

# Análisis de un Robot de 1GDL Oscilando como

## Péndulo Aplicando el Álgebra Hipercompleja.

### Resumen

En la presente investigación, se estudia la aplicación del álgebra Hipercompleja (cuaterniones) en la teoría de control moderno. Para tal efecto, se modelan las coordenadas generalizadas de un robot de un grado de libertad (1GDL), en el espacio vectorial  $\mathfrak{R}^4$ , y se determinan aspectos importantes de la teoría de control como: controlabilidad, controlabilidad de Gramiano, estabilidad, estabilidad de Lyapunov y energía mínima. El análisis dinámico del robot se realiza para un sistema amortiguado ( $f > 0$ ) y no amortiguado ( $f = 0$ ), en tres casos diferentes: 1) el sistema no se excita por ninguna fuerza externa (respuesta libre), 2) respuesta forzada y, 3) Se diseña una fuerza externa para conducir al robot de una posición inicial a una final; utilizando el principio de mínima energía. Para la simulación de resultados se utiliza el software Mathematica®.

El álgebra de cuaterniones, representa un método alternativo para el estudio de la dinámica de sistemas físicos y diseño de estrategias de control de prácticas. La modelación en este espacio, no requiere linealizar la ecuación dinámica no lineal del sistema; como ocurre con los métodos tradicionales.

**Palabras clave:** Estabilidad, estabilidad de Lyapunov, controlabilidad, controlabilidad Gramiano, energía mínima y conjunto invariante.

### 1. Introducción

Los sistemas de control para robots manipuladores, requieren del desarrollo de modelos matemáticos obtenidos a través de las leyes físicas que rigen la dinámica del robot. Estos modelos definen y predicen el comportamiento presente y futuro del mismo, sin contar con su presencia física. Un robot industrial, requiere de ciertos elementos sensoriales que le permitan actuar y reaccionar para alcanzar una determinada posición; es decir, el robot reacciona ante la presencia de algún obstáculo y corrige su trayectoria. Estas acciones y reacciones del robot, resultan del diseño de sistemas de control capaces de compensar cualquier perturbación o variación en los parámetros del robot.

Para ilustrar la importancia de la teoría de control clásico y moderno, en el desarrollo e implementación de circuitos electrónicos de robots educativos e industriales, se utiliza un robot de 1GDL, con dinámicas no lineales. Este sistema se estudia oscilando como péndulo y en su respuesta forzada. En [1], [2], [3] [4], [5] y [6], se analiza el comportamiento dinámico del robot 1GDL; utilizando una versión linealizada de su ecuación dinámica no lineal. Aproximando el término  $\sin \theta(t) \approx \theta(t)$ , lo cual significa que el robot se mueve con ángulos de amplitudes pequeñas. Consideración válida solamente cuando el sistema mecánico del robot se restringe físicamente, de lo contrario carece de sentido.

Esta linealización restringe el área de trabajo del sistema y en muchas ocasiones se obtienen sistemas de control alejados del comportamiento real del mismo. El diseñador trata de compensar los términos no incluidos en el proceso de linealización aplicando la técnica de prueba y error. Lo anterior, nos lleva a buscar y establecer nuevos planteamientos algebraicos, que nos permitan analizar sistemas no lineales sin restringir la región de trabajo del mismo. Una de las posibilidades encontradas es el álgebra de cuaterniones utilizada en [7], [8], y [9] para modelar cuerpos rígidos. Los modelos cinemáticos y dinámicos obtenidos demuestran la superioridad de ésta álgebra, con relación a los métodos tradicionales de modelación. Esta superioridad se acentuará aún más si es posible aplicar el álgebra Hipercompleja en la teoría de control moderno, el cual constituye el tópico central de la presente investigación.

La controlabilidad, controlabilidad de Gramiano, estabilidad y estabilidad en el sentido de Lyapunov así como el principio de mínima energía se determinan para establecer un análisis comparativo entre el sistema modelado en el espacio vectorial de cuaterniones y los métodos tradicionales.

