode (CCM). To a switched-mode power converter we associate two graphs, the on- and off-type graphs depending on the transistor on and off states. We obtain *by inspection* an anti-symmetric matrix  $\mathcal{J}(u)$  and an input matrix  $\beta(u)$  based on some topological criteria of the resulting circuit's graphs, relying on simple, connected, closed cycles; these matrices are in fact a sort of incidence matrices. Both are at the core of the resulting bilinear differential equations modeling a PWM DC-DC power converter. Written in a tutorial fashion, we analyze some classic but illustrative power converters containing a transistor and a diode. As the ubiquitous Kirchoff's Laws, this approach will ease the student/engineer task of analysis of classical (and novel) power converters architectures.

**Keywords:** Graph theory, PWM DC-DC power converters, (bilinear) differential equations.

---

<sup>1</sup>{rmarquez,marco.contreras}@mixteco.utm.mx. Instituto de Electrónica y Mecatrónica, Universidad Tecnológica de la Mixteca.

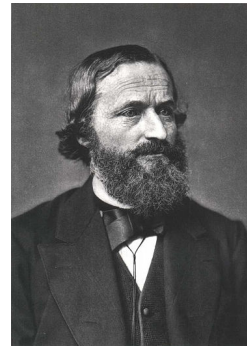
<sup>2</sup>pacheco@mixteco.utm.mx. Instituto de Física y Matemáticas, Universidad Tecnológica de la Mixteca.

**Resumen:** Los grafos se han usado en circuitos eléctricos desde el siglo XIX, gracias a Gustav Kirchhoff. En este trabajo preliminar usamos algunos principios básicos de la Teoría de Grafos para analizar y obtener mediante simple inspección, modelos dinámicos en ecuaciones diferenciales, para una gran clase de convertidores de potencia de tipo CD a CD, conmutados mediante modulación de ancho de pulso, en modo de conducción continuo (CCM, por sus siglas en inglés). A un convertidor de potencia con un interruptor activo (transistor), asociamos dos grafos, el grafo de encendido (on) y el de apagado (off), dependiendo de los estados on y off del transistor. Basados en algunos criterios topológicos (circuitos de corriente conectados, cerrados), se obtienen *por inspección* dos matrices características del convertidor: una matriz antisimétrica  $\mathcal{J}(u)$  y una matriz de entrada  $\beta(u)$ . Ambas matrices, que representan una especie de matrices de incidencia, están íntimamente asociadas al modelado en ecuaciones diferenciales bilineales de los convertidores de potencia CD a CD conmutados mediante modulación de ancho de pulso. En este trabajo presentamos a manera de tutorial, como una guía para el aprendizaje de este método de modelado. Analizamos algunos convertidores clásicos y otros menos conocidos. Tal como lo hacen las leyes de Kirchhoff, el método que proponemos permitirá al estudiante y al ingeniero facilitar sus tareas de análisis de topologías de convertidores de potencia.

*Palabras clave:* Teoría de grafos, Convertidores de potencia DC-DC por conmutación por modulación de ancho de pulso en modo de conducción continuo, ecuaciones diferenciales bilineales.

## 7.1 Introducción

Gustav Kirchhoff desarrolló su teoría de árboles entre 1845 y 1847 para resolver el sistema de ecuaciones lineales simultáneas obtenido a partir de un circuito eléctrico (ver [1, 2]). En [1], reemplazó resistencias y otros elementos eléctricos, por su estructura correspondiente usando solamente puntos y líneas, sin ninguna indicación del tipo de elemento eléctrico; es decir, Kirchhoff reemplazó cada circuito eléctrico por su grafo subyacente, mostrando que no era necesario considerar cada ciclo en el grafo separadamente para resolver el sistema de ecua-



**Figura 7.1:** Gustav Kirchhoff.

ciones resultante. (Véase, por ejemplo [3]).

La lista de aplicaciones de la teoría de grafos en circuitos eléctricos es larga y hasta hace relativamente poco tiempo se enseñaba en cursos de análisis de circuitos eléctricos. Consideremos, por ejemplo, el texto de Karni (1991) [4, Cap. 6]. La teoría de grafos ha sido usada, por ejemplo, para determinar por inspección si una red que contiene resistores no lineales, fuentes de CD (de corriente y tensión) y fuentes controladas (dependientes) lineales posee solución única (ver [5]).

En el caso de convertidores de potencia, el uso de grafos se puede apreciar desde el trabajo de Wolaver (1972) (ver [6]). Es notorio el uso de grafos para el análisis y diseño de convertidores y generación de nuevas topologías<sup>3</sup>: en [7], Slobodan Ćuk creó, a partir de la propiedad de dualidad, un circuito convertidor de potencia CD a CD que lleva su nombre “Convertidor Ćuk”; otros ejemplos de generación de topologías a partir de grafos se encuentran en [8]; los grafos también han sido usados para la obtención de modelos de convertidores (ver [9]) y para su análisis en [10] (véanse estos artículos y sus referencias).

El modelado mediante ecuaciones en el espacio de estados para convertidores de potencia CD a CD se ha estudiado desde hace varios años. Son fundamentales los trabajos de Middlebrook y Ćuk (ver [11, 12, 13]). La revisión que se hace en [14] es de gran interés y abrevia el área de modelado y simulación hasta el año 2001. Los libros de texto estándares en el área de convertidores de potencia incluyen este tipo de modelado en su análisis y para el diseño de leyes de control lineal (ver [15, 16]). Para el control no lineal se requiere el modelado de ecuaciones bilineales (ver [17]). En el presente trabajo presentamos una aplicación de la teoría de grafos a la obtención de modelos en ecuaciones diferenciales bilineales de convertidores de potencia CD a CD conmutados de un interruptor activo (un solo transistor), que operan en modo de conducción continuo. Por lo tanto, este trabajo se puede emparentar con lo que se expone en [9, 10]; sin embargo, nuestro trabajo es fundamentalmente diferente. La idea básica es obtener la estructura de los grafos subyacentes a partir del diagrama circuital del convertidor de potencia para los dos estados del transistor (encendido, apagado).

El objetivo de este trabajo es presentar de forma guiada, a través de la teoría y de ejemplos, la estrategia de modelado propuesta basada en el uso de grafos. Para ello, en la Sección 7.2, presentamos una revisión breve de elementos de la teoría de grafos; en particular, analizamos la construcción de la matriz de incidencia. En la subsección 7.3 presentamos el modelado clásico de convertidores de potencia, a partir de los circuitos obtenidos según opere el transistor en estado encendido o apagado. Para el desarrollo del modelo empleamos las leyes de Kirchhoff, de corriente (LCK) y de tensión (LTK). En la Sección 7.4, se desarrolla el procedimiento de modelización mediante grafos, en tres partes. En la Sección 7.4.1,

---

<sup>3</sup>Aquí se usa el término “topología” en el sentido de forma o estructura (mallas y nodos) del convertidor de potencia, a diferencia de lo que es *Topología* en el sentido estricto matemático.

se muestra cómo se pueden definir dos matrices  $\mathcal{J}$  y  $\beta$  a partir del grafo de un circuito compuesto por una fuente de tensión, inductores, condensadores y resistencias (en serie con cada inductor, en paralelo con cada condensador). Dicho grafo se forma eliminando las resistencias y dejando la fuente, inductores y condensadores. A tal grafo se asocia una matriz de incidencia  $\mathcal{J}$  anti-simétrica y una matriz  $\beta$  asociada a la fuente de tensión  $E$ , según los circuitos de corriente de los inductores (camino de corriente conectados cerrados).

