

Planteamiento alternativo para resolver el problema inverso de la tomografía de capacitancia eléctrica

Introducción

Los problemas directos son aquellos problemas en que se tiene información sobre las causas que describen un proceso en un medio y la solución del problema nos conduce a descubrir el “efecto” producido por dichas causas. También son llamados problemas: “causa-efecto”; por ejemplo: hallar las raíces de un polinomio.

Los problemas inversos son aquellos en los que se tiene una información parcial sobre los resultados o efectos producidos, y se desea determinar las causas que provocaron dichos efectos. También son llamados problemas “efecto-causa”. Algunos ejemplos son los siguientes: hallar un polinomio a partir del conocimiento de sus raíces, hallar al asesino a partir de datos de sus víctimas y escena del crimen, descubrir la historia de la tierra a partir de las huellas que ha dejado a través del tiempo, diagnóstico de una enfermedad a partir de sus síntomas, etcétera.

Problemas inversos y problemas mal planteados

Consideremos la ecuación operacional

$$A(u) = f, \quad A: X \rightarrow Y, \quad (1)$$

donde X y Y son espacios de Banach, o espacios métricos, y A es en general un operador no lineal.

El problema (1) es denominado bien planteado, si A es un homeomorfismo de X en Y , es decir, la solución del problema existe, es única y depende continuamente de f y por tanto A^{-1} es continuo. Si alguna de estas condiciones no se cumple, se dice que el problema (1) es mal planteado.

Dado que muchos problemas inversos pueden ser reducidos a ecuaciones mal planteadas del tipo (1), estos problemas se consideran como mal planteados. Esta es la manera en que los problemas mal planteados se relacionan con los problemas inversos.

El problema de la interpretación de los datos experimentales

Un problema inverso puede ser un problema muy complejo, ya que depende de la cantidad y calidad de la información experimental que se tenga a disposición, así como del desarrollo de métodos especiales para su procesamiento, puede ver por ejemplo (Fernández Marrón J. L., Alberdi Primicia J., Barcala Riveira J.M., 2002). El problema del procesamiento de los datos experimentales corresponde en gran medida a la aplicación de métodos matemáticos avanzados. Por lo general la solución de problemas inversos se lleva a cabo en el marco de algún modelo matemático del objeto o proceso estudiado y consiste en la determinación de ciertos parámetros del modelo a partir de la información experimental obtenida; puede ver (Roland Martin, Carlos Ortiz-Aleman y Carlos Gamio. 2004).

Problema de determinar la composición instantánea de un flujo multifásico

Para determinar la composición instantánea de un flujo multifásico, debemos resolver dos grandes problemas:

- I. Determinar la composición instantánea del flujo, en términos de las concentraciones de cada componente en cualquier punto de una sección transversal elegida del ducto.
- II. Calculando el perfil de velocidades del flujo en dicha sección transversal.

La dificultad principal es el carácter turbulento de la mezcla.

El problema inverso de la Tomografía de Capacitancia eléctrica

Para resolver el problema I, usamos la tomografía de capacitancias, cuya representación gráfica se muestra en la figura 1.

Problema inverso de difusión en medios no homogéneos

El proceso de difusión en un medio no homogéneo D está descrito por la ecuación:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{c} \operatorname{div}(k \nabla u(x,t)), \quad x \in D, t > 0. \quad (2)$$

en caso estacionario (2) se reduce a

$$\operatorname{div}(k(x) \nabla u(x)) = 0, \quad x \in D. \quad (3)$$

El problema directo consiste en resolver el problema de contorno para esta ecuación con valores dados en la frontera, y dada la función $k(x)$. En el problema inverso medimos u y el flujo $\frac{\partial u}{\partial n}$, donde n es el vector normal unitario, en la frontera y tratamos de determinar la función desconocida $k(x)$ en D . Este es un ejemplo de un problema de identificación de coeficientes para una ecuación diferencial parcial.

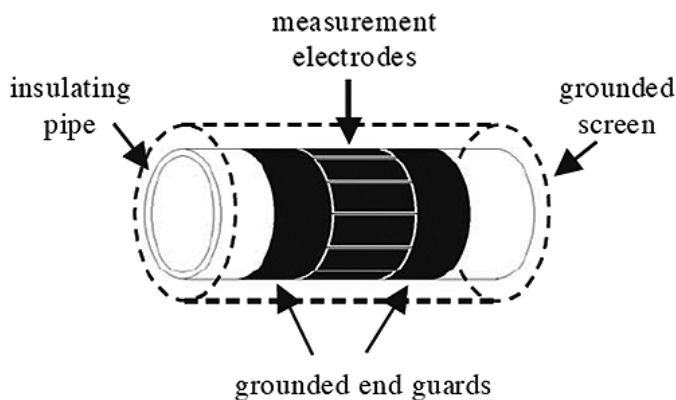
Modelación del problema inverso de la Tomografía de Capacitancias

