Capítulo 2

Comportamiento caótico de algunos modelos de nacimiento y muerte.

Reinaldo Martínez Cruz[1]
Alejandro J. Velázquez Badillo[2]
José E. Pérez Vázquez[3]

Abstract: In this work, we will analyze the chaotic behavior of some models of birth and death in Banach spaces, specifically we will show that:

a) The semigroups $-C_0$ are related to the Cauchy Abstract Problem.

b) The semigroups $-C_0$ are the solution of an infinite system of ordinary differential equations generated by these models.

c) In the development of this interpretation, we seek to gather the hypotheses of a result given by W. Desch, W. Schappacher and G.F. Webb in his work: Hypercyclic and Chaotic Semi-groups of linear operators to ensure the phenomenon of chaos.

Keywords: Chaos, birth, death.

Resumen: En este trabajo, analizaremos el comportamiento caótico de algunos modelos de nacimiento y muerte en espacios de Banach, concretamente mostraremos que:

a) Los semigrupos$-C_0$ están relacionados con el Problema Abstracto de Cauchy.

b) Los semigrupos$-C_0$ son solución de un sistema infinito de ecuaciones diferenciales ordinarias generados por estos modelos.

c) En el desarrollo de esta interpretación, buscamos reunir las hipótesis de un resultado dado por W. Desch, W. Schappacher y G.F. Webb en su trabajo: Hypercyclic and Chaotic Semi-groups of linear operator para asegurar el fenómeno del caos.

Palabras clave: Caos, nacimiento, muerte.

[1]reinaldo.martinez.c@uatx.mx. Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, Universidad Autónoma de Tlaxcala

[2]alexveba@hotmail.com

[3]joserasmo25@gmail.com. Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, Universidad Autónoma de Tlaxcala

2.1. Introducción

En los últimos años fue observado que el comportamiento caótico puede ocurrir en algunos sistemas infinitos lineales de tipo cinético. Un ejemplo de este tipo es el proceso de nacimiento y muerte, donde la parte de muerte (dispersándose con pérdida de energía), ha sido previamente reportado (ver [2]). En esta cita los autores generalizan estos primeros resultados para el caso de coeficientes variables, mostrando que la propiedad de ser caótico puede ser en cierto sentido estable. Por otra parte, la contraparte, proceso de nacimiento no puede ser caótico. Para ser caótico, el sistema debe contener una parte de creación ($\beta > \alpha$ en el modelo), ya que ningún sistema conservador (el proceso estandar de nacimiento y muerte) puede ser caótico en todo el espacio de Banach.

Siguiendo [12], consideremos un medio inmóvil que alberga partículas caracterizadas por un grado interno de libertad, indexadas por enteros no negativos $n = 0, 1, 2, \ldots$, y relacionadas con niveles internos de excitación energética. Estas partículas chocan violentamente e interactúan con el medio huésped de la siguiente manera: Tras la colisión, las partículas de nivel de energía interna $n \geq 1$ son absorbidas por el medio a una velocidad $\alpha > 0$ y emitidas de nuevo como partículas del nivel de energía interna $n-1$ a una tasa $\beta > \alpha$. Las partículas con energía interna $n = 0$ se absorben y dejan de existir. El proceso que subyace a esta interacción puede verse como una reacción química, un proceso biológico o como una regla de autómata generalizado.

Las partículas con energía interna n se describen mediante funciones de distribución de una partícula, $f_n(t)$, que satisfacen la ecuación de rapidez lineal:

$$f_n' = (L\mathbf{f})_n = -\alpha f_n + \beta f_{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$

para β y α constantes

En este capítulo nos centraremos en el proceso biológico de algunos modelos de Nacimiento y muerte (amplificación-deamplificación) con coeficientes variables.

El proceso de nacimiento y muerte es un fenómeno bien documentado en Cáncer (véase [8, 13, 14]. En estas citas se considera una población de células cancerígenas divididas en subpoblaciones, y caracterizadas por diferentes niveles de resistencia a medicinas. Debido a un evento mutacional, cada subpoblación constituida por estas células adquieren una copia del gen que hace a éstas resistentes al agente. Las células que pertenecen a la $0-$subpoblación no poseen copias del gen y son sensitivas a ciertas drogas. Las células de tipo $n = 1, 2, 3, \ldots$ pertenecen a la $n-$subpoblación y están caracterizadas a ser más resistentes conforme se incremente el valor de n. Cada célula mutada puede transitar (avanzar o retroceder) según sobreviva o debilite ante la presencia de cierta dosis de medicina. Este proceso como se verá posteriormente, origina de manera natural un sistema infinito de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs).

En este capítulo, realizamos una exposición detallada sobre el trabajo realizado en [1]. Debemos aclarar que lo único nuevo en este trabajo es la forma de organizar y presentar los principales resultados conocidos (o desconocidos) al respecto. Deseamos que este capítulo motive o estimule la curiosidad para buscar más información acerca de este fenónemo. De cualquier forma difundir esta monografía, es una de las tareas principales que los autores se han propuesto para que el lector encuentre en estas líneas un espacio para que se adentre en su lectura. Para hacerlo, esta obra la hemos dividido en cuatro secciones como indicamos a continuación. En la segunda y tercer sección, damos algunos preliminares sobre teoría de Semigrupos y Caos que nos serán de utilidad en el desarrollo de este capítulo. En la cuarta sección presentamos un breve resumen del proceso gen amplificación-deamplificación con células en proliferación.

En la sección cinco nos centramos en reunir las hipótesis necesarias para aplicar el Teorema 2.3.3, y culminar con dos teoremas que nos permiten realizar conclusiones referentes al fenómeno gen amplificación-deamplificación.

En cada caso damos las definiciones necesarias. Explicamos brevemente, a nuestro entender, y damos referencias adecuadas para más información. Hemos cuidado escribir de tal modo que si no todos, muchos puedan entender lo que contiene este trabajo.

Finalmente, recordar algunas convenciones en la notación, no está de más. Como es usual, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{N}$, y $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ denotan el conjunto de los números reales positivos, enteros positivos y enteros no negativos respectivamente. Por otra parte, $cl(A)$, $\mathcal{B}(X,X)$, $\mathcal{L}(X)$ y $X^\star$ representan la clausura del conjunto A, la colección de las transformaciones lineales acotadas, el espacio de las transformaciones lineales y el dual de X. De igual manera $i\mathbb{R}^1$ y $\langle x, y\rangle$ denotan el conjunto de los números complejos sin el eje real y el producto interior de cierto espacio. Además, el símbolo $\blacksquare$, denota el fin de una demostración.

2.2. Semigrupos fuertemente continuos

Es muy importante destacar que al estudiar la dinámica discreta de los objetos no basta con analizar sus propiedades numéricas, es necesario, además, conocer sus propiedades cualitativas o de forma, tales como su estabilidad, o su comportamiento respecto a la cercanía o acumulación entre éstos o respecto a otros objetos, etc., interviniendo así una rama de la matemática llamada Topología. La parte de la Topología que estudia las propiedades cualitativas o de forma de los sistemas dinámicos se llama Topología dinámica. Desde esta perspectiva, ahora, introducimos los conceptos de semigrupos fuertemente continuos de operadores lineales acotados en espacios de Banach, el cual juegan un papel importante en la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias, generados por algunos modelos de nacimiento y muerte. Sugerimos las citas [5, 7] para una introdución a este tópico.

