

## Ensayos

# Solución de problemas vía software

de computo simbólico, gráfico y numérico

### Resumen

En la problemática de la enseñanza y aprendizaje en las carreras de ingeniería es frecuente enfrentarse a problemas matemáticos diversos. La potencialidad que se tiene con un programa de cómputo simbólico para resolver y analizar problemas matemáticos es enorme y en el presente trabajo se muestra como se utiliza en la resolución de tres problemas que se presentan en diferentes currículas de ingeniería.

### Abstract

Problem solving by means of symbolic, graphic and numeric computer software. Within the problem areas of teaching and learning in engineering majors, one commonly faces different mathematical problems. The potential found in a symbolic computer program to solve and analyse mathematical problems is huge. This article shows how to use it to solve three problems which are dealt with in different engineering courses.

### Abstrait

Il est fréquent d'être confronté à des problèmes mathématiques divers quand il s'agit de problématique d'enseignement et d'apprentissage pour les études d'ingénierie. Le potentiel disponible d'un programme de comput symbolique pour résoudre et analyser des problèmes mathématiques est énorme. Ce travail montre comment l'utiliser pour résoudre trois problèmes qui se présentent en différentes matières d'ingénierie.

Enrique Lemus Fuentes\*

## Introducción

La disponibilidad en la actualidad de software de cómputo simbólico, gráfico y numérico, permite resolver una gran diversidad de problemas de distintos campos y áreas del conocimiento. Desde la aparición en el mercado de Mathematica®, Maple®, Derive®, Mathcad®, entre otros paquetes, diversas instituciones de educación en el mundo hacen uso de estos programas con propósitos de enseñanza, para verificar resultados, hacer "experimentos", graficar datos y en general para resolver problemas.

Es importante mencionar que aunque muchas instituciones utilizan este software aún hay quienes no conocen su existencia y su potencialidad, sobre todo los estudiantes.

En este trabajo se utilizará Mathematica® para resolver algunos problemas que se presentan en la currícula de la carrera de ingeniería en alimentos, ingeniería bioquímica, ingeniería química, ingeniería mecánica, entre otras.

El primer problema a resolver es de fisicoquímica, en particular, hallar las propiedades de una sustancia como el volumen o coeficiente de com-

\* Instituto de Agroindustrias. Universidad Tecnológica de la Mixteca. Email: elf@nuyoo.utm.mx

presibilidad cuando se encuentra bajo condiciones determinadas de presión y temperatura.

El segundo problema trata de un problema de mecánica de fluidos, se estudiará el tiempo transcurrido para vaciar un tanque debido la acción de la gravedad.

Para finalizar se abordará un problema de fenómenos de transporte (transferencia de calor) en el que un cuerpo de cierta geometría está sujeto a un gradiente de temperatura.

## Materiales y métodos

Los cálculos numéricos se efectuaron en una PC Pentium II usando el programa de cómputo Mathematica® 3.0.

## Modelos matemáticos

### 1. Ecuación de estado de Van der Waals

Una ecuación de estado que se utiliza frecuentemente en la introducción al tema de las ecuaciones de estado es la ecuación de Van der Waals.

Este problema está tomado del libro de Abbott y Van Ness, un libro de texto clásico.

Calcule el factor de compresibilidad del aire a 180 K y presiones de 1, 5, 10, 20, 40, 60, 80, 100, 200, 300, 400 y 500 bar

#### Solución

Por simplicidad, considere que el aire contiene 79% de moles de nitrógeno y 21% de moles de oxígeno. Se utilizan las reglas de mezclado estándar, siendo el nitrógeno la especie (1) y el oxígeno la especie (2).

La ecuación de estado de Van der Waals puede escribirse de la siguiente manera:

$$Z^3 - \left(1 + \frac{bP}{RT}\right) Z^2 + \frac{\sigma P}{R^2 T^2} Z - \left(\frac{\sigma P}{R^2 T^2}\right) \left(\frac{bP}{RT}\right) = 0$$

donde, para una sustancia pura:

$$\sigma = \frac{27 R^2 T_c^2}{64 P_c} \quad \text{y} \quad b = \frac{1 R T_c}{8 P_c}$$

siendo R la constante de los gases, T<sub>c</sub> es la temperatura crítica, P<sub>c</sub> es la presión crítica y Z es el factor de compresibilidad.