Para el análisis del sistema se consideran los siguientes casos: 1) Respuesta libre, 2) Respuesta forzada y 3) Diseño de una estrategia de control para llevar al robot de una posición a otra utilizando el principio de mínima energía.



## 2. Modelo dinámico

En la figura 1, se muestra la configuración del robot de un grado de libertad 1GLD a analizar, formado por los siguientes elementos:  $l$  longitud del péndulo,  $m$  masa, y  $q(t)$  el ángulo de rotación, su correspondiente ecuación dinámica obtenida en [7] es:

$$2ml(\ddot{p}_3 p_0 - \dot{p}_0 \dot{p}_3) + 2f(\dot{p}_3 p_0 - \dot{p}_0 \dot{p}_3) + 1/2 mg(p_0^2 - p_3^2) = u(t) \quad (1)$$

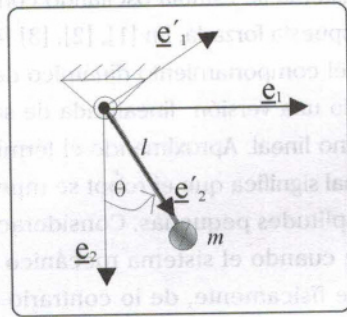


Figura 1 Configuración de un robot 1GLD.

donde  $f$  representa la constante de fricción,  $g$  la fuerza de gravedad,  $u \in \mathbb{R}^4$  el vector de control,  $(p_0^2 - p_3^2)$ ,  $(\dot{p}_3 p_0 - \dot{p}_0 \dot{p}_3)$  y  $2(p_3 p_0 - \dot{p}_0 \dot{p}_3)$  la posición, velocidad y aceleración angular respectivamente expresadas en el espacio vectorial de cuaterniones.

### 2.1 Estabilidad y Controlabilidad del Robot de 1GLD.

La estabilidad es uno de los aspectos más importantes en teoría de control de sistemas y es lo primero que se debe garantizar en sistemas dinámicos destinados a realizar operaciones. Un sistema dinámico, se considera estable si para pequeños cambios en los valores de entrada o en las condiciones iniciales, se producen también pequeños cambios en las salidas del sistema; de lo contrario el sistema se considera inestable.

El análisis del robot 1GLD modelado en el espacio vectorial de cuaterniones, se inicia determinando su estabilidad, en los casos no amortiguado ( $f = 0$ ) y amortiguado ( $f > 0$ ) con pequeñas y grandes variaciones de los valores del ángulo  $\theta(t)$  tanto en su respuesta libre  $u(t) = 0 \in \mathbb{R}^4$ , como para su respuesta forzada  $u(t) = mg(p_0^2 - p_3^2)$ . Para ambos casos es necesario

transformar la ecuación (1) en su correspondiente representación en el espacio estado en la forma  $\dot{x} = Ax$ , donde  $A$  es la matriz de estado de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  y  $x \in \mathbb{R}^4$  el vector de estado y sus correspondientes variables de estado se definen como:

$$x_1 = (p_0^2 - p_3^2) \quad (2)$$

$$x_2 = (\dot{p}_3 p_0 - \dot{p}_0 \dot{p}_3) \quad (3)$$

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{f}{ml} x_2 - \frac{g}{2l} x_1 \quad (5)$$

Los valores característicos se determinan a través de la ecuación característica  $|\lambda I - A| = 0$ , resultando:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ \frac{g}{2l} \lambda + \frac{f}{ml} & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + \lambda \frac{f}{ml} + \frac{g}{2ml} = 0 \quad (6)$$

los valores característicos para el sistema amortiguado ( $f > 0$ ) son.

$$\lambda_1 = \frac{-f + \sqrt{f^2 - 2m^2 gl}}{2ml} \quad (7)$$

$$\lambda_2 = \frac{-f - \sqrt{f^2 - 2m^2 gl}}{2ml} \quad (8)$$

Como  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  tienen parte real negativa, el sistema se considera estable. Sin embargo, para el caso no amortiguado ( $f = 0$ ), los valores característicos son complejos conjugados.

$$\lambda_1 = i \sqrt{\frac{g}{2l}} \quad (9)$$

$$\lambda_2 = -i \sqrt{\frac{g}{2l}} \quad (10)$$

Esto significa que el péndulo oscilará alrededor de su posición baja en forma periódica.