Definición 1 *Sea X un espacio de Banach complejo, separable e infinitamente dimensional. Una familia $\mathcal{T} = \{T_t | T_t : X \to X, \quad \text{donde} \quad t \in [0,\infty)\} \subset \mathcal{B}(X,X)$ es un semigrupo fuertemente continuo (SFC), desde ahora semigrupo$-C_0$ de operadores lineales acotados si:*
(i) $T_0 = I$ *(operador identidad en X),*
(ii) $T_{s+t} = T_s T_t$ *para cada $s, t \in \mathbb{R}_+$ (propiedad de semigrupo).*
(iii) $\lim_{t\to s} T_t x = T_s x$, *para cada $x \in X$ y $s \geq 0$.*

La tercera condición está asociada a la continuidad de los operadores del semigrupo$-C_0$ respecto a la topología fuerte del operador. Si el inciso (iii) de la Definición 1 es reemplazada por $\lim_{t\to s} T_t = T_s$, $s \geq 0$ respecto a la norma de los operadores asociados a las de X, entonces decimos que el semigrupo$-C_0$ es uniformemente continuo (SUC). Formalmente

Definición 2 *Sea X un espacio de Banach complejo, separable e infinitamente dimensional. Una familia $\mathcal{T} = \{T_t | T_t : X \to X, \quad \text{donde} \quad t \in [0,\infty)\} \subset \mathcal{B}(X,X)$ es un semigrupo uniformemente continuo (SUC) de operadores lineales acotados si:*
(i) $T_0 = I$ *(operador identidad en X),*
(ii) $T_{s+t} = T_s T_t$ *para cada $s, t \in \mathbb{R}_+$ (propiedad de semigrupo).*
(iii) $\lim_{t\to s} T_t = T_s$.

De aquí en adelante utilizaremos $\{T_t\}_{t\geq 0}$ en lugar de ésta $\mathcal{T} = \{T_t | T_t : X \to X \quad \text{donde} \quad t \in [0,\infty)\} \subset \mathcal{B}(X,X)$ para ahorrarnos espacio y tiempo.

Una pregunta que emerge de manera natural es la siguiente: ¿En qué se diferencia los semigrupos fuertemente continuos y los uniformemente continuos? La respuesta a esta pregunta se encuentra en la naturaleza del generador infinitesimal A. Precisamente, como veremos en el Teorema 2.2.8, A es un generador de un semigrupo uniformemente continuo $\{T_t\}_{t\geq 0}$ si y sólo si A es un operador acotado (*i.e.*, continuo).

Por otra parte, si $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es fuertemente continuo y falla de ser uniformemente continuo, entonces como lo haremos ver en el Teorema 2.2.6, $\{T_t\}_{t\geq 0}$ tendrá un generador A no necesariamente acotado (densamente definido y con gráfico cerrado). Más aún, como

$$\lim_{t\to s} ||T_t x - T_s x|| \leq \lim_{t\to s} ||T_t - T_s|| ||x|| = 0.$$

Se sigue que, si $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es un (SUC), entonces $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es un (SFC). Hemos demostrado

Observación 2.2.1 *La familia de los semigrupos uniformemente continuos están contenidos en la colección de los semigrupos fuertemente continuos.*

Observación 2.2.2 *Los incisos* (i), (ii) *y* (iii) *de la Definición 2, implican que* $\lim_{h\to 0^+}||T_{t+h}-T_t||=0$*, para cada* $t\geq 0$.

Por el Teorema Banach-Steinhaus (ver [9, pág. 249]), tenemos que la familia $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es localmente equicontinua, en otras palabras, para cada $M>0$ existe $c>0$ tal que

$$||T_t x||\leq c||x||, \quad \text{para} \quad \text{cada} \quad t\in[0,M] \quad \text{y} \quad x\in X.$$

Este hecho implica que, la función $f:[0,\infty)\times X\to X$ dada por:

$$f(t,x)=T_t x, \quad \text{para} \quad \text{cada} \quad t\geq 0 \quad \text{y} \quad x\in X$$

es continua. Además, la norma de operador del semigrupo$-C_0$ esta acotada por la función exponencial.

Teorema 2.2.3 *Si* $T_t:X\to X$ *es un semigrupo*$-C_0$*, entonces existen constantes* $b\geq 1$ *y* $k\geq 0$ *tales que* $||T_t||\leq be^{kt}$*, para cada* $t\in[0,\infty)$.

Demostración. Supongamos que $T_t:X\to X$ es un semigrupo$-C_0$, entonces en virtud de la continuidad fuerte existen $\eta>0$ y $b>0$ tales que

$$||T_t||\leq b, \quad \text{para} \quad \text{cada} \quad 0\leq t\leq \eta.$$

Como $||T_0||=1$, se sigue que $b\geq 1$. Pongamos $k=\eta^{-1}logb$. Tenemos que $k\geq 0$ y, utilizando repetidamente la propiedad de semigrupo de la Definición 2, obtenemos que $T_t=T_{m\eta+t-m\eta}=T_{m\eta}T_{t-m\eta}=(T_\eta)^m T_{t-m\eta}$, para $m\eta\leq t\leq (m+1)\eta$.

De aquí, $||T_t||=||(T_\eta)^m T_{t-m\eta}||\leq bb^m=be^{kt}$. ■

Teorema 2.2.4 *Si* $T_t:X\to X$ *es un semigrupo*$-C_0$*, entonces para cada* $x\in X$*, la función* $\phi_x:[0,\infty)\to X$ *definida por* $\phi_x(t)=T_t x$ *es continua.*

Demostración. Sean $t\geq 0$ y $h\in[0,t]$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+}||T_{t+h}x-T_t x|| &= \lim_{h\to 0^+}||T_t(T_h x-x)||\\ &= \lim_{h\to 0^+}||T_t||||T_h x-x||\\ &\leq \lim_{h\to 0^+} be^{kt}||T_h x-x||=0.\end{aligned}$$

Similarmente, $\lim_{h\to 0^+}||T_{t-h}x-T_t x||\leq 0$. ■

Dado un semigrupo$-C_0$, $\{T_t\}_{t\geq 0}$, uno puede considerar la derivada en 0 como sigue:

$$Ax=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\left(T_t x-Ix\right)=\left.\frac{d^+T_t x}{dt}\right|_{t=0},$$

para aquellas $x\in X$ tal que el límite existe. Resulta que (se verá en el Teorema 2.2.6), existe un subespacio denso de X, a saber

$$D(A)=\{x\in X: \text{ existe } \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\left(T_t x-Ix\right)\}$$

tal que $A : D(A) \subset X \to X$ es un operador lineal con gráfico cerrado, i.e.,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} Ax_n = y,$$

implican que $Ax = y$. En la literatura $(A, D(A))$ suele llamarse generador infinitesimal del semigrupo$-C_0$ (ver [4, pág. 9]).