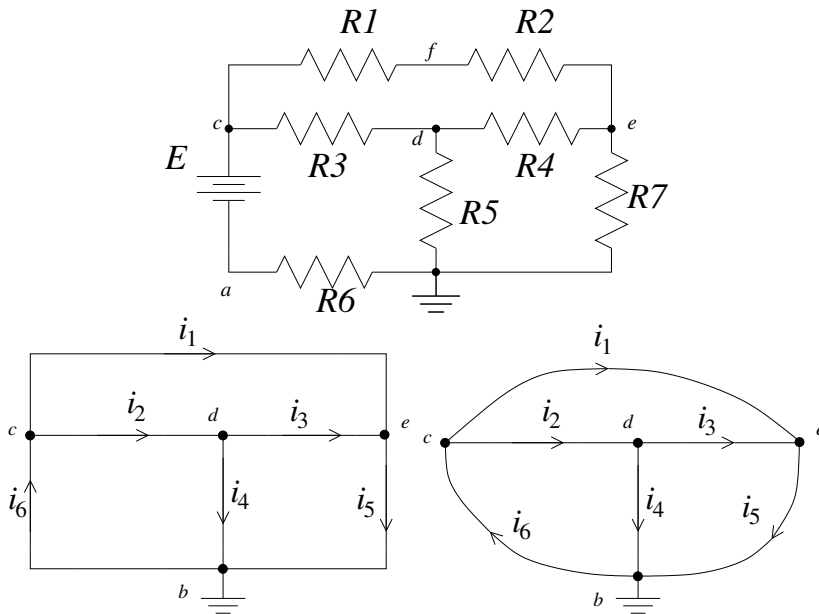
Esta estrategia se puede usar para el caso de convertidores de potencia CD a CD en modo de conducción continuo, en la cual se presentan dos topologías de circuitos: una para el encendido del transistor (on) y otra para el caso apagado (off). Esto se hace en la subsección 7.4.2: a cada circuito, entonces se asocian dos grafos, un grafo-on y un grafo-off, los cuales incluyen además de fuente, inductores y condensadores, el transistor y los diodos en la forma de cortos (conexiones cerradas) o abiertos (conexiones abiertas) según sea el caso. De ambos grafos se generan matrices,  $\mathcal{J}_{\text{on}}$ ,  $\beta_{\text{on}}$  y  $\mathcal{J}_{\text{off}}$ ,  $\beta_{\text{off}}$ , que se combinan para generar las matrices que caracterizan la operación del convertidor, dadas por  $\mathcal{J}(u) = \mathcal{J}_{\text{on}}u + \mathcal{J}_{\text{off}}(1 - u)$  y  $\beta(u) = \beta_{\text{on}}u + \beta_{\text{off}}(1 - u)$ . Se combinan las dos matrices anteriores en un modelo completo, combinando  $\mathcal{J}(u)$  y  $\beta(u)$  en una sola ecuación diferencial. Comprobamos que efectivamente, los modelos generados bajo este procedimiento coinciden con los modelos obtenidos mediante las leyes de Kirchhoff. Los modelos obtenidos mediante los grafos propuestos simplifican el modelado obtenido a través de las leyes de Kirchhoff. Este capítulo se cierra con algunas conclusiones y nuestras perspectivas de la continuación de la investigación en esta línea.

## 7.2 Breve introducción a los grafos

En esta sección indicamos algunos conceptos que nos servirán más adelante. Están basados en [3]. Para el desarrollo posterior, interesará en particular la noción de *incidencia* y la forma de generar la *matriz de incidencia*.

Un grafo  $G$  es un conjunto finito no vacío  $V$  de objetos llamados *vértices* junto con un conjunto  $L$  (posiblemente vacío) de subconjuntos de dos elementos de  $V$  llamados *lados* o *aristas*. A los vértices también se les llama *puntos* o *nodos*, mientras que a los lados se les llama *líneas* o *enlaces*.

Para indicar que un grafo  $G$  posee un conjunto de vértices  $V$  y un conjunto de lados  $L$ , se escribe  $G = (V, L)$ . También se escribe  $V(G)$  o  $L(G)$  para indicar que pertenecen al grafo  $G$ . Cada lado  $\{u, v\}$  de  $G$  se puede escribir también mediante  $uv$  o  $vu$ . Si  $l = uv$  es un lado de  $G$ , se dice que  $l$  une  $u$  y  $v$ , también se dice que  $u$  y  $v$  son *adyacentes* (se les llama también nodos *vecinos*); el punto  $u$  y la línea  $l$  son *incidentes* entre ellos, también lo son  $v$  y  $l$ . Si dos lados distintos  $l$  y  $x$  son



**Figura 7.2:** Circuito eléctrico con su correspondiente grafo dirigido. Se muestran dos versiones del mismo grafo (uno con arcos con ángulos rectos y el otro con lados curvados).

incidentes en el mismo punto común, entonces son lados o *líneas adyacentes*<sup>4</sup>.

Generalmente, un grafo se representa mediante un diagrama, donde a cada vértice se le asocia un punto y a cada lado se le asocia una línea del diagrama. En el caso del estudio de circuitos eléctricos nos interesará representar el diagrama circuital mediante su grafo correspondiente. En la Figura 7.2 mostramos un ejemplo. En el caso de circuitos eléctricos un arco del grafo representa una *rama* del circuito eléctrico donde pueden aparecer uno o más elementos conectados en serie.

El número de vértices en un grafo  $G$  es el *orden* de  $G$ . El número de lados es el *tamaño* de  $G$ . Se usan  $(n, m)$  para representar el orden y el tamaño de  $G$ . Un grafo de orden 1 es el *grafo trivial*. En un grafo no trivial hay dos o más vértices. Un grafo de tamaño 0 se llama *grafo vacío*. Un grafo no vacío posee uno o más lados.

Un *grafo orientado*, *grafo dirigido* o *digrafo*  $D$ , consiste en un conjunto no vacío de puntos  $V$  junto con una colección  $X$  de pares ordenados de puntos distintos (hay una relación de precedencia entre los elementos de una arista). Los elementos de  $X$  se llaman arcos o líneas dirigidas. La Figura 7.2 muestra un grafo dirigido en el cual la dirección de los arcos se indica mediante una flecha. En los grafos mostrados se nombran (etiquetan) tanto los nodos  $V = \{b, c, d, e\}$  como sus correspondientes arcos  $L = \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6\}$ ; por ejemplo,  $i_1 = ce$ ,

<sup>4</sup>Si dos lados  $uv$  y  $vw$  son lados distintos de  $G$ , entonces  $uv$  y  $vw$  son lados adyacentes.

$i_4 = db$ .

En el caso de arcos incidentes en un nodo, si el vértice  $v$  es una extremidad inicial de un arco  $\{v, u\}$ ,  $v \neq u$ , se dice que el arco es incidente en  $v$  hacia el exterior (el arco sale de  $v$ ). El número de arcos incidentes hacia el exterior se llama *semigrado exterior de  $v$* . De igual forma se define un arco incidente a  $v$  hacia el interior (entra a  $v$ ) y *semigrado interior de  $v$* . El *grado de  $v$*  es la suma del semigrado exterior e interior de  $v$ , es decir, el número de arcos con una extremidad en  $v$ . Si todos los vértices tienen el mismo grado, el grafo al que pertenecen se llama *grafo regular*. El grafo de la Figura 7.2 es un grafo regular de grado 3; el semigrado interior de  $e$  es 2.

Un *subgrafo* de  $G$  es un grafo que tiene todos sus nodos y arcos en  $G$ ,  $V(G_1) \subseteq V(G)$  y  $L(G_1) \subseteq L(G)$ . Si  $G_1$  es un subgrafo de  $G$ , entonces  $G$  es un *supergrafo* de  $G_1$ . Un *subgrafo de cubrimiento*<sup>5</sup> de  $G$  es un grafo  $G_1$  que contiene todos los nodos de  $G$ , es decir,  $V(G_1) \equiv V(G)$ . Para un conjunto de nodos  $S \in V(G)$ , el *subgrafo inducido* o *subgrafo completo*  $G_1 = \langle S \rangle$  es el subgrafo maximal de  $G$  en el conjunto de puntos  $S$ , si dos puntos en  $G_1$  son adyacentes si y solamente si son adyacentes en  $G$  (dicho de otro modo, si tiene todos los lados que tenía  $G$  y que unen los vértices  $V(G_1)$ ).