Consideremos una región delimitada por tres círculos concéntricos de radios R_1, R_2 y R_3 , con centro en el origen donde

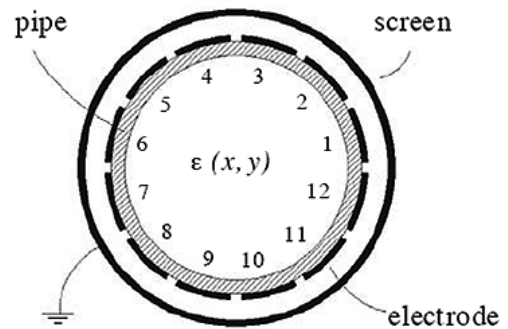
$$\Omega_1 = \{z = (x, y) : |z| < R_1\},$$

$$\Omega_2 = \{z = (x, y) : R_1 < |z| < R_2\},$$

$$\Omega_3 = \{z = (x, y) : R_2 < |z| < R_3\};$$



(a)



(b)

FIG. 1. ECT SENSOR: (A) VISTA COMPLETA Y (B) SECCIÓN TRANSVERSAL.

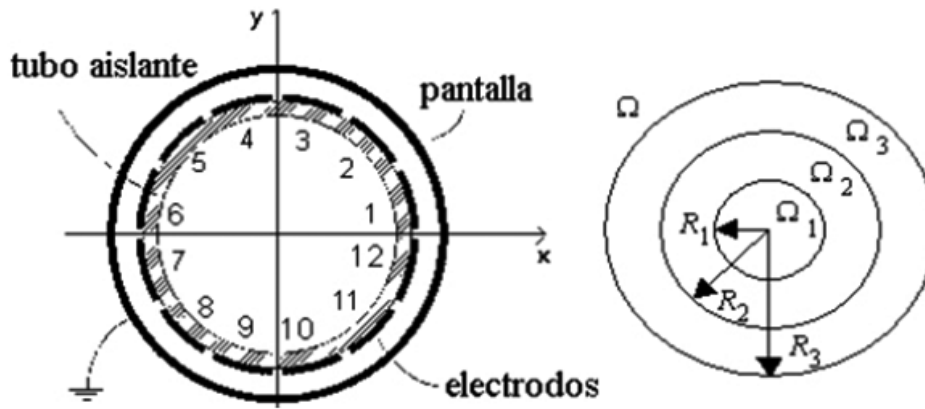


FIG. 2. MODELO DE LA TOMOGRAFÍA DE CAPACITANCIAS

que geoméricamente podemos representar, en la figura 2.

Consideremos la fig. 2, en la que cada una de las subregiones Ω_i , $i = 1, 2, 3$; tiene propiedades dieléctricas caracterizadas por una permitividad $\varepsilon(x, y)$ y definamos por

$$\varepsilon(x, y) = \varepsilon_i(x, y) \quad \text{si} \quad (x, y) \in \Omega_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4)$$

En lo que sigue supondremos que para $i = 2, 3$; la función tiene un valor constante y conocido.

El problema consiste en determinar $\varepsilon(x, y)$, a partir de mediciones de capacitancias mutuas en un arreglo de electrodos contiguos colocados de manera equidistante sobre la superficie del círculo intermedio. Denotaremos mediante $V^{(i)}(x, y)$, $i = 1, 2, \dots, N$; al potencial generado en la configuración por el campo de desplazamiento eléctrico, cuando los electrodos son considerados como superficies equipotenciales con potencial igual a uno en un electrodo de referencia y con el resto de los electrodos conectados a tierra, tiene tres componentes asociadas de manera natural a cada una de las regiones Ω_j , $j = 1, 2, 3$.

La pantalla se modela como una línea equipotencial circular, que corresponde a la frontera exterior de Ω_3 , con potencial igual a cero.

El modelo que satisfacen los potenciales es el siguiente:

$$\begin{aligned} \nabla \left(\varepsilon(z) \nabla V_1^{(i)}(z) \right) &= 0, \quad \text{en } \Omega_1, \\ \Delta V_2^{(i)}(z) &= 0, \quad \text{en } \Omega_2, \\ \Delta V_3^{(i)}(z) &= 0, \quad \text{en } \Omega_3; \end{aligned} \quad (5)$$

además se cumplen las siguientes condiciones de contorno de continuidad de los potenciales y de las corrientes normales:

$$\begin{aligned} V_1^{(i)}(z) &= V_2^{(i)}(z), \quad z \in R_1; \\ \varepsilon_1 \frac{\partial V_1^{(i)}}{\partial \vec{n}_1}(z) &= \varepsilon_2 \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial \vec{n}_1}(z), \quad z \in R_1; \end{aligned} \quad (6)$$