El Teorema siguiente se puede consultar en (ver [11, pág. 5])

Teorema 2.2.5 *Si T_t es un semigrupo$-C_0$ y A es su generador infinitesimal, entonces*

(a) $\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds = T_tx$, para cada $x \in X$

(b) $\int_0^t T(s)xds \in D(A)$ *y* $A\Big(\int_0^t T(s)xds\Big) = T_tx - x$, para cada $x \in X$

(c) *Para cada* $x \in D(A)$, $T_tx \in D(A)$ *y* $\frac{d}{dt}T_tx = AT_tx = T_tAx$

(d) $T_tx - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Axd\tau = \int_s^t AT(\tau)xd\tau$, para cualquier $x \in D(A)$.

Teorema 2.2.6 *Si A es un generador infinitesimal de un semigrupo$-C_0$, T_t, entonces $D(A)$ es denso en X y A es un operador lineal con gráfico cerrado.*

Demostración. Veremos que, $(\overline{D(A)} = X)$. Es claro que $\overline{D(A)} \subset X$. Falta Verificar que, $X \subset \overline{D(A)}$. Para ésto, sea $x \in X$. Para cada $t \in (0, \infty)$, pongamos

$$x_t = \frac{1}{t}\int_0^t T_sxds.$$

Por el inciso (b) del Teorema 2.2.5, se tiene que $x_t \in D(A)$, para cada $t > 0$, y la parte (a) del mismo Teorema, implican que

$$\lim_{t\to 0^+} x_t = T_0x = Ix = x.$$

Así, $X \subset \overline{D(A)}$.

La linealidad de A es evidente. Para ver que, A es un operador con grafico cerrado. Sea $x_n \in D(A)$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim_{n\to\infty} Ax_n = y$. Por inciso (d) del Teorema 2.2.5, tenemos que

$$T_t(x_n) - x_n = T_tx_n - Ix_n = T_tx_n - T_0x_n = \int_0^t T_sAx_nds.$$

Se sigue que T_sAx_n converge uniformemente a T_sy en intervalos acotados. Así,

$$T_tx - x = \lim_{n\to\infty} T_tx_n - x_n = \lim_{n\to\infty}\int_0^t T_sAx_nds = T_sy.$$

Luego,

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{T_tx - x}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t T_syds.$$

Por inciso (a) del Teorema 2.2.5, se sigue que $x \in D(A)$ y $Ax = y$. ■

Posteriormente veremos que, el Teorema 2.2.6 cobra interés en el caos de los semigrupos$-C_0$ el cual es aplicable en sistemas infinitos de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Por otra parte, los semigrupos$-C_0$ guardan una estrecha relación con el Problema Abstracto Cauchy (ACP):

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}u(t) = Au(t), \quad \text{para} \quad t \geq 0 \\ &u(0) = x, \end{aligned}$$

donde $x \in X$ es el valor inicial y A es un operador lineal. Si (ACP) tiene una solución única u, entonces ésta es de la forma $T_t x = u(.,x)$, con $t \geq 0$ y $x \in X$.

Ahora, nos preguntamos, si $\{T_t x = e^{tA}x\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo$-C_0$ solución del Problema Abstracto de Cauchy. Para dar respuesta a ésto, empecemos anunciando que $\{T_t\}_{t\geq 0}$ tiene las siguientes propiedades:

Proposición 2.2.7 a) $\int_a^b T_t dt \in \mathcal{B}(X,X)$.

b) *Si U_t y T_t son Semigrupos Uniformemente Continuos y A es acotado, entonces*

$$\int_a^b [AT_t + U_t]dt = A\int_a^b T_t dt + \int_a^b U_t dt.$$

c) *Para cada $t \geq 0$, se tiene que* $\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T_s ds = T_t$. *Es decir, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|h| < \delta$, entonces $||\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T_s ds - T_t|| < \epsilon$.*

Teorema 2.2.8 *$A \in \mathcal{B}(X,X)$ si y sólo si A es el generador infinitesimal de un semigrupo uniformemente continuo*

$$\left\{ T_t = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} : t \in \mathbb{R}^+ \right\}.$$

Demostración. Supongamos que $A : X \to X$ es un operador lineal acotado. Pongamos

$$T_t = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}.$$

Es claro que $T_0 = I$. La propiedad (ii) de la Definición 2, se sigue del hecho siguiente.

$$e^{(s+t)A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n(s+t)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s^k t^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k s^k}{k!} \frac{A^{n-k} t^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k s^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{A^{n-k} t^{n-k}}{(n-k)!} = e^{As} e^{At}.$$

La propiedad (iii). Dado que,

$$||T_t - I|| = \left|\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \right|\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n ||A||^n}{n!} = e^{t||A||} - 1,$$

se sigue que

$$0 \leq \lim_{t\to 0^+} ||T_t - I|| \leq \lim_{t\to 0^+} e^{t||A||} - 1 = 0.$$

Como A es acotado, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n ||A||^n}{n!}$ converge para cada $t \geq 0$ y define, para cada uno de tales t, un operador lineal acotado T_t.

Supongamos que $T_t : X \to X$ es un semigrupo uniformemente continuo de operadores lineales acotados sobre X. Fijemos $\rho > 0$ lo suficientemente pequeño, tal que

$$\left|\left| I - \rho^{-1} \int_0^{\rho} T_s ds \right|\right| < 1.$$

Pongamos $B = I - \rho^{-1}\int_0^{\rho} T_s ds$. Se sigue que $B \in \mathcal{B}(X,X)$ y $||B|| < 1$, así tenemos que, $I - B = \rho^{-1}\int_0^{\rho} T_s ds$ es invertible y por lo tanto $\int_0^{\rho} T_s ds$ es invertible. Ahora, si $0 < h < \rho$, entonces

$$h^{-1}(T_h - I)\int_0^{\rho} T_s ds = h^{-1}\Big(\int_0^{\rho} T_{s+h} ds - \int_0^{\rho} T_s ds \Big)$$

$$= h^{-1}\Big(\int_h^{\rho+h} T_s ds - \int_0^{\rho} T_s ds\Big)$$

$$= h^{-1}\Big(\int_h^{\rho} T_s ds + \int_{\rho}^{\rho+h} T_s ds - \int_0^{h} T_s ds - \int_h^{\rho} T_s ds\Big)$$

$$= h^{-1}\Big(\int_{\rho}^{\rho+h} T_s ds - \int_0^{h} T_s ds\Big).$$

Por lo tanto

$$h^{-1}(T_h - I) = \Big(h^{-1}\int_{\rho}^{\rho+h} T_s ds - h^{-1}\int_0^{h} T_s ds\Big)\Big(\int_0^{\rho} T_s ds\Big)^{-1}. \tag{2.2.1}$$

Así, por inciso c) de la Propiedad 2.2.7,

$$\lim_{h\to 0^+} h^{-1}(T_h - I) = \lim_{h\to 0^+}\Big(h^{-1}\int_{\rho}^{\rho+h} T_s ds - h^{-1}\int_0^{h} T_s ds\Big)\Big(\int_0^{\rho} T_s ds\Big)^{-1}$$

$$= (T_\rho - I)\Big(\int_0^{\rho} T_s ds\Big)^{-1}.$$

Dado que la convergencia uniforme implica convergencia fuerte, existe $\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}[T_h x - x]$ para todo $x \in X$. Así $x \in D(A)$.