Un camino de longitud  $n$  es una sucesión de lados  $l_1 l_2 \dots l_n$ , junto con una sucesión de vértices  $v_1 v_2 \dots v_{n+1}$  tales que  $l_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ . Se dice que el camino  $l_1 l_2 \dots l_n$  es un camino del vértice  $v_1$  al vértice  $v_{n+1}$ . Para dar un camino en un grafo daremos en particular la sucesión de lados. Si  $l_1 l_2 \dots l_n$  es un camino de  $u$  a  $v$ , entonces  $l_n l_{n-1} \dots l_2 l_1$  es un camino de  $v$  a  $u$ . Un camino en el que no aparecen lados repetidos se llama *recorrido*. Un recorrido en el que no hay vértices repetidos (salvo el primero y el último) se llama *camino simple*. Un camino en el cual coinciden el primer y el último vértice se llama *camino cerrado*. Un recorrido que es además un camino cerrado se llamará *circuito*. Un circuito que además es un camino cerrado es un *ciclo*. En la Figura 7.2, la secuencia  $i_6 i_1 i_3 i_4 = bcedb$  es un ciclo. Un grafo es *conexo* (*connected* en inglés) si cada par de puntos se une mediante un camino. Una *componente* es un subgrafo maximal conexo de  $G$ . Así, un grafo desconectado o no conexo tiene al menos dos componentes.

### 7.2.1 De grafos a matrices

Así como de un grafo escrito en la forma de conjuntos se puede ir a su diagrama, también podemos codificarlo en la forma de una matriz. De las dos matrices que se muestran a continuación, nos será de utilidad para más adelante la construcción de la matriz de incidencia: se puede definir la *matriz de incidencia*  $C$  de un grafo dirigido  $G = (V, L)$ , como una matriz cuyas filas se indexan según sus vértices y cuyas columnas se indexan mediante los lados. El elemento de la matriz  $C$

<sup>5</sup>*Spanning subgraph* en inglés.

asociado a la fila  $v$  (vértice) y a la columna  $l$  (arco) se escribe  $c_{v,l}$ . Tiene un valor 0 si no son adyacentes (incidentes), 1 si es incidente hacia el exterior y -1 si es incidente hacia el interior. En el primer ejemplo, Figura 7.2, se tiene la siguiente matriz de incidencia:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} b \\ c \\ d \\ e \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} l_1 & l_2 & l_3 & l_4 & l_5 & l_6 \end{matrix}$$

donde, por ejemplo, el arco  $l_1$  va de  $c$  a  $e$ ,  $l_1 = ce$ . La matriz de incidencia permite obtener el grado y semigrados de un vértice. En una fila, el número de elementos diferentes de cero es el grado. El semigrado (interior o exterior) se obtiene contando el número de elementos (-1 o 1). Por ejemplo, los vértices tienen grado 3 (grafo regular); el semigrado interior del vértice  $c$  es 1 (un solo elemento -1).

Supongamos que  $G$  es un grafo de orden  $n$ , donde  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . La *matriz de adyacencia* de  $G$  es una matriz  $n \times n$  de ceros y unos  $A(G) = [a_{ij}]$  o simplemente  $A = [a_{ij}]$ , donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } v_i v_j \in L(G); \\ 0, & \text{si } v_i v_j \notin L(G). \end{cases}$$

Por ejemplo, la matriz de adyacencia del grafo en la Figura 7.2 está dado por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} b \\ c \\ d \\ e \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} b & c & d & e \end{matrix}$$

Algunas observaciones se extraen de la matriz de adyacencia: los elementos de la diagonal son cero ya que ningún vertice es adyacente a sí mismo; la matriz  $A$  es simétrica; si se suman los elementos de una fila  $i$  (o una columna, por simetría) se obtiene el grado de  $v_i$ .

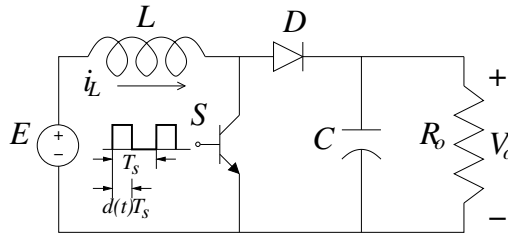
### 7.3 Modelado de convertidores de potencia

Los convertidores de potencia que estudiaremos son del tipo CD a CD (corriente directa a corriente directa), controlados mediante la conmutación mediante modulación de ancho de pulso (PWM, por siglas en inglés, *Pulse Width Modulation*)

de un elemento activo (un transistor) y la correspondiente conmutación en los elementos pasivos (diodos). Serán de interés en este trabajo aquellos convertidores operando en el modo de conducción continuo; es decir, aquellos convertidores donde aparecen solo dos modos de operación, según el elemento activo de conmutación este encendido (modo on) o apagado (modo off). La manera habitual de modelar un convertidor de potencia CD a CD conmutado por PWM es mediante la aplicación de las leyes de Kirchoff a cada circuito resultante según el modo de operación (encendido, apagado).

### 7.3.1 Convertidor CD a CD del tipo Boost

Para entender esto, veamos el caso del convertidor de potencia Boost, también llamado convertidor elevador, el cual se ilustra en la Figura 7.3. Mostramos los elementos típicos de un convertidor de potencia CD a CD: la fuente  $E$  de tensión CD, la salida  $V_o = v_C$  medida en la resistencia de carga  $R_o$ , la bobina  $L$ , el condensador  $C$ ; mostramos el transistor (elemento activo) controlado por PWM y el diodo (que se transforma en un abierto o un corto en función del transistor, por eso se toma como elemento pasivo).



**Figura 7.3:** Convertidor de potencia CD a CD de tipo elevador basado en PWM.

La modulación por ancho de pulso hace que en una fracción  $0 < d(t) < 1$  del período de conmutación  $T_s$  el transistor esté encendido y se transforme en un corto. El encendido se representa como modo on o simplemente  $u = 1$ , siendo  $u$  una señal binaria que representa el encendido ( $u = 1$ ) o apagado ( $u = 0$ ) del transistor. Así, el mecanismo PWM se puede representar mediante la siguiente expresión explícitamente dependiente del tiempo:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t_k \leq t < t_k + d(t)T_s; \\ 0, & \text{si } t_k + t_k + d(t)T_s \leq t < t_{k+1} = t_k + T_s, \end{cases} \quad (7.3.1)$$

donde  $t_k = kT_s$ , para  $k \in \mathbb{N}$ . Como se indica, para el caso  $u = 1$  el transistor está encendido, lo que se refleja como si trabajara en corto, al mismo tiempo el diodo deja de conducir (se comporta como un abierto), por lo que se obtiene el comportamiento equivalente al circuito dado en la Figura 7.4. En el modo apagado  $u = 0$ , el transistor funciona como un abierto por lo que deja de conducir, por lo



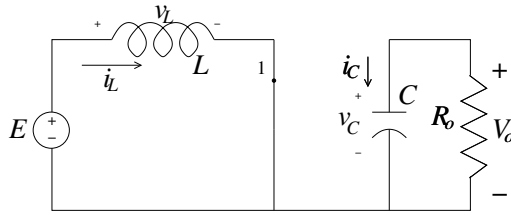


Figura 7.4: Modo encendido (on),  $u = 1$ .

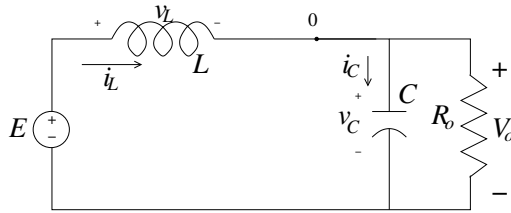


Figura 7.5: Modo apagado (off),  $u = 0$ .

que el diodo de forma complementaria ahora conduce (véase la Figura 7.5). Ambos comportamientos se pueden ilustrar en un solo diagrama circuital mediante el uso de un interruptor (*switch* en inglés) que cambia de posición según el valor de  $u$ , tal y como se muestra en la Figura 7.6. Como es habitual, mostramos los ciclos de encendido ( $u = 1$ , línea continua en color azul) y apagado ( $u = 0$ , trazos en color rojo).