Se puede hallar en tablas de propiedades los siguientes valores críticos para las sustancias involucradas, en este caso nitrógeno y oxígeno.

$$\begin{array}{ll} T_{c1} = 126.2 & \text{K, } P_{c1} = 33.9 \text{ bar,} \\ T_{c2} = 154.5 & \text{K, } P_{c2} = 50.5 \text{ bar.} \end{array}$$

Las reglas de mezclado son las siguientes (ver arriba la definición de a y b para una sustancia pura):

$$b = \sum_i x_i b_{ii} \quad \text{y} \quad a = \sum_i \sum_j x_i x_j a_{ij}$$

Para las a<sub>ij</sub> a menudo se emplea la regla de combinación de media geométrica:

$$a_{ij} = (a_{ii} a_{jj})^{1/2}$$

Como se observa en la tabla siguiente, el rendimiento de la ecuación de estado mejora a presiones bajas y se deteriora a medida que se incrementa el nivel de presión. Los datos que aparecen en la tabla siguiente provienen de dos fuentes, de un manual de propiedades para el aire (Handbook Fundamentals, 1993) y los resultados obtenidos de la ecuación de van der Waals a diferentes presiones y temperatura fija de 180 K.

P/bar	Z para el aire a 180 K	
	Manual	Ec. estado
1	0.9967	0.996356
5	0.9832	0.98164
10	0.9660	0.962919
20	0.9314	0.924381
40	0.8625	0.843302
60	0.7977	0.761217
80	0.7432	0.696741
100	0.7084	0.676484
200	0.7986	0.89083
300	1.0068	1.17595
400	1.2232	1.46097
500	1.4361	1.74193

TABLA COMPARATIVA DEL FACTOR DE COMPRESIBILIDAD PARA EL AIRE A DISTINTAS PRESIONES Y UNA TEMPERATURA FIJA DE 180 K.

A continuación se muestra el código como se ha implementado en Mathematica (puede proponerse otra forma en su programación).

Se escriben los datos y constantes conocidas para su empleo posterior.

$TC1=126.2$ ;  $TC2=154.5$ ;  $PC1=33.9$ ;  $PC2=50.5$ ,  $T=180$ ;  $R=83.14$ ;

$f1=0.79$ ;  $f2=0.21$ ;  $P=100$ ;

Las constantes referidas a las condiciones críticas para cada especie se evalúan así:

$$a1=(27/64) (R^2 TC1^2/PC1); a2=(27/64) (R^2 TC2^2/PC2);$$

$$b1=(1/8) (R TC1/PC1); b2=(1/8) (R TC2/PC2);$$

Las reglas de mezclado son:

$$cb=f1*b1 + f2*b2;$$

$$ca=f1*f1*a1 + f2*f2*a2 + 2*f1*f2*(a1*a2)^(1/2);$$

Se evalúan las constantes que aparecen en la ecuación de estado de Van der Waals:

$$c=(cb*P/(R*T));$$

$$d=(ca*P/(R^2 * T^2));$$

$$e=c*d;$$

La ecuación de estado se escribe de la siguiente forma (nótese el cambio de variable):

$$\text{funx}[x\_]:=x^3 -(1+c) * x^2 + d*x - e$$

Se encuentra la solución a la ecuación cúbica:

$$\text{FindRoot}[\text{funx}[x]=0, \{x,0.9\}]$$

A lo que el programa responde con:

$$\{x->0.676484\}$$

Para hallar los resultados que restan solamente se cambia el valor de P.

## 2. Drenado de un tanque

Una situación que se presenta a menudo en instalaciones industriales es el vaciado o drenado de un tanque de cierta geometría.