adicionalmente se tiene:

$$\begin{aligned} V_3^{(i)}(z) &= V_2^{(i)}(z) = \psi_i, \quad \text{en } |z| = R_2; \\ V_3^{(i)}(z) &= 0, \quad \text{en } |z| = R_3; \end{aligned} \quad (7)$$

donde

$$\psi_i(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{si } \theta \leq \frac{2\pi(i-1)}{N} - \frac{\theta_0}{2}; \\ \frac{\theta - \theta_i^{(-)}}{\theta_0} + 1, & \text{si } \frac{2\pi(i-1)}{N} - \frac{\theta_0}{2} \leq \theta \leq \frac{2\pi(i-1)}{N} + \frac{\theta_0}{2}; \\ 1, & \text{si } \frac{2\pi(i-1)}{N} + \frac{\theta_0}{2} \leq \theta \leq \frac{2\pi i}{N} - \frac{\theta_0}{2}; \\ \frac{\theta_i^{(+)} - \theta}{\theta_0} + 1, & \text{si } \frac{2\pi i}{N} - \frac{\theta_0}{2} \leq \theta \leq \frac{2\pi i}{N} + \frac{\theta_0}{2}; \\ 0, & \text{si } \frac{2\pi i}{N} + \frac{\theta_0}{2} \leq \theta; \end{cases} \quad (8)$$

La fórmula de las capacitancias mutuas

La capacitancia mutua entre el i -ésimo electrodo, considerado como el electrodo de referencia, y el j -ésimo electrodo con $j \neq i$, está dado por:

$$C_{ij} = K \int_{S_j} \varepsilon(z) \frac{\partial V^{(i)}}{\partial n_2} ds \quad (9)$$

A partir de la ecuación (9) se obtiene una relación funcional entre las capacitancias mutuas medidas en el arreglo de electrodos al variar el electrodo y la distribución de las permitividades en la sección transversal

$$C = F(\varepsilon) \quad (10)$$

Dificultades en la solución del problema inverso de la Tomografía de Capacitancias

A partir de esta relación funcional (10) es posible desarrollar métodos alternativos a fin de resolver el problema inverso de determinar la permitividad a través de las mediciones de capacitancias.

Dificultades:

1. Esta relación es no lineal.
2. El número de mediciones de capacitancia independientes es mucho menor que el orden de la discretización requerida para identificar la distribución de permitividades y de esta forma el problema discretizado está indeterminado, por lo cual su solución puede no ser única.

3. Cualquier método que se utilice para obtener una solución particular será inestable, debido a que este problema de identificación es sensible al error en las mediciones.
4. De aquí se concluye que cualquier método que intente resolver este problema debe considerar su no linealidad y debe incluir técnicas de regularización a fin de brindar una solución numéricamente estable.

Problema de Calderón

Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ convexo, acotado y con frontera suave Γ , la conductividad eléctrica de Ω es representada por una función acotada y positiva, que en ausencia de sumideros o fuentes de corriente se cumple:

$$\nabla(\varepsilon(x, y) \nabla u(x, y)) = 0, \quad (x, y) \in \Omega \quad (11)$$

$\varepsilon(x, y) \nabla u(x, y)$, representa el flujo de corriente.

Dado un potencial $u^0(x, y) \in H^{1/2}(\Gamma)$, y el potencial inducido $u(x, y) \in H^1(\Omega)$ resuelve el problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} \nabla(\varepsilon(x, y) \nabla u(x, y)) &= 0, & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) &= u^0(x, y), & (x, y) \in \Gamma, \end{aligned} \quad (12)$$

La Transformación Dirichlet-Newmann está dado por:

$$\begin{aligned} \Lambda_\varepsilon : H^{1/2}(\Gamma) &\rightarrow H^{-1/2}(\Gamma) \\ \Lambda_\varepsilon(u^0(x, y)) &= \varepsilon(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial n}, & (x, y) \in \Gamma \end{aligned} \quad (13)$$

El problema inverso consiste en determinar $\varepsilon(x, y)$ a partir del conocimiento de Λ_ε .

Soluciones teóricamente fundamentadas del problema de Calderón

Adrián Nachman demostró que el coeficiente $\varepsilon(x, y)$ en la ecuación (11) en un dominio bidimensional puede determinarse de manera única por la transformación Dirichlet-Newmann (Nachman 1996). Además en Siltanen (S., Mueller J. y Isaacson D. 2000) se hace una implementación

numérica al algoritmo propuesto por Nachman, mediante ejemplos sintéticos que no han sido implementados en la práctica.