Para formular el modelo matemático de este convertidor, obtenemos las ecuaciones diferenciales de cada circuito resultante mediante la aplicación de las leyes de Kirchhoff. A partir de la Figura 7.4, obtenemos, por ejemplo:

$$\text{LTK:} \quad -E + v_L = 0.$$

$$\text{LCK:} \quad i_C + \frac{V_o}{R} = i_C + \frac{v_C}{R} = 0.$$

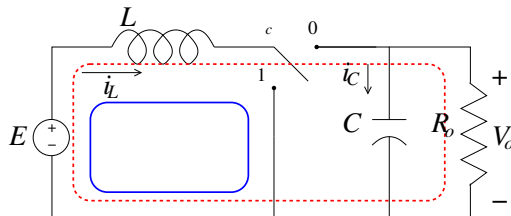


Figura 7.6: Convertidor elevador con un interruptor,  $u \in \{0, 1\}$ . Mostramos el terminal común  $c$ , las posiciones 1 y 0 y los ciclos de encendido (azul) y apagado (rojo) del transistor.

De acuerdo a la Figura 7.5, para el modo off se obtiene

$$\begin{aligned} \text{LTK:} \quad & -E + v_L + v_C = 0. \\ \text{LCK:} \quad & i_C + \frac{v_C}{R} = i_L. \end{aligned}$$

Precisamente, se acostumbra combinar estos juegos de expresiones anteriores usando la variable auxiliar  $u \in \{0, 1\}$  de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \text{LTK:} \quad & -E + v_L + (1 - u)v_C = 0 \\ \text{LCK:} \quad & i_C + \frac{v_C}{R} = (1 - u)i_L \end{aligned}$$

Despejando respecto a las variables llamadas discontinuas,  $v_L$  e  $i_C$ , resulta en:

$$\begin{aligned} v_L &= -(1 - u)v_C + E \\ i_C(1 - u)i_L &= \frac{v_C}{R} \end{aligned}$$

las cuales efectivamente corresponden a las ecuaciones diferenciales bilineales que generalmente se asocian al modelo ideal de este tipo de convertidor:

$$\begin{aligned} L \frac{di_L}{dt} &= -(1 - u)v_C + E \\ C \frac{dv_C}{dt} &= (1 - u)i_L - \frac{v_C}{R}, \end{aligned} \tag{7.3.2}$$

donde se han empleado las equivalencias  $v_L = L \frac{di_L}{dt}$  e  $i_C = C \frac{dv_C}{dt}$ .

Supongamos que se considera la resistencia equivalente serie  $r$  con la bobina, como se ilustra en la Figura 7.7. Las ecuaciones diferenciales (7.3.2) se modifican ligeramente:

$$\begin{aligned} L \frac{di_L}{dt} &= -ri_L - (1 - u)v_C + E \\ C \frac{dv_C}{dt} &= (1 - u)i_L - \frac{v_C}{R} \end{aligned} \tag{7.3.3}$$

En forma matricial se puede escribir:

$$\begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{di_L}{dt} \\ \frac{dv_C}{dt} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -(1 - u) \\ 1 - u & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} E. \tag{7.3.4}$$

Esta estructura nos servirá para el desarrollo de modelado en grafos que presentaremos posteriormente.

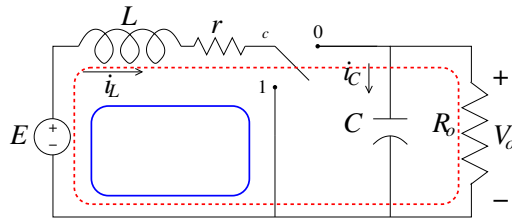


Figura 7.7: Convertidor elevador incluyendo elementos parásitos.

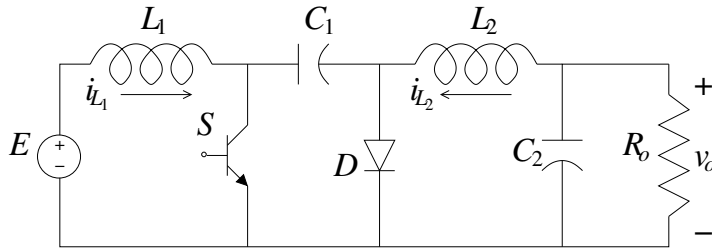


Figura 7.8: Convertidor Ćuk.

### 7.3.2 Convertidor Ćuk

Vamos a incluir el proceso de modelado de este convertidor por ser muy conocido e incluir dos inductores y dos capacitores. El convertidor Ćuk fue propuesto por Slobodan Ćuk en su tesis de doctorado [13], defendida en 1977. Este circuito convertidor de potencia CD a CD se muestra en la Figura 7.8.

Se procede a reemplazar el transistor y el diodo por el correspondiente interruptor como se ilustra en la Figura 7.9. Las leyes de Kirchoff nos llevan a las siguientes ecuaciones:

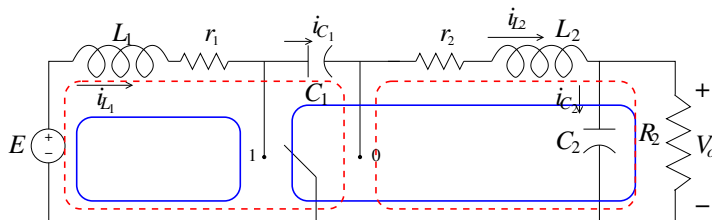


Figura 7.9: Convertidor Ćuk con sus modos de encendido (línea azul) y apagado (trazos en rojo) y sus correspondientes ciclos de corriente (un ciclo por cada bobina).

**Modo on**,  $u = 1$ ,

$$\begin{aligned} -E + v_{L_1} + r_1 i_{L_1} &= 0, \\ i_{C_1} &= i_{L_2}, \\ v_{C_1} + r_2 i_{L_2} + v_{L_2} + v_{C_2} &= 0, \\ \frac{v_{C_2}}{R_2} + i_{C_2} &= i_{L_2}, \end{aligned}$$

**Modo off**,  $u = 0$ ,

$$\begin{aligned} -E + v_{L_1} + r_1 i_{L_1} + v_{C_1} &= 0, \\ i_{C_1} &= i_{L_1}, \\ r_2 i_{L_2} + v_{L_2} + v_{C_2} &= 0, \\ \frac{v_{C_2}}{R_2} + i_{C_2} &= i_{L_2}. \end{aligned}$$

El modelo combinado mediante la variable auxiliar  $u$  resulta:

$$\begin{aligned} v_{L_1} &= -r_1 i_{L_1} - (1 - u)v_{C_1} + E \\ i_{C_1} &= u i_{L_2} + (1 - u)i_{L_1} \\ v_{L_2} &= -u v_{C_1} - r_2 i_{L_2} - v_{C_2} \\ i_{C_2} &= i_{L_2} - \frac{v_{C_2}}{R_2} \end{aligned}$$

De aquí se deriva el modelo matricial:

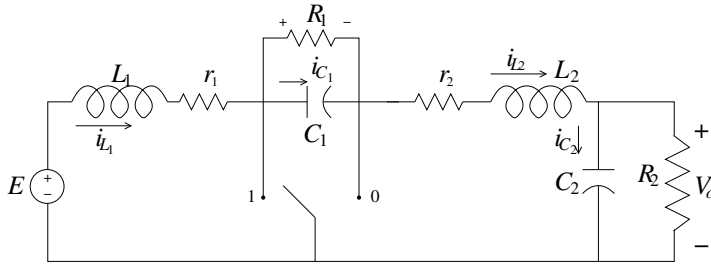
$$\mathcal{L}\dot{x} = \mathcal{J}(u)x - \mathcal{R}x + \beta E, \quad (7.3.5)$$

donde  $x = [i_{L_1}, v_{C_1}, i_{L_2}, v_{C_2}]^T$  es el vector de estados del convertidor, el símbolo  $\dot{x}$  representa la derivada respecto al tiempo  $\dot{x} = \frac{d}{dt}x$ ; y

$$\mathcal{L}\mathcal{C} = \begin{pmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}; \quad \mathcal{J}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -(1-u) & 0 & 0 \\ 1-u & 0 & u & 0 \\ 0 & -u & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$\mathcal{L}\mathcal{C}$  es la matriz de inductancias y capacitancias (define el comportamiento transitorio del sistema) y  $\mathcal{J}(u)$  es una matriz antisimétrica que representa la distribución de energía dentro del convertidor, y

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_2} \end{pmatrix}; \quad \beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$



**Figura 7.10:** Convertidor Ćuk con una resistencia de carga en paralelo con el capacitor de paso  $C_1$ .

la matriz  $\mathcal{R}$  representa los términos disipativos y el vector  $\beta$  representa los canales de energía aportados por la fuente de poder  $E$ . Comparemos con la estructura matricial obtenida para el convertidor Boost en (7.3.4). Ambas son semejantes en relación a las matrices que las caracterizan.