El análisis del robot como un sistema no lineal, se inicia determinando los puntos de equilibrio del sistema, obtenidos igualando las ecuaciones (4) y (5) con cero, para nuestro caso los puntos de equilibrio son:

$$x_e^T = [n \frac{\pi}{2}, 0] \quad (11)$$

donde  $n$  es un número impar diferente de cero. Estos puntos de equilibrio son asintóticamente estables



en forma global tanto para el caso no amortiguado como para el caso amortiguado ya que satisfacen

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = 0 \quad (12)$$

es decir, pequeñas perturbaciones producirán pequeñas oscilaciones en el robot.

Para analizar la estabilidad del robot se aplica el segundo método de Lyapunov. Este método establece que la energía total de un sistema mecánico decrece continuamente cuando el tiempo pasa, es decir, el vec-

tor de estado  $x^T = [(p_0^2 - p_3^2), (\dot{p}_3 p_0 - \dot{p}_0 p_3)]$  se aproxima a un valor constante (estado estacionario), correspondiente al valor cero de la energía cuando el tiempo se incrementa [1] y [2] para cualquier elección de las condiciones iniciales.

Sea  $\bar{\mathbf{x}}$  una solución en estado estacionario de la ecuación diferencial

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t) \quad (13)$$

Una función de Lyapunov  $V(x)$  definida positiva en  $\bar{\mathbf{x}}(t)$ , es una función continuamente diferenciable en un conjunto de números no negativos [2] si satisface las siguientes propiedades.

- a)  $V(\bar{\mathbf{x}}) = 0$
- b)  $V(\bar{\mathbf{x}}) > 0$
- c)  $\dot{V}[\bar{\mathbf{x}}(t)] \leq 0$

para todo  $x$  y  $t > 0$  en una vecindad de  $\bar{\mathbf{x}}$ . Para el péndulo con fricción, se propone la siguiente función de Lyapunov expresada en el espacio vectorial de quaterniones como:

$$V(x) = [(p_0^2 - p_3^2) - 1] + (\dot{p}_3 p_0 - \dot{p}_0 p_3)^2$$

Su derivada es:

$$\dot{V}(x) = -x_2^2 = -(\dot{p}_3 p_0 - \dot{p}_0 p_3)^2 \quad (15)$$

La función de Lyapunov candidata  $V(x)$  satisface las propiedades (a) y (b), pero no cumple con (c) ya que  $\dot{V}$  no es menor a cero sino  $\dot{V} = 0$ . El sistema es estable pero no de manera asintótica. Para inferir estabilidad asintótica se utiliza el Teorema de LaSalle (principio de Invariancia) [2], en la presente investigación se analiza solamente el caso amortiguado.

Sea  $\dot{V}$  definida por la ecuación (15), y  $E = \{x/x_2 = 0\}$ , el conjunto de todos los puntos donde  $\dot{V} = 0$ . Las variables de estado son:

$$x_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{f}{ml} x_2 - \frac{g}{2l} x_1$$

Si  $x(t)$  se mantiene idéntico a  $E$ , entonces:

$$x_2(t) \equiv 0 \Rightarrow \dot{x}_2 \equiv 0 \Rightarrow x_1 \equiv 0$$

Así la única solución que permanece en  $E$  es  $x(t) = (0, 0)$  y por lo tanto,  $x_e = (0, 0)$  es asintóticamente estable.

La controlabilidad, es la propiedad que indica si el comportamiento de un sistema puede ser controlado por medio de sus entradas. En control de robots esto significa, poder llevar al robot de una posición inicial a una posición final a través de un vector restringido  $u(t)$  en un intervalo de tiempo finito  $t \in [0, t_f]$ . Para determinar la controlabilidad del robot de 1GDL, se considera el sistema descrito por la ecuación:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (16)$$

donde  $x \in \mathcal{R}^{2 \times 1}$  es el vector de estado,  $A \in \mathcal{R}^{2 \times 2}$  la matriz de estado,  $B \in \mathcal{R}^{2 \times 1}$  la matriz de entrada y  $u$  el vector control.