Un tanque de agua tiene en el fondo un agujero de área  $a$  por el cual el agua está saliendo. En condiciones ideales la velocidad del agua que sale a través del hoyo es  $v = (2 g y)^{1/2}$ . En condiciones reales, hay que tomar en cuenta la contracción que sufre un chorro de agua en un orificio, para tener  $v = c(2 g y)^{1/2}$ , donde  $c$  es una constante empírica comprendida entre 0 y 1.

El problema está esquematizado en la siguiente figura.

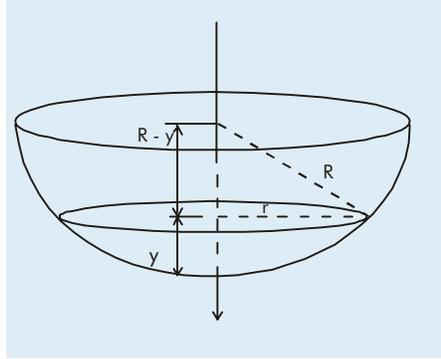


FIGURA 1  
Drenado de un tanque hemisférico.

La ecuación diferencial que describe el vaciado del tanque es:

$$A(y) \frac{dy}{dt} = -c\alpha \sqrt{2gy}$$

donde  $A(y)$  es el área variable del espejo del fluido,  $y$  es la altura del espejo de agua,  $g$  es la aceleración de la gravedad y  $t$  es el tiempo.

Hay que señalar que no se deduce la ecuación diferencial que describe el tiempo de vaciado del tanque debido a que esta es fácil de hallar o encontrarse en la literatura.

Solución

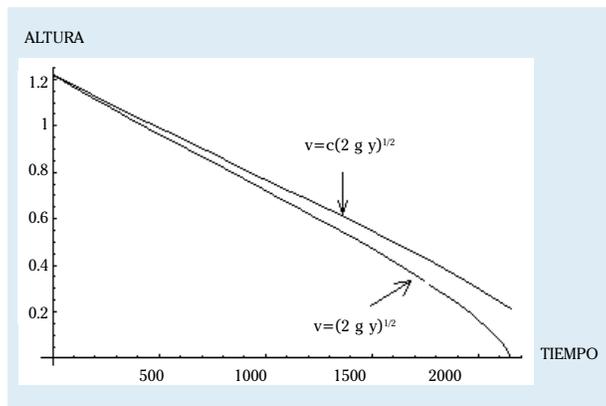


FIGURA 2  
Soluciones obtenidas en el drenado del tanque hemisférico.

La gráfica anterior muestra el comportamiento que sigue el fluido al encontrarse o no con una restricción, estos resultados se obtienen variando simplemente el valor de  $c$  en la ecuación diferencial. Puede hallarse una interpretación física al valor de  $c$  después de observar las curvas en la gráfica.

El código que se implementó para resolver la ecuación diferencial se presenta a continuación.

Se escriben los datos conocidos

$$\begin{aligned} \text{rad} &= 1.22; \\ \text{beta} &= \text{Pi} (0.0127)^2 (2*9.81)^{(1/2)} \\ \text{gama} &= 0.9 \text{Pi} (0.0127)^2 (2*9.81)^{(1/2)} \end{aligned}$$

Se escriben las ecuaciones diferenciales, en primer lugar el caso ideal

$$\text{nlf}[t\_]=\text{nlh}'[t]+(\text{beta}*\text{nlh}[t]^{(-1/2)})/(\text{Pi}*(2*\text{rad}-\text{nlh}[t]))$$

y el caso donde se toma en cuenta el efecto de la contracción debido a la fricción

$$\text{cnl}[t\_]=\text{cnh}'[t]+(\text{gama}*\text{cnh}[t]^{(-1/2)})/(\text{Pi}*(2*\text{rad}-\text{cnh}[t]))$$

Se indica que se tiene que resolver numéricamente con la instrucción NDSolve, nótese el valor

inicial y el intervalo de tiempo para hallar la solución, en ambos casos.

```
soln1=NDSolve[{nlf[t]==0, nlh[0]==1.22},
nlh[t],{t,0.0,2150}]
y
sol2=NDSolve[{cnl[t]==0, cnh[0]==1.22},
cnh[t],{t,0.0,2150}]
```