Concluyendo $D(A) = X$ y $A = \Big(T_\rho - I\Big)\Big(\int_0^{\rho} T_s ds\Big)^{-1} \in B(X,X)$ por ser $B(X,X)$ un álgebra. ■

Ahora, veamos que

$$\lim_{h\to 0} ||\frac{e^{(t+h)A}x - e^{tA}x}{h} - Ae^{t}x|| = 0.$$

Claramente $(tA)(hA) = (hA)(tA)$ y $Ae^{tA} = e^{tA}A$. Luego,

$$\lim_{h\to 0} ||\frac{e^{(t+h)A}x - e^{tA}x}{h} - Ae^{t}x|| = \lim_{h\to 0} ||\frac{e^{tA}e^{hA}x - e^{tA}x}{h} - Ae^{t}x||$$

$$= \frac{1}{|h|}\lim_{h\to 0} ||e^{tA}(e^{hA} - I - Ah)x||$$

$$\leq \frac{1}{|h|}\lim_{h\to 0} ||e^{tA}||||e^{hA} - I - Ah||||x||.$$

$$= ||e^{tA}|| \lim_{h\to 0} \frac{1}{|h|}||\frac{(hA)^2}{2} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{(hA)^n}{n!}||||x||$$

$$= ||e^{tA}|| \lim_{h\to 0} |h|||\frac{A^2}{2} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{(hA)^n}{n!}||||x|| = 0.$$

Lo anterior es válido para cualquier $t \in \mathbb{R}$. Así, $\{T_t x = e^{tA}x\}_{t\geq 0}$ es el semigrupo$-C_0$ solución para el Problema Abstracto Cauchy (ACP) asociado al generador A.

En resumen, el semigrupo$-C_0$, $\{T_t\}_{t\geq 0}$, con generador A es a menudo denotado por el símbolo e^{tA}. Esta notación es compatible con la expresada de la matriz exponencial y para funciones de un operador definido vía Análisis funcional por ejemplo (ver [9], Teorema espectral).

2.3. Teoría del Caos

Un vínculo entre la teoría del caos y la teoría del operador lineal se estableció cuando se descubrió que, en un espacio de Banach complejo y separable e infinitamente dimensional la noción de transitividad topológica es equivalente a la noción de hiperciclicidad (vea [5]), y fue estudiada mucho antes que la Teoría del Caos. Varias condiciones suficientes para hiperciclicidad, mezclante y caos de un semigrupo$-C_0$ son conocidos, algunos de ellos basado en la correspondiente contraparte discreta (vea [3]). Los conceptos de topológicamente transitivo, puntos periódicos, Hiperciclicidad, transitividad, mezclante, débilmente mezclante y caos tienen una versión para semigrupos$-C_0$. Ahora, estableceremos estas definiciones.

Definición 3 *Un semigrupo$-C_0$, $\{T_t\}_{t\geq 0}$, es mezclante, si para cualesquiera dos conjuntos abiertos, no vacios U, V en X, existe $t_0 \geq 0$ tal que $T_t(U) \cap V \neq \emptyset$, para cada $t \geq t_0$. En particular, si $t = t_0$ diremos que el semigrupo$-C_0$ es **topológicamente transitivo** en X*

Definición 4 *Sea $\{T_t\}_{t\geq 0}$ un semigrupo$-C_0$. Al conjunto de los puntos periodicos de T_t, $Per(\mathcal{T})$, definimos como:*

$$Per(\mathcal{T}) = \{x \in X : \quad \text{existe} \quad t \in (0, \infty) \quad \text{tal} \quad \text{que} \quad T_t x = x\}.$$

El conjunto de puntos periodicos, $Per(\mathcal{T})$, es denso en X significa que, para cada $\epsilon > 0$ y cada $x \in X$, la bola abierta $N(x, \epsilon) \cap Per(\mathcal{T}) \neq \emptyset$

Definición 5 *El semigrupo$-C_0$, $\{T_t\}_{t\geq 0}$, definido en un espacio de Banach complejo separable e infinitamente dimensional X es hipercíclico, si para algún $x \in X$ la órbita $\{T_t x : t \geq 0\}$ es densa en X.*

Definición 6 *El C_0-semigrupo, $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es topológicamente caótico en X si se satisface lo siguiente:*
(i) *$\{T_t\}_{t\geq 0}$ es hipercíclico;*
(ii) *$Per(\mathcal{T})$ es denso en X.*

Recordemos que un espacio vectorial, normado y completo se le llama *Espacio de Banach*. En lo sucesivo X y Y serán espacios de Banach sobre un campo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o bien $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definición 7 *Decimos que $T : X \to Y$ es una **operador lineal** si satisface lo siguiente: para cualesquiera $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, se tiene que $T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y)$.*

La colección de los operadores lineales $T : X \to Y$ con las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalares, constituye un espacio vectorial, el cual se representará por $\mathcal{L}(X, Y)$. Como es usual $\mathcal{L}(X) \equiv \mathcal{L}(X, X)$ y $\mathcal{B}(X, Y) = \{T \in \mathcal{L}(X) : T \quad \text{es} \quad \text{acotado}\}$.

Definición 8 *Sea $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Decimos que T es invertible si existe $S \in \mathcal{B}(Y, X)$ tal que para cada $x \in X$, $STx = x$ y para cada $y \in Y$, $TSy = y$. En este caso diremos que S es el inverso de T y se denota por $S = T^{-1}$.*

Definición 9 *Sea $T \in \mathcal{B}(X, X)$. A la serie de potencias*

$$\sum_{n=0}^{\infty} T^n = I + T + T^2 + \ldots + T^n + \ldots,$$

en la literatura, es conocida como serie Neumann.

Proposición 2.3.1 *Si* $T \in \mathcal{B}(X, X)$ *y* $\|T\| < 1$, *entonces* $I - T$ *es invertible, donde* $I : X \to X$ *es el operador identidad.*

Demostración. Sean $S \subset \mathbb{R}^2$ y $f : S \to \mathbb{C}$ una función. Si $z_0 \in S$ y $lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existe, denotamos este límite por $f^{'}(z_0)$ y es llamado la derivada de f en z_0. Si $f^{'}(z_0)$ existe para cada $z_0 \in S$, entonces decimos que f es holomorfa (o analítica). Por ejemplo, la función $f(w) = \frac{1}{1-w}$ es holomorfa en el disco $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Pongamos $S_n = \sum_{k=0}^{n} T^k = I + T + T^2 + \ldots + T^n$. Tenemos que

$$(I - T)S_n = I - T^{n+1},$$

y como $\|T\| < 1$, entonces $(I - T) \lim_{n \to \infty} S_n = I$. Así,

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \sum_{n=0}^{\infty} T^n = \frac{I}{I - T} = f(T).$$

Dado que, cada uno de los términos de la serie es un operador lineal acotado, se sigue que $f(T) = \frac{I}{I-T} \in \mathcal{B}(X, X)$ y satisface $(I - T)f(T) = f(T)(I - T) = I$.