En una vertiente más práctica se imponen “condiciones a priori” a la función que se desea recuperar. Esta información a priori depende del contexto práctico en que se requiere identificar a $\mathcal{E}(x, y)$.


En (Hyeonbae Kang y Jin Keun Seo 2001) se presenta un teorema de unicidad para la recuperación de $\mathcal{E}(x, y)$ a partir del conocimiento de un solo par de Cauchy, bajo la suposición a priori de que puede tomar únicamente dos valores distintos y se propone un algoritmo de identificación para un problema sintético en el que además se supone que uno de los valores lo toma en una región convexa contenida en Ω y el otro valor en el complemento de esa región.

Planteamientos alternativos y problemas abiertos

- Principio de Rayos Generales
- Algoritmos que usan Retroproyección filtrada
- Tomografía de capacitancias usando dos esquemas de medición
- Usar la tomografía de capacitancias y otra tomografía (podría ser de rayos X)
- Elaborar nuevos modelos correspondientes a problemas de la tomografía eléctrica, para diferentes técnicas de medición realizables en la práctica (Tomografía de capacitancias, tomografía de Rayos X) con el objetivo de determinar características de un flujo multifásico en un ducto.
- Determinar el “tamaño mínimo” de una inhomogeneidad detectable en el flujo por el equipo de medición de capacitancias, teniendo en cuenta el error que comete el equipo al medir.
- De acuerdo a los resultados obtenidos en el objetivo anterior se debe determinar el número requerido de mediciones de capacitancias para que se pueda detectar de forma única una distribución de permitividad con las propiedades dadas.
- Proponer un esquema de solución del problema de identificación para datos exactos en el cual, la información a priori que se presupone conduce a que dicho problema se pueda reducir a un problema inverso de la Tomografía de rayos X.

- Desarrollar un algoritmo de regularización para el esquema propuesto en el objetivo anterior para el caso de datos continuos. Analizar la convergencia teórica de los algoritmos cuando el error en los datos tiende a cero.
- Desarrollar estrategias de regularización y algoritmos numéricos, para la solución del problema de identificación en el caso de datos discretos con error:
- Preprocesamiento de los datos de entrada usando métodos de suavización y filtración recursiva, para garantizar la estabilidad con respecto a los errores cometidos en las mediciones de dichos datos.
- Construcción de métodos y algoritmos de regularización para la solución estable de ecuaciones integrales de primer orden como una combinación de los métodos de colocación, suavización recursiva y regularización de Tikhonov o Laurentiev.
- Construcción de métodos numéricos y algoritmos locales explícitos de recuperación de coeficientes en ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales.
- Post-procesamiento de datos recuperados en forma de imágenes bidimensionales.
- Desarrollo de software para la visualización de imágenes tomográficas de permitividad a partir de mediciones de capacitancia con aplicación a flujos bifásicos y trifásicos.

Conclusiones

De todo lo descrito anteriormente, he planteado y redactado un proyecto de Investigación que tiene por objetivos, los primeros puntos planteados como problemas abiertos de la sección anterior, con el fin de obtener resultados nuevos y novedosos, que además de ser teóricamente fundamentados, puedan ser implementados en la práctica. Es importante mencionar que aunque se ha trabajado mucho en el intento de resolver el problema inverso de la Tomografía de Capacitancias, la mayoría de las soluciones presentadas, son de carácter teórico que difícilmente pueden ser implementadas en la práctica, y algunas otras, se basan en métodos que no tienen un sustento teórico completo 

Silvia Reyes Mora

Universidad Tecnológica de la Mixteca

Referencias

- Calderón A. P.
1980 “On an inverse boundary value problem”, en Seminar on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics (Río de Janeiro, 1980), Soc. Brasil. Mat., Río de Janeiro, 65–73.
- Fernández Marrón J. L., Alberdi Primicia J., Barcala Riveira J.M.,
2002 “Desarrollo de algoritmos de reconstrucción de imágenes en tomografía de capacitancia eléctrica”, E.T.S.I. en Informática, UNED Madrid.
- Hyeonbae Kang and Jin Keun Seo.
2001 “A note on uniqueness and stability for the inverse conductivity problem with one measurement” J. Korean Math. Soc. Vol. 38 (4), 781–792.
- Nachman A. I.
1996 “Global uniqueness for a two-dimensional inverse boundary value problem”, Ann. of Math., 143, 71-96.
- Roland Martin, Carlos Ortiz-Aleman y Carlos Gamio
2004 “Multiphase flow imaging by capacitance tomography using simulated annealing inversion”, Monografías del Seminario Matemático García de Galdeano 31, 497–506.
- Siltanen S., Mueller J. y Isaacson D.
2000 “An implementation of the reconstruction algorithm of A Nachman for the 2D inverse conductivity problem. Inverse Problems. 16, 681-699.