Se puede apreciar que al añadir elementos disipativos, el modelo obtenido se modifica respecto al modelo ideal (sin pérdidas), aunque no complica demasiado el proceso. Incluso podríamos pensar en añadir una resistencia en paralelo con el capacitor de paso  $C_1$ , tal y como se muestra en la Figura 7.10.

## 7.4 Modelado de convertidores de potencia usando grafos

Esta iniciativa surgió de una colaboración iniciada por dos de los autores, en donde nos preguntamos: ¿habría alguna forma de utilizar los grafos generados a partir de un convertidor para modelar o analizar su comportamiento temporal? Esta nos llevó a otra aún más fundamental, ¿se podrá *por inspección* de dichos grafos obtener las ecuaciones diferenciales bilineales asociadas a un convertidor de potencia operando en modo de conducción continuo? La respuesta a esta pregunta es afirmativa. En esta sección mostramos los resultados preliminares de esta estrategia de modelado.

Esencialmente, de un circuito se obtienen dos grafos (grafo on y grafo off). De cada grafo se generan por inspección las matrices  $\mathcal{J}_{\text{on}}$  y  $\mathcal{J}_{\text{off}}$ ,  $\beta_{\text{on}}$  y  $\beta_{\text{off}}$ , para luego combinarlas mediante la variable auxiliar  $u$  en matrices  $\mathcal{J}(u)$  y  $\beta(u)$ .

### 7.4.1 Modelado de un circuito

El método propuesto de alguna forma combina, por simple inspección, las leyes de Kirchhoff para el caso de circuitos alimentados por fuentes de tensión, donde se presenten inductores y condensadores. Para este análisis no es necesario que el número de inductores  $n_L$  sea igual al número de capacitores  $n_C$ .

Consideremos el circuito de la Figura 7.11, el cual incluye una fuente de tensión  $v = E$ , una bobina  $L$  y un capacitor  $C$ . Nuestra primera regla es la

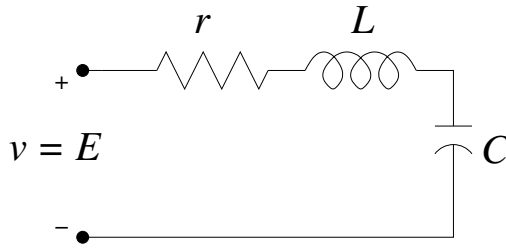


Figura 7.11: Circuito RLC en serie.

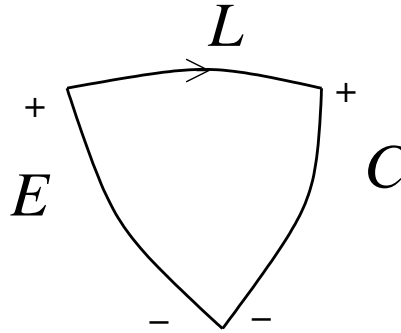


Figura 7.12: Grafo  $G_{RLC}$  asociado al circuito RLC anterior

siguiente: la conexión en serie de un resistor y una bobina será considerada como un arco del grafo. En nuestro enfoque de modelado, la fuente, la bobina y el capacitor generan tres arcos de nuestro grafo tal y como mostramos en la Figura 7.12.

A partir del grafo  $G_{RLC}$  anterior, vamos a generar las dos matrices mencionadas anteriormente. Se puede apreciar en el grafo una característica que proviene de las leyes de Kirchhoff: se fija la dirección de cada arco, la dirección de la corriente en la bobina, representada por una flecha, y la polaridad de la fuente y el capacitor, indicada por los signos '+' y '-'.

La corriente  $i_L$  de la bobina debe generar un ciclo del grafo. Este ciclo de corriente permite generar una matriz  $\mathcal{J}$  antisimétrica que surge de la relación de la bobina  $L$  y el capacitor  $C$  en dicho ciclo y un vector columna que asocia la fuente  $E$  y la bobina  $L$  para el ciclo generado por la bobina. La matriz  $\mathcal{J} = [\xi_{ij}]$  es cuadrada y posee un número de filas  $n_f = 2$  igual al número de elementos  $L$  y  $C$ , en este caso es una matriz  $2 \times 2$ . La diagonal de  $\mathcal{J}$  son ceros. Supongamos que se ordena la matriz en el orden  $L$  primero, luego  $C$ . Se establece ahora la relación entre  $L$  y  $C$ , la corriente  $i_L$  incidente hacia el interior de  $C$  por el lado '+', esto se corresponde con un  $-1$  en la posición  $(1, 2)$  ( $1 =$  bobina,  $2 =$  capacitor,  $\xi_{1,2} = -1$ ), entonces se coloca un  $1$  en la posición  $(2, 1)$  ( $\xi_{2,1} = 1$ ) es

decir:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L \\ C \end{matrix}$$

El vector  $\beta$  se corresponde con un 1, 0 o  $-1$  en la fila correspondiente a la bobina  $L$ : es un 1 si la fuente  $E$  y la bobina están en el mismo ciclo y la corriente incidente hacia el interior de la fuente entra por '-'. Así, obtenemos que:

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L \\ C \end{matrix}$$

Con estas dos matrices se tiene la ecuación diferencial del circuito RLC, notando que existen dos matrices adicionales: una  $\mathcal{LC}$  que es una matriz diagonal con la inductancia y capacitancia,  $\text{diag}(L, C)$ . Adicionalmente, se define una matriz  $\mathcal{R}$  que es también diagonal, de resistencias de la siguiente forma: la  $r$  en serie con  $L$  se coloca en el primero elemento de la diagonal, una conductancia  $1/R$  se agrega en el segundo elemento de la diagonal, asociada a la capacitancia (a partir de una posible resistencia  $R$  en paralelo con el capacitor). Es decir, se tiene:

$$\mathcal{LC} = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}; \quad \mathcal{R} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{pmatrix}.$$

Para este caso, no existe ninguna resistencia  $R$  en paralelo con el condensador  $C$ ,  $1/R \equiv 0$ , es decir,  $R$  se asume como un abierto o una resistencia de valor infinito.

La ecuación diferencial queda haciendo  $x = [i_L \ v_C]^T$ :

$$\mathcal{LC}x = \mathcal{J}x - \mathcal{R}x + \beta E$$

o explícitamente

$$\begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_L \\ \dot{v}_C \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} E,$$

las cuales efectivamente coinciden con las ecuaciones resultantes de la aplicación de las leyes de Kirchhoff: (LTK)  $-E + ri_L + v_L + v_C$  e (LCK)  $i_C = i_L$ . Lo que es interesante es que el circuito de la Figura 7.13 posee exactamente el mismo grafo, lo que cambia es la matriz  $\mathcal{R}$ :

$$\begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_L \\ \dot{v}_C \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} E$$

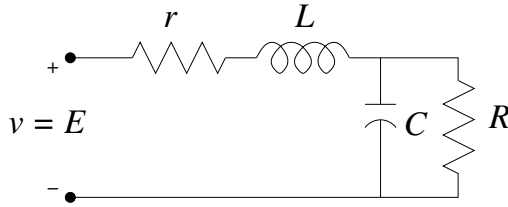


Figura 7.13: Circuito RLC con una resistencia  $R$  en paralelo con el capacitor  $C$ .