Es necesario en este caso hacer un cambio de variable con el propósito de graficar posteriormente las soluciones.

```
nlhsolve[t_] = nlh[t]/. soln1[[1]]
y
cnhsolve[t_] = cnh[t]/. sol2[[1]]
```

Finalmente se grafican las dos soluciones por medio de la instrucción Plot.

```
Plot[{cnhsolve[t],nlhsolve[t]},{t,0.0,2150},
AxesLabel->{TIEMPO,ALTURA}]
```

### 3. Pérdidas de calor en una aleta circular

Este problema está tomado del libro de Bird, Stewart y Lightfoot, que es el libro de texto clásico en fenómenos de transporte.

Obtener el perfil de temperatura  $T(r)$  para una aleta circular de espesor  $B$  situada sobre una tubería cuya temperatura de la pared externa es  $T_0$ .

La situación física está esquematizada en la figura 3.

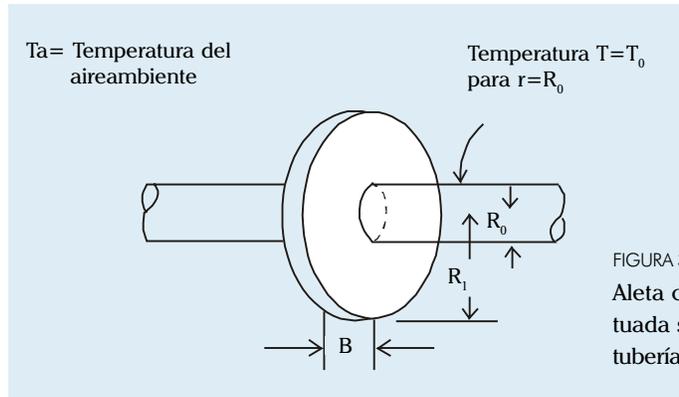


FIGURA 3  
Aleta circular situada sobre una tubería caliente

Solución

Se comienza por hacer un balance de envolvente sobre un elemento diferencial.

$$q_r|_r B2\pi r - q_r|_{r+\Delta r} B2\pi(r + \Delta r) - h2\pi(\Delta r)^2(T - T_a) = 0$$

Se utiliza también la ley de Fourier

$$q_r = -k \frac{dT}{dr}$$

donde  $k$  es la conductividad térmica,  $T$  es la temperatura y  $r$  es la posición radial.

Sustituyendo esta relación en la ecuación anterior, y dividiendo entre  $2\pi BDr$  se tiene:

$$\frac{d}{dr} \left( kA \frac{dT}{dr} \right) - \frac{hP}{kA} (T - T_a) = 0$$

donde  $P$  es el perímetro,  $A$  es el área y  $h$  es el coeficiente convectivo de transferencia de calor, dividiendo entre  $Dr$  y tomando el límite cuando tiende a cero, se tiene:

$$\frac{d^2T}{dr^2} - \frac{hP}{kA} (T - T_a) = 0$$

Esta ecuación diferencial con las condiciones de frontera puede resolverse de la siguiente manera.

Existen tres casos posibles, de los cuales aquí se presenta solamente uno.

Las condiciones que se utilizarán son las siguientes:

$$\begin{aligned} r = R_0 ; & \quad T = T_0 \\ r = R_1 ; & \quad T = T_a \end{aligned}$$