Concluyendo $I - T$ es invertible. ■

Proposición 2.3.2 $T^{-1} : Y \to X$ *existe si y sólo si* $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ *es inyectiva.*

Demostración. Supongamos que $T^{-1} : Y \to X$ existe y que $Tx_1 = Tx_2$, entonces $T^{-1}(Tx_1) = T^{-1}(Tx_2)$. Se sigue que, $x_1 = x_2$.

Recíprocamente, supongamos que $Tx_1 = Tx_2$ implica que $x_1 = x_2$. Para cualquier $y \in Y$, sea $x = T^{-1}y$. Tenemos que x es único, ya que si $x^{'} = T^{-1}y$, entonces $Tx = Tx^{'}$ implican que $x = x^{'}$. O sea T^{-1} existe. ■

Definición 10 *Sean* $x_1, \ldots, x_n \in X$ *vectores. Una combinación lineal es de la forma:* $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$, *donde* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$.

Para cualquier $U \subset X$ *con* $U \neq \emptyset$ *el conjunto de combinaciones lineales de vectores de* U *es llamado el subespacio generado por los vectores de* U *y se denota por span* U.

Definición 11 *Una función* $f : U \to X$ *definida sobre un conjunto abierto* $U \subset \mathbb{C}$ *es débilmente holomorfo si la función* $F_\phi(\lambda) = \langle f(\lambda), \phi \rangle$ *es holomorfo para cada funcional* $\phi \in X^\star$

El criterio siguiente es una herramienta principal para probar caos en este trabajo. Para los detalles referimos al lector (vea [5, Teo. 3.1]).

Teorema 2.3.3 *Sean* X *un espacio de Banach complejo separable e infinitamente dimensional y* $(A, D(A))$ *el generador infinitesimal de un semigrupo−*C_0, $\{T_t\}_{t \geq 0}$ *en* X. *Supongamos que existen un subconjunto abierto conexo* $U \subset \mathbb{C}$ *y una función débilmente holomorfa* $f : U \to X$ *tales que:*

(i) $U \cap i\mathbb{R}^1 \neq \emptyset$,

(ii) $f(\lambda) \in ker(\lambda I - A)$ *para cada* $\lambda \in U$,

(iii) *si para algún* $\phi \in X^\star$ *la función* $F_\phi(\lambda) = \langle f(\lambda), \ \phi \rangle$ *es idénticamente cero en* U, *entonces* $\phi = 0$.

Bajo estas hipótesis, los semigrupos−C_0, $\{T_t\}_{t \geq 0}$, *es caótico y mezclante.*

Teorema 2.3.4 *Sean* X *un espacio de Banach complejo, separable e infinitamente dimensional y* $(A, D(A))$ *el generador infinitesimal de un semigrupo−*C_0, $\{T_t\}_{t \geq 0}$ *en* X. *Supongamos que existe un subconjunto abierto conexo* U *y una función débilmente holomorfa* $f : U \to X$ *tal que:*

(i) $U \cap i\mathbb{R}^1 \neq \emptyset$,

(ii) $f(\lambda) \in ker(\lambda I - A)$ *para cada* $\lambda \in U$. *Bajo estas hipótesis los semigrupos−*C_0, $\{T_t\}_{t \geq 0}$, *es caótico y mezclante cuando se restringe al subespacio invariante* $X_U = cl(span\{f(\lambda) : \lambda \in U\})$.

2.4. Modelos de nacimiento y muerte

Se creía que, la cantidad de ADN por célula se mantenía constante de una generación celular a otra debido a que, durante cada ciclo celular, el contenido de ADN se duplica y luego en cada división mitótica de las células, se distribuye de manera uniforme en dos células hijas. Sin embargo, evidencias experimentales recientes muestran que, para una fracción del ADN, el número de copias gen por célula no puede ser constante. He aquí nuestro interes en la distribución de los genes que existen en un número variable de copias.

El incremento en el número de copias gen se conoce como amplificación génica. La amplificación génica puede aumentarse por situaciones que interfieren con la síntesis del ADN, y lo hacen en algunas células mutantes y tumorales. Un mayor número de genes pueden producir en células tumorales, resistencia a fármacos quimioterapéuticos.

La herencia de los fenotipos celulares conferidos por la amplificación génica difiere de la conferida por mutaciones genéticas clásicas de varias maneras. La velocidad a la que aparecen las células con nuevos fenotipos es muy rápida, los fenotipos son inestables y rápidamente reversibles, subpoblaciones con una amplia gama de fenotipos pueden coexistir, y cada subpoblación puede regenerar el rango completo de subpoblación.

A continuación, presentamos algunos modelos de nacimiento y muerte que ayudan a comprender la herencia de los fenotipos celulares asociados con la variación en el número de copias gen. Nos centramos en la cinética de los fenómenos más no en los mecanismos moleculares. En el modelo se asume que, en cada generación celular, hay un mecanismo probabilístico de aumentar o disminuir el número de copias gen por célula. Se analiza el comportamiento de estos modelos con el fin de determinar bajo qué condiciones una población de células tendrá una distribución estable del número de copias gen, como se observa experimentalmente.

2.4.1. El desarrollo de resistencia a fármacos en células cancerosas

Un factor importante que tiene una fuerte influencia en la evolución de la resistencia a fármacos de células cancerosas es la *amplificación génica*. Este proceso incluye un aumento en el número de genes responsables de codificar una proteína que ayuda a la remoción o la metabolización de la droga. Un aumento de la resistencia a los medicamentos por la amplificación génica se ha observado en numerosos experimentos de poblaciones de células cultivadas. Además, se ha establecido que las células tumorales pueden aumentar el número de copias de un oncogén en respuesta a un entorno desfavorable.

Consideremos una población de células cancerígenas estratificada en subpoblaciones de células de diferentes tipos, etiquetadas por los números $n = 0, 1, 2, \ldots$. Debido a que el proceso biológico considerado es la amplificación génica, las células de diferentes tipos se identifican con diferentes números del gen resistentes a los medicamentos y, por lo tanto diferentes niveles de resistencia. Las células que pertenecen a la $0-$ésima subpoblación no poseen copias del gen y son sensibles al fármaco.

Debido a un evento mutacional, cada subpoblación constituida por estas células adquieren un número de copias gen que hace a éstas resistentes al agente. Mientras más copias del gen existan, las células más resistente es, con el entendimiento que ésta puede sobrevivir bajo concentraciones superiores de la droga (ver [8], [13] y [14]). Dado que el número de copias gen puede ser muy grande en células cancerígenas, es razonable pensar en un modelo con un número infinito de subpoblaciones celulares.

Argumentos empíricos apoyan la hipótesis de que el proceso descrito es subcrítico; es decir, en cada ciclo y en cada nivel, la probabilidad de que la disminución en el número de genes sea mayor que la probabilidad de su aumento. La aleatoriedad del proceso de amplificación es modelado por un proceso de ramificación.

El proceso se caracteriza por dos componentes: **el conservativo y proliferativo**, este fenómeno también es conocido como **proceso de gen amplificación-deamplificación con células en proliferación**. El componente conservativo, donde el número de células es conservado, describe la mutación celular, modelado como un proceso de nacimiento y muerte. El nombre de proceso de nacimiento y muerte viene de la Teoría de la Población, donde n es interpretado como el tamaño de una población y los posibles eventos son muertes y nacimientos de individuos.