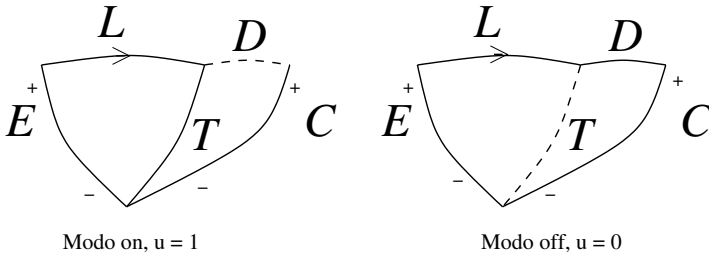


Figura 7.14: Grafos on y off para el convertidor Boost.

### 7.4.2 Resultado principal: Modelado de un convertidor conmutado (con estados on y off)

En esta sección presentamos el procedimiento general de modelado obtenido a partir de este enfoque. Además, presentamos el modelado del circuito Ćuk y el de un circuito menos conocido, un convertidor propuesto por Wu y Chen en 1998 (ver [18]). Comenzaremos por el primer ejemplo del convertidor Boost.

**Convertidor Boost.** En la Figura 7.14 mostramos los grafos asociados al convertidor Boost de la Figura 7.6. Se sigue el orden  $LC$ . La matriz  $\mathcal{J}_{\text{on}}$  resulta por ejemplo:

$$\mathcal{J}_{\text{on}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

porque no hay conexión alguna con el capacitor  $C$ . La matriz  $\mathcal{J}_{\text{off}}$ :

$$\mathcal{J}_{\text{off}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz antisimétrica  $\mathcal{J}(u)$  del convertidor resulta:

$$\mathcal{J}(u) = \mathcal{J}_{\text{on}}u + \mathcal{J}_{\text{off}}(1 - u) = \begin{pmatrix} 0 & -(1 - u) \\ 1 - u & 0 \end{pmatrix}$$

Aquí es evidente que  $\mathcal{J}(u)$  se deriva de una suerte de *combinación convexa* de las matrices  $\mathcal{J}_{\text{on}}$  y  $\mathcal{J}_{\text{off}}$ .



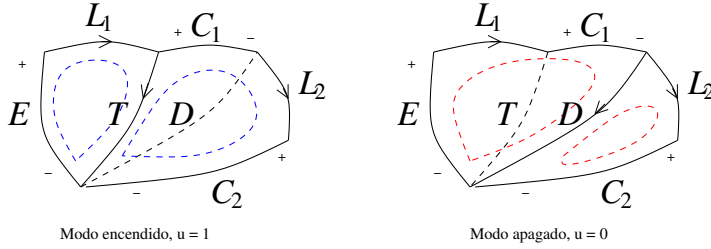


Figura 7.15: Grafos  $G_1$  y  $G_0$  asociados al convertidor Ćuk.

Para obtener las matrices de entrada siempre se asocian  $E$  a  $L$  (se aprecian en los ciclos en la Figura 7.14 que la fuente  $E$  siempre alimenta a la bobina  $L$ ) así que

$$\beta_{\text{on}} = \beta_{\text{off}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

por lo que la matriz de entrada del sistema  $\beta(u)$  está dada por (se repite la combinación convexa mencionada):

$$\beta(u) = \beta_{\text{on}}u + \beta_{\text{off}}(1 - u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

El modelo resultante para el convertidor Boost es:

$$\begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_L \\ \dot{v}_C \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -(1-u) \\ 1-u & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} E$$

Lo cual se puede comprobar de la ecuación (7.3.4) ya obtenida.

**Convertidor Ćuk.** Los grafos asociados al convertidor Ćuk, mostrado en la Figura 7.9 se indican en la Figura 7.15; se usa el orden  $L_1C_1L_2C_2$ . Observemos que se indican además las direcciones de las corrientes en el transistor y en el diodo, por lo que se aprecia que la corriente  $i_{L_2}$  debería tener la dirección inversa; se escogió la misma dirección para obtener el mismo resultado del modelo expresado en (7.3.5).

La matrix  $\mathcal{J}_{\text{on}}$  (modo encendido) está dada por:

$$\mathcal{J}_{\text{on}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Se puede apreciar que la bobina  $L_1$  en su ciclo (azul) no incide sobre ningún capacitor. Por el contrario,  $L_2$  incide tanto en el capacitor  $C_1$  como en el  $C_2$ .

Calculando  $\mathcal{J}_{\text{off}}$  se obtiene la matriz  $\mathcal{J}(u)$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(u) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} (1-u) = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -(1-u) & 0 & 0 \\ 1-u & 0 & u & 0 \\ 0 & -u & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La fuente  $E$  afecta  $L_1$  en ambos grafos, por lo tanto,

$$\beta(u) = \beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Se puede obtener el modelo del circuito mostrado en la Figura 7.10, la cual incluye una resistencia en paralelo con el capacitor de paso, variando solamente la matriz  $\mathcal{R}$ :

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_2} \end{pmatrix}.$$

Si se emplea el par de grafos modificados de la Figura 7.16, cambian los signos asociados a la fila y columna de  $L_2$  en la matriz  $\mathcal{J}(u)$ :

$$\mathcal{J}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -(1-u) & 0 & 0 \\ 1-u & 0 & -u & 0 \\ 0 & u & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, el modelo resultante es el equivalente mencionado anteriormente:

$$\mathcal{L}\mathcal{C}\dot{x} = \mathcal{J}(u)x - \mathcal{R}x + \beta(u)E.$$

**Convertidor derivado de Wu-Chen.** Usamos este convertidor para mostrar la facilidad de uso del método propuesto. Sugerimos al lector llegar al modelo de este convertidor por sus propios medios usando las leyes de Kirchhoff. El diagrama eléctrico del convertidor de Wu-Chen, realizado en PSIM, se muestra en la Figura 7.17.

En la Figura 7.18 mostramos los grafos asociados a este circuito. Los ciclos de corriente mostrados cumplen con el requerimiento de que debe haber una sola

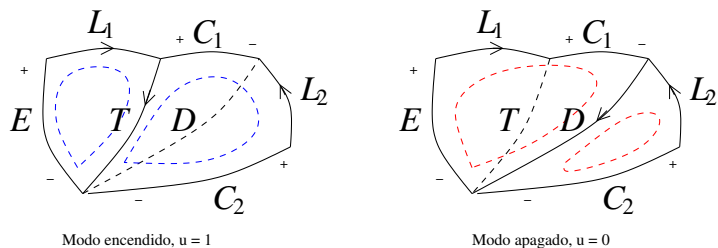


Figura 7.16: Grafos  $G_1$  y  $G_0$  asociados al convertidor Ćuk, colocando la dirección real de la corriente  $i_{L_2}$ .

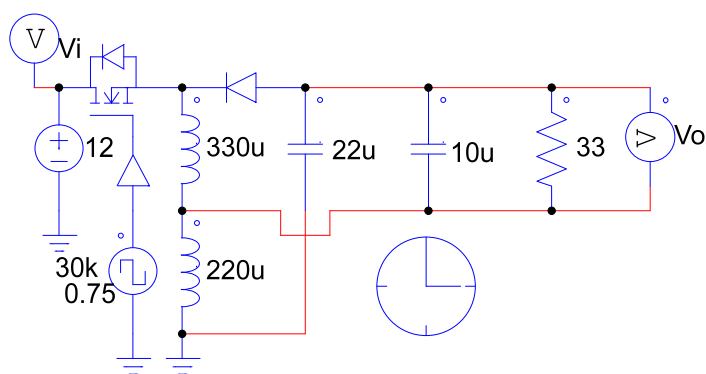


Figura 7.17: Convertidor derivado de Wu-Chen.