Para determinar la controlabilidad del robot de 1GDL, en cualquier intervalo de tiempo, es condición necesaria y suficiente que la matriz de controlabilidad  $C \in \mathcal{R}^{2 \times 2}$  sea de rango 2, sobre el intervalo deseado.

$$C = [B \quad AB] \quad (17)$$

Tanto para el caso amortiguado como para el no amortiguado, la matriz de controlabilidad es de rango 2 y el robot tiene estado completamente controlable.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\frac{f}{m^2 l^2} \end{bmatrix} \text{rango} = 2. \quad (18)$$

## 2.2 Controlabilidad de Gramanio y principio de mínima energía

La controlabilidad de Gramanio se utiliza para determinar de manera eficiente la ley de control capaz de conducir al robot de una posición inicial a una posición



deseada, no importando qué trayectoria se siga, o qué entrada se utilice.

Sean  $x_0$  y  $x_1$ , dos vectores cualesquiera de  $R^n$ , y  $t^1 > 0$ , un tiempo arbitrario. Si la matriz de controlabilidad de Gramiano  $W_c(t)$ , es no singular y converge para todo  $t > 0$ , entonces podemos construir una entrada:

$$u(t) = -B^T e^{A^T(t-t_1)} W_c^{-1}(t_1) (e^{At_1} x_0 - x_1) \quad (19)$$

donde  $u(t)$  es la ley de control y representa la energía mínima necesaria para llevar al sistema del estado  $x_0$  a  $x_1$  en el tiempo  $t_1$ , la matriz  $W_c(t)$ , es igual a:

$$W_c(t) = \int_0^{t_c} B B^T e^{A^T(t-\tau)} d\tau = \int_0^{t_c} e^{A(t-\tau)} B B^T e^{A^T(t-\tau)} d\tau \quad (20)$$

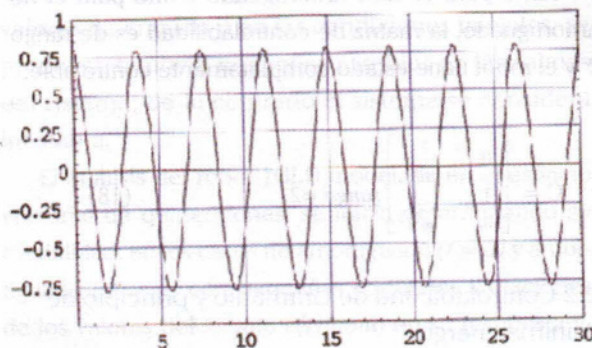
y  $t_c$  es el tiempo necesario para que sistema alcance su posición final  $x_1$ .

Si la matriz  $A$ , es una matriz de Hurwitz, entonces la integral  $W_c$  converge para  $t = \infty$ , si el par  $(A, B)$  es controlable, entonces la matriz de la ecuación (18) es de rango 2. Además si  $A$  es una matriz de Hurwitz se garantiza que  $W_c$  sea la única solución definida positiva de la ecuación:

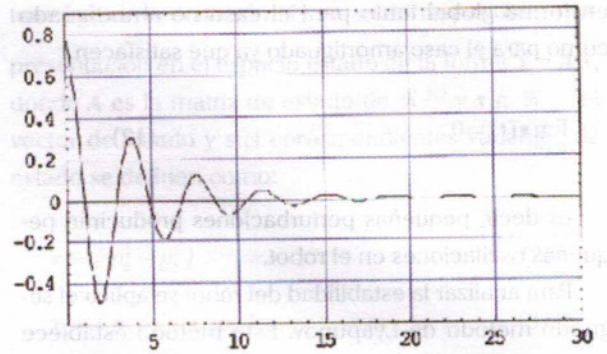
$$A W_c + W_c A^T = -B B^T \quad (21)$$

### 3. Análisis de resultados

En esta sección, se muestran la simulación de los resultados para los tres casos analizados: 1) Respuesta libre, 2) respuesta forzada, y 3) La controlabilidad de Gramiano y el principio de la mínima energía, para mover al robot de 1GDL un radian. Los valores característicos muestran, como se comporta la solución para el sistema amortiguado y no amortiguado. Los datos considerados como en [1] son los siguientes:  $l=1$  m,  $m=1$  Kg,  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>,  $x_1[0]=p/4$ ,  $x_2[0]=0$ . El coeficiente de fricción  $f=0$  para el caso no amortiguado, y  $f=0.5$  Kg-m/s, para el caso amortiguado.

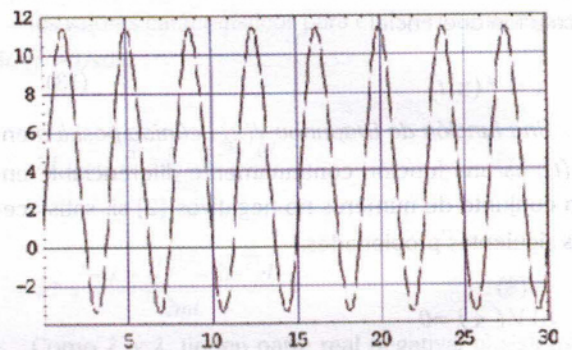


Gráfica 1. Respuesta libre del sistema no amortiguado en el intervalo de tiempo  $t[0, 30]$  seg.

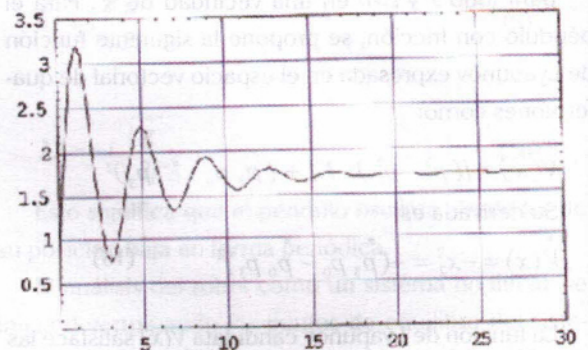


Gráfica 2. Respuesta libre del sistema amortiguado en el intervalo de tiempo  $t[0, 30]$  seg.

En la respuesta forzada, la señal de entrada se modela en el espacio vectorial de cuaterniones como  $u(t) = m g (q_0^2 - q_3^2)$ , para ambos casos

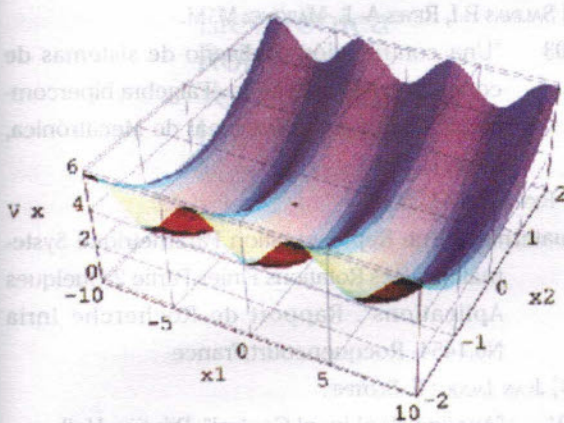


Gráfica 3. Respuesta forzada del sistema no amortiguado en el intervalo de tiempo  $t[0, 30]$  seg y  $u(t) = m g (q_0^2 - q_3^2)$

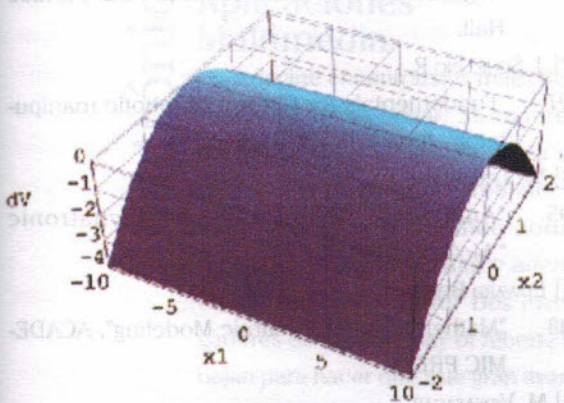


Gráfica 4. Respuesta forzada del sistema amortiguado en el intervalo de tiempo  $t[0, 30]$  seg y  $u(t) = m g (q_0^2 - q_3^2)$