En la sección que sigue, haremos un estudio sobre este fenónemo sin considerar la proliferación.

2.4.2. Construcción de los modelos matemáticos

Siguiento las citas (ver [8, 13, 14]), considere una población de células cancerígenas divididas en subpoblaciones de diferentes tipos, etiquetadas por los números $n = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$ y caracterizadas por diferentes niveles de resistencia ante la presencia de agentes. Las células de tipo 0 pertenecen a la 0-subpoblación y son sensibles a medicinas sintéticas. Las células de tipo $n = 1, 2, 3, \ldots$ pertenecen a la n-subpoblación y están caracterizadas a ser más resistentes conforme se incremente el valor de n.

Los supuestos a partir de los cuales se comienza a construir el modelo matemático son los siguientes:

Denotemos por $X(t)$ a una población de células cancerígenas en un tiempo $t \geq 0$.

- $X(t)$ se divide en subpoblaciones para analizar el comportamiento de éstas ante la presencia de un medicamento.
- Cada subpoblación está caracterizada a ser más resistente a las medicinas conforme se incrementa el valor de $n = 0, 1, \ldots$.
- Se puede transitar de una subpoblación a otra de manera consecutiva (avanzar o retroceder), segun sobreviva o debilite en un instante de tiempo $t > 0$ (razón de cambio).

Para $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, sea $\mathbf{f}(\mathrm{t}) = \{f_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ la función de distribución y supongamos que ésta representa el número de células en la n-ésima subpoblación en un tiempo $t \geq 0$.

2.4.3. Modelo de nacimiento

Como $X(t)$ denota una población de células cancerígenas en el tiempo t, ésta obedece a un proceso de Poisson (vea [15]), en un tiempo $t \geq 0$ con probabilidad,

$$\begin{aligned} P[X(t+\Delta t) - X(t) = 1] &= \frac{(b_n\Delta t)e^{-b_n\Delta t}}{1!} \\ &= (b_n\Delta t)(1 - b_n\Delta t + \frac{1}{2}b_n^2\Delta t^2 - \ldots) \\ &= b_n\Delta t + o(\Delta t), \end{aligned}$$

donde

$$o(\Delta t) = -b_n^2\Delta t^2 + \frac{1}{2}b_n^3\Delta t^3 - \ldots$$

y b_n denota la razón de cambio de que una célula mutada en la $n-$ésima subpoblación avance a la $(n+1)-$subpoblación. En otras palabras, dicho modelo obedece a

$$b_n\Delta t + o(\Delta t), \quad \text{para } n \geq 0.$$

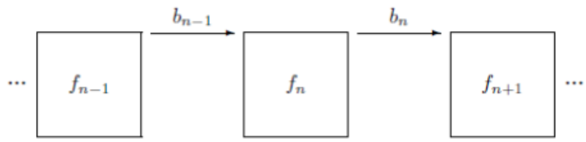

Figura 2.1: Componente conservativo (amplificación o nacimiento).

Si centramos nuestra atención en la subpoblación f_n, tenemos que existe una porción que transita a ella, a saber la que avanza $(b_{n-1}f_{n-1})$ y la que sale $(-b_n f_n)$. Así, el modelo para el proceso de nacimiento viene dado por

$$f_n' = (L\mathbf{f})_n = -b_n f_n + b_{n-1}f_{n-1}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}_0.$$

En otras palabras,

$$\begin{array}{rcl} f_0' = (L\mathbf{f})_0 & = & -b_0 f_0, \\ f_1' = (L\mathbf{f})_1 & = & -b_1 f_1 + b_0 f_0, \\ & \vdots & \\ f_n' = (L\mathbf{f})_n & = & -b_n f_n + b_{n-1}f_{n-1} \\ & \vdots & \end{array} \tag{2.4.1}$$

2.4.4. Modelo de muerte

De manera similar, si d_n representa la razón de cambio de que una célula mutada en la n-ésima subpoblación retroceda a la $(n-1)$-subpoblación, entonces el modelo corresponde a

$$d_n \triangle t + o(\triangle t), \quad \text{para cada } n \geq 1$$

(asumimos que $d_0 = 0$).

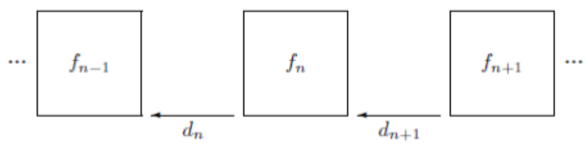

Figura 2.2: Componente conservativo (deamplificación o muerte).

Ahora, existe una porción $(-d_n f_n)$ que sale de la la n-ésima subpoblación y la que llega $(d_{n+1}f_{n+1})$. Luego, el modelo para el caso de muerte se expresa como

$$f_n' = (L\mathbf{f})_n = -d_n f_n + d_{n+1}f_{n+1}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.4.2}$$

o equivalentemente

$$\begin{array}{rcl} f_0' = (L\mathbf{f})_0 & = & \beta_1 f_1, \\ f_1' = (L\mathbf{f})_1 & = & -\alpha_1 f_1 + \beta_2 f_2, \\ & \vdots & \\ f_n' = (L\mathbf{f})_n & = & -\alpha_n f_n + \beta_n f_{n+1} \\ & \vdots & \end{array} \tag{2.4.3}$$

2.4.5. Modelo de nacimiento y muerte

Combinando el proceso de nacimiento y muerte, obtenemos que, para cada $n \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{array}{rcl} f_0' = (L\mathbf{f})_0 & = & -b_0 f_0 + d_1 f_1, \\ f_1' = (L\mathbf{f})_1 & = & (-b_1 - d_1) f_1 + b_0 f_0 + d_2 f_2, \\ & \vdots & \\ f_n' = (L\mathbf{f})_n & = & (-b_n - d_n) f_n + b_{n-1} f_{n-1} + d_{n+1} f_{n+1} \\ & \vdots & \end{array} \tag{2.4.4}$$

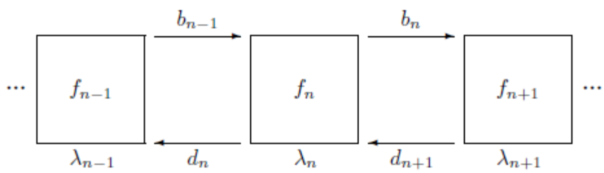

Figura 2.3: Proceso de gen amplificación-deamplificación sin proliferación.

2.5. Resultados previos

El propósito principal de este capítulo, es presentar algunos resultados relacionados con los modelos dados anteriormente. Veremos que los semigrupos$-C_0$ juegan un papel importante para el comportamiento asintótico de soluciones para un sistema infinito lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias asociados con la evolución de una población celular discutido por Jacek Banasiak y Miroslav Lachowicz (véase [2]) y generalizado por Karl-Goswin, Grosse-Erdman y Alfredo Peris (ver [7]). El entero n como hemos visto puede ser considerado como el número de copias gen resistente a drogas. Suponemos que los coeficientes de este modelo son independientes del tiempo.