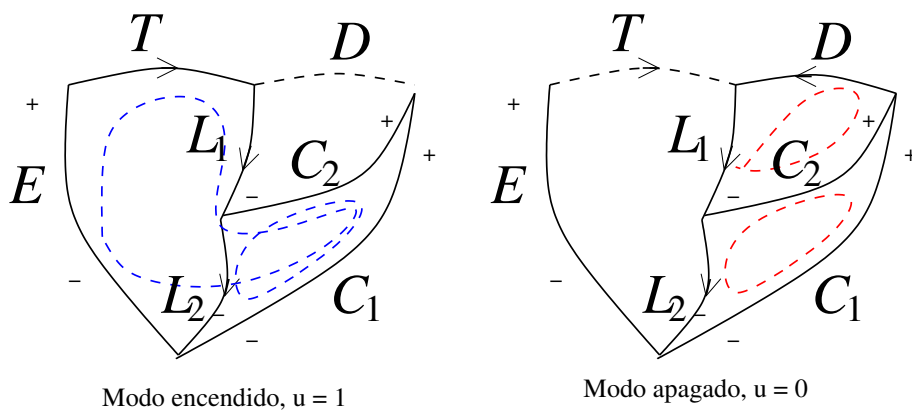


Figura 7.18: Grafos del circuito derivado por Wu y Chen (1998).

bobina por ciclo de corriente. Las matrices antisimétricas que resultan de los grafos son:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(u) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} (1-u) = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -u & 0 & 1 \\ u & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Y las matrices de entrada:

$$\beta(u) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (1-u) = \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Usando la ecuación del modelo general (7.4.1) se puede simular el modelo de Wu-Chen directamente en GNU Octave, usando el siguiente modelo promedio<sup>6</sup>:

$$\mathcal{L}\mathcal{C}\dot{x} = \mathcal{J}(\mu)x - \mathcal{R}x + \beta(\mu)E,$$

para un ciclo de trabajo  $\mu = 0.75$ ,  $E = 12$  V y los demás valores como están indicados en el diagrama eléctrico de la Figura 7.17. Mostramos a continuación el código en GNU Octave:

```
L1 = 330e-6; L2 = 220e-6; C1 = 22e-6; C2 = 10e-6; Ev = 12; R2 = 33;
```

```
LC = [L1 0 0 0; 0 C1 0 0; 0 0 L2 0; 0 0 0 C2]; R = zeros(4,4);
R(4,4) = 1/R2;
```

```
J1= zeros(4,4); J1(2,3) = J1(1,2) = J1(3,4) = J1(4,1) = -1; J1(3,2)
= J1(2,1) = J1(4,3) = J1(1,4) = 1; J0= zeros(4,4); J0(2,3) = J0(3,4)
= J0(4,1) = -1; J0(3,2) = J0(4,3) = J0(1,4) = 1;
```

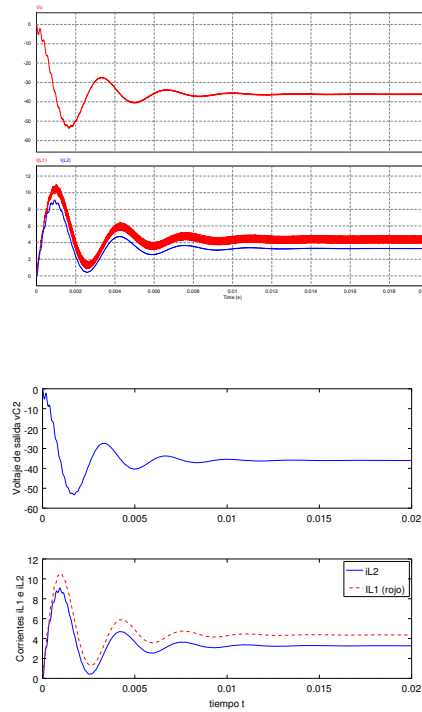
```
J1 =
```

```
0 -1 0 1
1 0 -1 0
0 1 0 -1
-1 0 1 0
```

```
J0 =
```

---

<sup>6</sup>Los modelos promedio (*average models* en inglés) permiten el análisis de un sistema continuo no lineal con  $0 < \mu < 1$ , en lugar de estudiar el sistema conmutado  $u \in \{0, 1\}$ , siempre que se considere una relativa alta frecuencia de conmutación. Para el caso mostrado, la simulación en PSIM se realizó con una frecuencia de conmutación de 30 kHz.



**Figura 7.19:** Simulaciones del circuito derivado por Wu y Chen (1998). Arriba: realizadas en PSIM (basados en el diagrama eléctrico de la Figura 7.17), abajo: simulación numérica del modelo promedio en GNU Octave.

```

0 0 0 1
0 0 -1 0
0 1 0 -1
-1 0 1 0

bt1 = [1 0 0 0]'; bt0 = [0 0 0 0]';

D = 0.75;

J = J1*D+J0*(1-D); bt = bt1*D+bt0*(1-D);

function dx = wuchen(t,x) global LC R J bt Ev global D
dx = LC\((J-R)*x+LC\bt*Ev; endfunction

t0=0; tf = 0.02;

t0=0; tf = 0.02; t = linspace(t0,tf,500); x = lsode(@wuchen,x0,t);

```

En la Figura 7.19 comparamos las simulaciones obtenidas mediante un programa de simulación especializado para circuitos PSIM (depende de las especifici-

caciones de cada elemento circuital) y las obtenidas a partir del código en GNU Octave. Observamos la correspondencia (similitud) en las curvas de respuesta obtenidas por ambos métodos, tomando en cuenta que el código en GNU Octave se calculó a partir de la ecuación  $\dot{\mathbf{d}}\mathbf{x} = \mathbf{LC} \setminus (\mathbf{J}-\mathbf{R}) \star \mathbf{x} + \mathbf{LC} \setminus \mathbf{b}t \star \mathbf{E}v$  del modelo promedio ( $\dot{x} = \mathcal{L}\mathcal{C}^{-1}(\mathcal{J}(\mu) - \mathcal{R})x + \mathcal{L}\mathcal{C}^{-1}\beta(\mu)E$ ).

**Procedimiento de modelado basado en grafos.** Así llegamos al siguiente procedimiento general:

1. Consideramos un convertidor de un solo interruptor activo (un solo transistor) y una sola fuente  $E$  de CD.
2. Obtenemos los grafos correspondientes a cada modo de operación: Grafo  $G_1$  (on o encendido) y grafo  $G_0$  (off o apagado). Se nombran los lados de los grafos, con los elementos  $E, L_i, C_j, T, D_k$ . Se eliminan los resistores.
3. Los grafos generados a partir de los circuitos  $G_1$  y  $G_0$  son tales que no contienen resistores. Solo contienen la fuente  $E$ , las bobinas  $L_i$  y los capacitores  $C_j$ , el transistor  $T$  y los diodos  $D_k$ . Etiquetamos cada arco con su correspondiente elemento y se fijan direcciones de corriente en cada bobina  $L_i$  y la caída de tensión '+' a '-' en cada capacitor  $C_j$ .
4. Definimos los *ciclos* en cada grafo. Por cada bobina  $L_i$  planteamos un *ciclo de corriente*. Estos ciclos son independientes. Esto nos lleva a dos reglas: a) no puede haber ciclos que no contengan bobinas, y b) en el ciclo  $i$  puede haber una y solamente una bobina  $L_i$ .
5. Cada ciclo de corriente  $i$  nos permite evaluar los elementos de la matriz  $\mathcal{J}$ , en la fila de  $L_i$  asignamos los signos para cada columna de  $C_j$ : 0 si en dicho ciclo no está presente el capacitor  $C_j$ , -1 si la corriente  $i_{L_i}$  es incidente desde el exterior al lado '+' del capacitor  $C_j$ , 1 si entra por el lado '-'.
6. Cuando un ciclo  $i$  de corriente contiene a la fuente  $E$  de CD, esto corresponde a un elemento no nulo (1 o -1) en la fila de la bobina  $L_i$ .
7. Obtenemos las matrices  $\mathcal{J}_{\text{on}}$  y  $\beta_{\text{on}}$  para el modo encendido y las matrices  $\mathcal{J}_{\text{off}}$  y  $\beta_{\text{off}}$  para el modo apagado.
8. Empleamos la variable auxiliar  $u$  para obtener el modelo conmutado: la matriz antisimétrica resultante  $\mathcal{J}(u) = \mathcal{J}_{\text{on}}u + \mathcal{J}_{\text{off}}(1 - u)$ ; la matriz de entrada  $\beta(u) = \beta_{\text{on}}u + \beta_{\text{off}}(1 - u)$ .
9.  $\mathcal{L}\mathcal{C} = \text{diag}[L_1, C_1, \dots, L_i, C_i, \dots, C_j, \dots]$