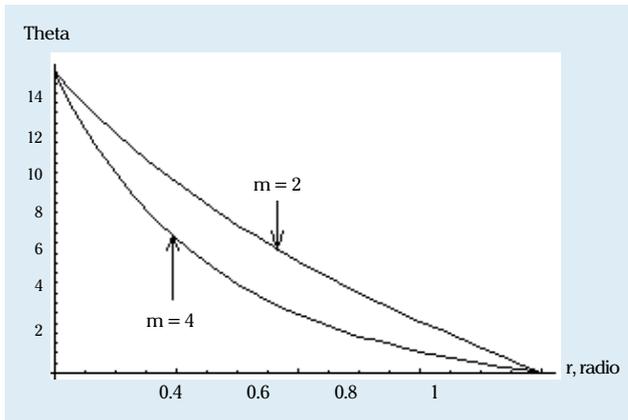
Resulta conveniente tomar  $m^2 = (h P/k A)$ , se procede a escribir la ecuación diferencial con las condiciones de frontera mencionadas y resolver utilizando la instrucción DSolve.

```
ecdif=(y''[x]-m^2 (y[x] - Ta) == 0);
DSolve[{ecdif, y[R0]==To, y[R1]==Ta}, y[x], x]
```

A lo que el programa responde con:

$$\{y[x] \rightarrow E^{-mx} (E^{mx} T_a + \frac{E^{m(2R_1+R_0)} (T_a - T_0)}{-E^{2mR_1} + E^{2mR_0}} - \frac{E^{mR_0+2mx} (T_a - T_0)}{-E^{2mR_1} + E^{2mR_0}})\}$$

Que es la respuesta que se buscaba.



La influencia que tiene el parámetro  $m$  sobre la solución obtenida es sustancial como era de esperarse debido a que están involucradas las propiedades de transporte de los medios involucrados en la transferencia de calor.

La variación en las propiedades de transporte influirán fuertemente la transferencia de calor, esto se observa claramente en la gráfica anterior.

## Conclusiones

Se ha mostrado como puede hallarse la solución de distintos problemas utilizando Mathematica®. Se resalta el hecho de que se han resuelto problemas en los cuales se tiene que resolver una ecuación cúbica para hallar las raíces o soluciones (ecuación de estado), esto se ha logrado sin tener que utilizar un gran número de líneas de programación, sino que se explotan las características de Mathematica® para resolver ecuaciones cúbicas. Esto permite al usuario concentrarse en la interpretación y análisis de los resultados al cambiar y combinar parámetros presentes en la ecuación.

En la solución al problema del drenado del tanque se utilizó la capacidad numérica para resolver la ecuación diferencial que describe el flujo del fluido en función del tiempo. Otra característica de este programa de cómputo que se observa con la solución de este problema es la facilidad que se tiene para representar en forma gráfica los resultados obtenidos sin necesidad de "salirse" del programa y utilizar un graficador ajeno.

Las capacidades para hacer cálculos simbólicos queda claro al resolver el problema de la aleta de enfriamiento, donde se ha resuelto el problema planteado

FIGURA 4  
Representación de  $q = T - T_a$ , versus  $r$ , el radio de la aleta, para dos valores de  $m$ .

sin recurrir al álgebra laboriosa o a esquemas numéricos de solución.

Esta forma de resolver los problemas descritos con anterioridad permite al usuario centrarse en las características relevantes del problema, a la influencia que tienen las variables y parámetros en la solución final, se ha visto que hallar las soluciones anteriores toma solo algunos minutos si se cuenta con una computadora y el paquete de software.

Los problemas presentados pretenden motivar a los estudiantes a interesarse en este u otro paquete de cómputo simbólico para facilitarles la tarea en la resolución de problemas.

Este ejercicio se lleva a cabo en la actualidad con algunos de los alumnos de la carrera de ingeniería de los alimentos en la Universidad Tecnológica de la Mixteca y se pretende monitorear el desarrollo de sus ha-

bilidades en la resolución de problemas después de ofrecerles esta herramienta 

## Bibliografía

ABBOTT, M. M., H. C. VAN NESS

1991 Termodinámica, McGraw-Hill.

ASHRAE

1993 Handbook: Fundamentals.

BIRD, R., STEWART, W., Y LIGHTFOOT, E.

1987 Fenómenos de Transporte, Reverté.

PRAUSNITZ, J. M., R. N. LICHTENTHALER, E. G. AZEVEDO

1986 Molecular Thermodynamics of Fluid-Phase Equilibria, Prentice Hall.

WOLFRAM

1991 Mathematica<sup>®</sup>, A System for Doing Mathematics by Computer, Addison Wesley.