Como es usual, dado $1 \leq p < \infty$, denotamos por l^p al espacio de sucesiones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|^p < +\infty$ con la norma

$$||\mathbf{f}||_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Se sigue que, $X^p = l^p$ representan un espacio de Banach separable cuyo espacio dual $(X^p)^\star = l^q$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Como un caso particular, tenemos el espacio $X = l^1$ con norma

$$\|\mathbf{f}\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |f_n|, \tag{2.5.1}$$

para cada $\mathbf{f}$ en el cono positivo $l^1_+ = \{\mathbf{f} \in l^1 : \quad \text{para} \quad \text{cada} \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad f_n \geq 0\}$ y $X^\star = l^\infty$.

Por otra parte, la familia $c_0 = \{\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} : \text{lím}_{n\to\infty} f_n = 0\}$, también es un espacio de Banach separable cuya norma en este caso viene dado por

$$\|\mathbf{f}\|_0 = \sup_{n\in\mathbb{N}_0} |f_n|. \tag{2.5.2}$$

Denotémoslo por $X_0 = c_0$.

2.6. Modelo de muerte con coeficientes variables: primer enfoque

En [12] los autores estudian el proceso de nacimiento y muerte haciendo énfasis para el caso particular de muerte. Siguiento la misma línea, pero permitiendo coeficientes variables, en el año 2001, Jacek Banasiak y Miroslav Lachowicz en [2] generalizan el resultado dado en [12].

Enfatizamos que, la generalización se enfoca en permitir que los coeficientes α_n , β_n sean variables; pero bajo el supuesto que, $0 < \alpha_n < \beta_n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}_0$. Además,

(A1) $\alpha_n = \alpha + a_n^{'}$, con $\alpha \geq 0$ y $\text{lím}_{n\to\infty} a_n^{'} = 0$;

(A2) $\beta_n = \beta b_n$, para $\beta \geq \alpha$ y $\text{lím}_{n\to\infty} b_n = 1$.

Recordemos que, el coeficiente α_n representa la razón de cambio de que, una célula mutada en la n-ésima subpoblación retroceda a la $(n-1)$-subpoblación.

Consideremos en el espacio $X = l^1$ el sistema de ecuaciones

$$f_n' = (L\mathbf{f})_n = -\alpha_n f_n + \beta_n f_{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.6.1}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} f_0' = (L\mathbf{f})_0 &= -\alpha_0 f_0 + \beta_0 f_1, \\ f_1' = (L\mathbf{f})_1 &= -\alpha_1 f_1 + \beta_1 f_2, \\ &\;\,\vdots \\ f_n' = (L\mathbf{f})_n &= -\alpha_n f_n + \beta_n f_{n+1} \\ &\;\,\vdots \end{aligned} \tag{2.6.2}$$

Podemos reescribir el sistema (2.6.2) de la siguiente manera:

$$\frac{d\mathbf{f}(t)}{dt} = L\mathbf{f}(t), \tag{2.6.3}$$

donde

$$L = \begin{pmatrix} -\alpha_0 & \beta_0 & 0 & . & . & . & . \\ 0 & -\alpha_1 & \beta_1 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & -\alpha_2 & \beta_2 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_3 & \beta_3 & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

Hemos logrado espresar el operador derivado por su correspondiente representación matricial.

Enfoquemos nuestra atención en el operador $\mathcal{L}_1 : l^1 \to l^1$ dado por,

$$\mathcal{L}_1(f_n) = L(f_n), \text{ para cada } \quad f_n \in l^1.$$

La ecuación para sus eigenvectores toma la forma:

$$\lambda f_n = -\alpha_n f_n + \beta_n f_{n+1}, \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{N}_0.$$

Denotemos por $\mathbf{f}(\lambda)$ los eigenvectores correspondientes al eigenvalor λ,

$$\mathbf{f}(\lambda) = (f_0(\lambda),\ f_1(\lambda),\ \ldots),$$

donde

$$f_0(\lambda) = 1 \quad \text{y} \quad f_n(\lambda) = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda + \alpha_i}{\beta_i}, \qquad \text{para cada } n \geq 1.$$

En lo que sigue, es reunir las hipóteis del Teorema 2.3.3. Empecemos mostrando la existencia de un conjunto abierto $U \subset \sigma_P(\mathcal{L}_1)$ tal que $U \cap i\mathbb{R}^1 \neq \emptyset$.

Lema 2.6.1 *Sea $U = \{\lambda \in \mathbb{C}\text{: } |\lambda + \alpha| < \beta\}$ y $\sigma_P(L)$ el espectro puntual del operador L dado en* (2.6.3)*. Si* ***(A1)-(A2)*** *se satisfacen, entonces $U \subset \sigma_P(L)$ y $\lambda = 0$ pertenece al interior de $\sigma_P(L)$.*

Demostración. Supongamos que $|\lambda + \alpha| < \beta$. Afirmamos que existe un número real $\epsilon > 0$ tal que $|\lambda + \alpha| = \beta - \epsilon$. En efecto, pongamos $\epsilon = \beta - (\lambda + \alpha)$, se sigue que, $\epsilon > 0$ y cumple que $|\lambda + \alpha| = \beta - \epsilon$. Por **(A1)** y **(A2)**, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq n_0$, se tiene que $|\ \beta_n - \beta\ | < \frac{\epsilon}{2}$ y

$$\left|\frac{\lambda + \alpha_n}{\beta_n}\right| \leq \left|\frac{\lambda + \alpha}{\beta_n}\right| + \left|\frac{a_n'}{\beta_n}\right| \leq \frac{\beta - \epsilon}{\beta - \epsilon/2} + \left|\frac{a_n'}{\beta_n}\right| < 1,$$

ya que $\frac{\beta-\epsilon}{\beta-\epsilon/2} < 1$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n'}{\beta_n} = 0$. Eligiendo n_0 lo suficientemente grande obtenemos que, para algún $q < 1$ y $n > n_0$, se tiene que $\left|\frac{\lambda+\alpha_n}{\beta_n}\right| \leq q$. De aquí $\sum_{n=0}^{\infty} |f_{n+1}(\lambda)| < \infty$; luego, $f(\lambda) \in l^1$ y $\lambda \in \sigma_P(L)$.

Por otra parte, la esfera abierta con centro en λ y radio ϵ se encuentra contenido en U $(N(\lambda; \epsilon) \subset U)$, ya que si $x \in N(\lambda; \epsilon)$, entonces

$$|x + \alpha| = |(x - \lambda) + (\lambda + \alpha)| \leq |(x - \lambda)| + |(\lambda + \alpha)| < \epsilon + \beta - \epsilon = \beta.$$

El supuesto **(A2)** da que $\lambda = 0$ es un punto interior de este círculo. ∎

Para estudiar el caos de la solución, utilizaremos de aquí en adelante el Teorema 2.3.3 con $U = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda + \alpha| < \beta\}$.