10. Los resistores involucrados aparecen en el circuito original de la siguiente forma: por cada bobina  $L_i$  habrá un resistor  $r_i$  en serie con la bobina; por cada capacitor  $C_j$  habrá un resistor  $R_j$  en paralelo con dicho capacitor. Esto hace que en la matriz  $\mathcal{R}$  aparezca en la diagonal una resistencia  $r_i$  asociada a la bobina  $L_i$  y una conductancia  $1/R_j$  asociada al capacitor  $C_j$ .
11. El modelo resultante está dado por:

$$\mathcal{L}\mathcal{C}\dot{x} = \mathcal{J}(u)x - \mathcal{R}x + \beta(u)E . \quad (7.4.1)$$

**Observación 1.** El modelo (7.4.1) surge naturalmente del enfoque de grafos. Un modelo semejante al propuesto (cambia ligeramente en los términos de entrada de energía externa) ya ha sido empleado con anterioridad (ver [17, Sección 2.13]).

**Observación 2.** Como se puede apreciar, las dos matrices  $\mathcal{L}\mathcal{C}$  y  $\mathcal{R}$  surgen naturalmente del enfoque propuesto y sin hacer ningún tipo de cálculos. De la formalización de la matriz  $\mathcal{R}$  se puede apreciar que *no es necesaria la inclusión de ningún resistor en la estructura del grafo*. Solo tiene que cumplirse que sean resistores en serie con las bobinas o resistores en paralelo con los condensadores. Evidentemente, en nuestro enfoque excluimos los casos de resistores equivalentes en serie con los condensadores o de resistores equivalentes en paralelo con las bobinas.

## 7.5 Conclusiones y trabajos futuros

Presentamos un procedimiento de convertidores de potencia del tipo CD a CD conmutados operando en modo de conducción continuo; esto es, convertidores conmutados mediante modulación de ancho pulso con dos modos de operación on y off. El uso de grafos nos permite identificar la dinámica del sistema asociada principalmente a dos matrices: una matriz antisimétrica  $\mathcal{J}(u)$ , posiblemente dependiente de la posición  $u$  del interruptor, que establece la relación de intercambio de energía, un campo conservativo<sup>7</sup> entre inductores y capacitores para un interruptor accionado  $u \in \{0, 1\}$ ; y una matriz  $\beta(u)$  de entrada al convertidor la cual establece la forma en que la fuente CD de tensión  $E$  energiza a las bobinas  $L_i$ .

El procedimiento de modelado mostrado nos permitió obtener un modelo general (7.4.1), junto a su modelo promedio (7.4.2), para convertidores de potencia basados en fuentes CD de tensión  $E$ . Gracias a los grafos (diagramas) y a su equivalencia en matrices, pretendemos usar en un futuro el procedimiento propuesto para generar nuevos convertidores de potencia (con topologías no estudiadas hasta ahora) y compararlos con los existentes. Usando la matriz inversa

---

<sup>7</sup>Lo que se llama también *resonancia* o propiedad de dinámica sin pérdidas (*lossless* en inglés) [20, 21].

$(\mathcal{J} - \mathcal{R})^{-1}$  es posible además evaluar el efecto de elementos parásitos (pérdidas asociadas a la matriz  $\mathcal{R}$ ) sobre la respuesta en estado estacionario, debido a que puede expresarse en una forma semejante al generado mediante el teorema del elemento extra de Middlebrook (ver [19]).

Como se puede apreciar en los ejemplos presentados, el procedimiento mostrado simplifica el cálculo de ecuaciones que se pueden plantear usando las leyes de Kirchhoff. Este procedimiento se puede extender al caso de fuentes CD de corriente  $I$ : en dicha situación, se deben analizar los ciclos de corriente formados por la fuente  $I$  y uno o más condensadores.



# Bibliografía

- [1] G. Kirchhoff. **Ueber den durchgang eines elektrischen stromes durch eine ebene**, insbesondere durch eine kreisförmige. *Ann. Phys. Chem.*, 64, 497-514, 1845.
- [2] G. Kirchhoff. **Über die auflosung der gleichungen, auf welche man bei der untersuchung der linearen verteilung galvanischer strome geföhrt wird**. *Ann. Phys. Chem.*, 72, 497-508, 1847.
- [3] F. Harary. **Graph Theory**. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1969.
- [4] S. Karni. **Analysis of Electrical Networks**. John Wiley and Sons, New York, 1986.
- [5] T. Nishi and L. Chua. **Topological criteria for nonlinear resistive circuits containing controlled sources to have a unique solution**. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 31(8), 722-741, 1984.
- [6] D. Wolaver. **Basic constraints from graph theory for DC-to-DC conversion networks**. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, 19(6), 640-648, Nov 1972.
- [7] S. Cuk. **General topological properties of switching structures**. In 1979 IEEE Power Electronics Specialists Conference, 109-130, June 1979.
- [8] A. Pietkiewicz and D. Tollik. **Systematic derivation of two-state switching DC-DC converter structures**. In Telecommunications Energy Conference, 1984. INTELEC'84. International, 473-477, Nov 1984.
- [9] A. Pietkiewicz and D. Tollik. **Unified topological modeling method of switching DC-DC converters in duty-ratio programmed mode**. *IEEE Transactions on Power Electronics*, PE-2(3), 218-226, July 1987.
- [10] M. Ogata and T. Nishi. **Graph-theoretical approach to 2-switch DC-DC converters**. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 33, 161-173, 2005.

- [11] R. D. Middlebrook and S. Cuk. **A general unified approach to modeling switching-converter power stages**. In 1976 IEEE Power Electronics Specialists Conference, 18-34, June 1976.
- [12] R. D. Middlebrook and S. Cuk. **A general unified approach to modeling switching-converter power stages**. *Int. J. Electron.*, 42(6), 521-550, 1977.
- [13] S. Cuk. **Modeling, Analysis and Design of Switching Converters**. Phd thesis, California Institute of Technology, Pasadena, California, 1977.
- [14] D. Maksimovic, A. M. Stankovic, V. J. Thottuvelil, and G. C. Verghese. **Modeling and simulation of power electronic converters**. *Proc. IEEE*, 89(6), 898-912, 2001.
- [15] J. G. Kassakian, M. F. Schlecht, and G. C. Verghese. **Principles of Power Electronics**. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1991.
- [16] R. Erickson and D. Maksimovic. **Fundamentals of Power Electronics**. Kluwer, Boston, MA, 2 edition, 2001.
- [17] H. Sira Ramírez and R. Silva Ortigoza. **Control Design in Power Electronics Devices**. Springer - Verlag, London, 2006.
- [18] T.-F. Wu and Y.-K. Chen. **Modeling PWM DC/DC converters out of basic converter units**. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 13(5), 870-881, Sep 1998.
- [19] R. D. Middlebrook. **Null double injection and the extra element theorem**. *IEEE Transactions on Education*, 32(3), 167-180, Aug 1989.
- [20] T. F. Wu. **The origin of converters**. In 2013 1st International Future Energy Electronics Conference (IFEEEC), 611-617, Nov 2013.
- [21] T. F. Wu. **Decoding and synthesizing transformerless PWM converters**. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 31(9), 6293-6304, Sept 2016.