Gráfica 5. Representación de la función de Lyapunov  $V(x)$  para el



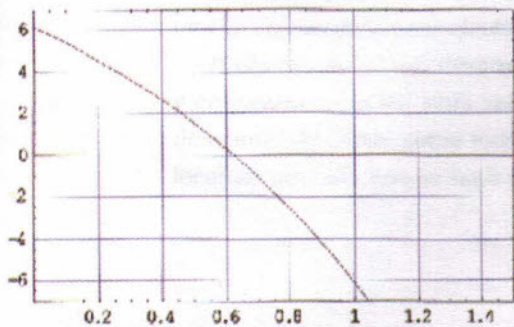
Gráfica 6. Representación de la función de Lyapunov  $V(x)$  para el robot de 1GDL.

La señal de control  $u(t)$  se diseño considerando el intervalo de tiempo  $t_c \in [0, 1]$  seg. y  $f = 1$  Kg-m/s. Obteniendo como resultado:

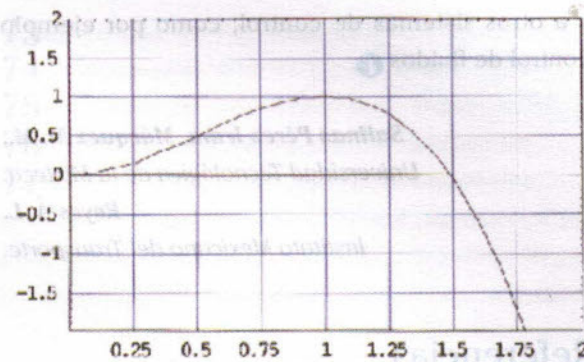
$$u(t) = 13.20(1 - e^{-t}) - 6.99e^{-t}$$

y la matriz de controlabilidad  $W_c$  siendo:

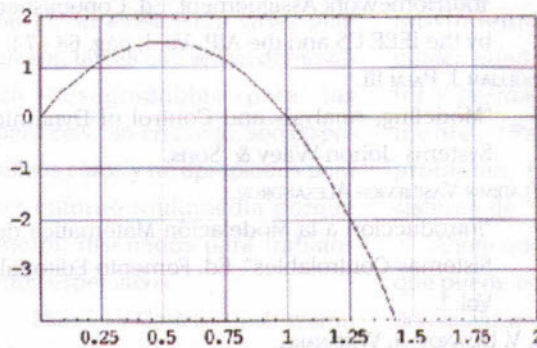
$$W_c = \begin{bmatrix} 13.198 & -6.099 \\ -6.099 & 5.1316 \end{bmatrix}$$



Gráfica 6. Evolución de la señal control  $u(t)$  para mover al péndulo un radian en un 1 seg.



Gráfica 7. Comportamiento del péndulo cuando se conduce de 0 a 1 radian en 1 seg.



Gráfica 8. Comportamiento del vector de velocidad cuando el péndulo se mueve 0 a 1 radian en 1 seg..

## 4. Conclusiones

En la presente investigación se ha presentado la aplicación del álgebra Hipercompleja en la teoría de control moderno para robots. Se determinaron conceptos de Estabilidad, Estabilidad en el sentido de Lyapunov, controlabilidad y controlabilidad de Gramiano para un robot de 1GDL modelado en el espacio vectorial de cuaterniones.

La determinación de estos conceptos en el espacio  $\mathbb{R}^4$  sugiere el establecimiento un método alternativo para diseñar leyes de control más eficientes que en realidad representen la dinámica del sistema, sin restringir el área de trabajo del mismo. La determinación de la estabilidad del sistema dinámico representado en la ecuación (1), expresada en el espacio vectorial quaterniones no se linealizó, como ocurre en los métodos tradicionales, además se encontró un criterio de estabilidad acorde con la teoría de control lineal y se diseño una ley de control capaz de conducir al sistema a una posición deseada gastando la mínima energía.

Sería conveniente analizar la aplicación de esta álgebra a otros robots con mayor grado de libertad



y a otros sistemas de control, como por ejemplo control de fluidos **7**

**Salinas Pérez Irma, Márquez M. M.,**  
*Universidad Tecnológica de la Mixteca.*

**Reyes Á. L.**  
*Instituto Mexicano del Transporte.*

## Referencias

- [1] DIANNE P. O' LEARY AND YALIN E. SAGDUYU.  
1990, 2003 "Robot Control: Swinging Like a Pendulum",  
YourHomework Assignment. Ed. Copublished  
by the IEEE CS and the AIP, Vo. I, pag. 68 - 74.
- [2] WILLIAM J. PALM III.  
1999 "Modeling, Analysis and Control of Dynamic  
Systems Johon Wiley & Sons.
- [3] VLADIMIR VASILIEVICH ALEXANDROV.  
2000 "Introducción a la Modelación Matemática de  
Sistemas Controlables". Ed. Fomento Editorial,  
Vol. I.
- [4] S. V. ULYANOV, S. WATANABE.  
1998 "Soft computing for the robust control of robot  
unicycle with a new physical measure for me-  
chanical controllability". Springer-Verlog Heri-  
delberg. Volume 2, Number 2/ June 26, pages:  
73 - 88.
- [5] DIANE P. O' LEARY AND YALIN E. SAGDUYU.  
2003 "Robot Control: swinging like a pendulum".  
Computing in Science & Enginnering , copublis-  
hed by the IEEE CS and the AIP juny / august,  
pages 68 - 74.
- [6] MARK W. SPOG, M. VIDYASAGAR .  
1989 "Robot Dynamics and Control" . Johon Wiley &  
Sons.
- [7] MÁRQUEZ M. M.  
1998 "Modelado Matemático de la Cinemática de  
N Cuerpos Rígidos mediante Quaterniones".  
Universidad Anáhuac del Sur. ISBN. 968-  
6402-22-6.

- [8] SALINAS P. I, REYES A. L, MÁRQUEZ M. M.  
2003 "Una contribución al diseño de sistemas de  
control robusto aplicando el álgebra hipercom-  
pleja". 2º Congreso Nacional de Mecatrónica,  
México, D. F.
- [9] REYES ÁVILA LUIS.  
"Quaternions:Une Representation Parametrique Syste-  
matique Des Rotations Finies.Partie 2:Quelques  
Aplications". Rapport de Recherche Inria  
N0.1454- Rocquencourt,France
- [10] JEAN JACQUE E. SLOTINE.  
1991 "Applied NonLineal Control". Printice Hall.
- [11]K. OGATA.  
1993 "Ingeniería de Control Moderna". Ed. Printice  
Hall.
- [12] J. SCHILLING R.  
1997 "Fundamentals for Control of robotic manipu-  
lator". Jhon Wiley & Sons Inc.
- [13] WOLFRAM STADLER.  
1995 "Analytical Robotics and Mechatronic  
".McGraw-Hill.
- [14] EDWARD BERTRANI.  
1998 "Mathematics for Dynamic Modeling". ACADE-  
MIC PRESS.
- [15] M. VIDYASAGAR.  
1993 "Nonlinear Systems Analysis" . Printice Hall.
- [16] STANLEY M. SHINNER.  
1992 "Modern Control System Theory and Design".  
Johon Wiley & Sons.
- [17] KEN DUTTON, STEVE THOMPSON AND BILL BARRACLOUGH.  
1997 "The Art of Control Engineering". Addison -  
Wiley.
- [18] SHIR-KUAN LIN.  
1988 "Euler Parameters in Robot Cartesian Control".  
Ó IEEE . Volume 4, pages: 1676 - 1681.