Empecemos por tomar una sucesión arbitraria $\overline{\Phi} = \{\overline{\Phi}_k\}_{k\in\mathbb{N}_0} \in l^\infty$, y consideremos la función

$$F_{\overline{\Phi}}(\lambda) = \langle \overline{\Phi}, \mathbf{f}(\lambda)\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\Phi}_k f_k(\lambda), \tag{2.6.4}$$

donde la función $F_{\overline{\Phi}}(\lambda)$ es uniformemente converge al menos en el círculo U y l^∞ es el dual del espacio l^1.

Aplicando los supuestos **(A1)**, **(A2)** y reordenando la expresión (2.6.4), obtenemos que

$$F_{\Phi}(\mu) = F_{\overline{\Phi}}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\Phi}_k \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda + \alpha_i}{\beta_i} = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k \prod_{i=0}^{k-1} (\mu + a_i), \tag{2.6.5}$$

donde

$$\Phi_0 = \overline{\Phi}_0, \quad \Phi_k = \frac{\overline{\Phi}_k}{\prod_{i=0}^{k-1} b_i}, \quad \mu = \frac{\lambda + \alpha}{\beta} \quad \text{y} \quad a_n = \frac{a_n'}{\beta}.$$

Nótese que la función $F_\Phi(\mu)$ es análitica u holomorfa en la vecindad $|\mu| < 1$, para cada $\Phi = \{\Phi_k\}_{k\in\mathbb{N}_0} \in l^\infty$. Así, la función $f : U \to l^1$ dada por $f(\lambda) = (f_0(\lambda),\ f_1(\lambda),\ \ldots)$ es débilmente holomorfa.

Por otra parte, si $F_\Phi = 0$, entonces $\Phi_k = 0$, para cada $k \in \mathbb{N}_0$. En lo que sigue nos centraremos en la función F_Φ.

Pongamos

$$A_{j,n} = \begin{cases} 0, & \text{para cada } j > n; \\ 1, & \text{con } n = j; \\ \sum_{0\le i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-j} \le n-1} a_{i_1} \ldots a_{i_{n-j}}, & \text{para cada } j < n. \end{cases}$$

Aplicando el principio de inducción matemática se demuestra que

$$\prod_{j=0}^{n-1} (\mu + a_j) = \sum_{j=0}^{n} \mu^j A_{j,n},$$

y sustituyendo en (2.6.5), obtenemos que la serie

$$F_\phi(\mu) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j \sum_{n=j}^{\infty} \Phi_n A_{j,n} \tag{2.6.6}$$

es absolutamente convergente. Hemos logrado expresar F_ϕ como una serie de potencias en la variable $\mu = \dfrac{\lambda + \alpha}{\beta}$.

Ahora, procedemos a demostrar que, la única solución acotada del sistema infinito lineal triangular superior es cero:

$$\begin{array}{ccccccccc} \Phi_0 & + & A_{0,1}\Phi_1 & + & A_{0,2}\Phi_2 & + & \ldots & = & 0, \\ & & \Phi_1 & + & A_{1,2}\Phi_2 & + & \ldots & = & 0, \\ & & & & \Phi_2 & + & \ldots & = & 0, \\ & & & & & & \ldots & = & 0. \end{array} \tag{2.6.7}$$

Para hacerlo, denotemos por $\mathcal{A} : l^\infty \to l^\infty$ el operador dado por:

$$\mathcal{A}\mathbf{f} = \{A_{i,j}\}\mathbf{f}\ , \text{ para cada } \mathbf{f} \in l^\infty.$$

Lema 2.6.2 *Si existen $q < 1$ y $k_0 \in \mathbb{N}_0$ tales que $|a_k| \leq q^{k+1}$, para cada $k \geq k_0$, entonces $\mathcal{A}$ es un operador acotado en l^∞.*

Demostración. Sea $\mathbf{f}(t) = \{f_1(t), f_2(t), \ldots,\} \in l^\infty$. Se sigue que

$$\mathcal{A}\mathbf{f}(t) = \{g_1(t), g_2(t), \ldots,\},$$

con $g_n = \sum_{j=n}^{\infty} A_{n,j} f_j$ y

$$||\mathcal{A}\mathbf{f}||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \left| \sum_{j=n}^{\infty} A_{n,j} f_j \right| \leq ||\mathbf{f}||_\infty \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \sum_{j=n}^{\infty} |A_{n,j}| = ||\mathbf{f}||_\infty \sup_{n\in\mathbb{N}_0} S_n, \tag{2.6.8}$$

donde

$$S_n = 1 + \left| \sum_{1\leq i\leq n} a_i \right| + \left| \sum_{0\leq i_1<i_2\leq n+1} a_{i_1} a_{i_2} \right| + \ldots$$
$$\ldots + \left| \sum_{0\leq i_1<i_2<\ldots<i_{j-n}\leq j-1} a_{i_1} \ldots a_{i_{j-n}} \right| + \ldots$$

Supongamos que para $k < k_0$, $|a_k| \leq M q^{k+1}$, para alguna constante M. Con este supuesto obtenemos el estimado

$$S_n \leq M^{k_0} \left(1 + \sum_{1\leq i\leq n+1} q^i + \ldots + \sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_{j-n}\leq j} q^{i_1+\ldots+i_{j-n}} + \ldots \right)$$

Cada potencia q^i con $i > 2$ puede aparecer varias veces en la suma de arriba. Sin embargo, debido a que solamente existe un número finito de combinaciones posibles de sumandos que satisfacen $i_1 + \ldots + i_r = i$, entonces la cantidad de veces que aparezca la potencia q^i no puede exceder a $P(i)$, donde $P(i)$ es el número total de soluciones que tiene la expresión $i_1 + \ldots + i_r = i$. De esta manera podemos escribir

$$S_n \quad \leq \quad \sum_{i=1}^{\infty} P(i) q^i,$$

así el cálculo es independiente de n. Usando resultados de combinatoria (ver [16, pág. 160])

$$P(i) < \frac{\pi}{\sqrt{6(i-1)}} e^{\left(\pi\sqrt{\frac{2i}{3}}\right)}, \quad \text{para cada } i > 2. \tag{2.6.9}$$

Como

$$\limsup_{i\to\infty} e^{\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3i}}\right)} = e^0 = 1$$

y

$$\limsup_{i\to\infty} \left(\frac{\pi}{\sqrt{6(i-1)}} \right)^{\frac{1}{i}} \leq \limsup_{i\to\infty} \left(\frac{\pi}{\sqrt{12}} \right)^{\frac{1}{i}} < 1,$$

obtenemos que

$$\limsup_{i\to\infty} \left(q^i P(i) \right)^{\frac{1}{i}} \leq q < 1.$$

De esta manera el criterio de Cauchy proporciona la convergencia de cada S_n con límite independiente de n. Esto demuestra que el operador $\mathcal{A}$ es acotado. ■

Lema 2.6.3 *Existe una constante $q < 1$ tal que si $|a_k| \leq q^{k+1}$ para cada $k \in \mathbb{N}_0$, entonces el operador $\mathcal{A}$ es un isomorfismo en l^∞.*

Demostración. Dividimos $\mathcal{A}$ como sigue

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \mathcal{I} + \begin{bmatrix} 0 & A_{0,1} & A_{0,2} & A_{0,3} & \dots \\ 0 & 0 & A_{1,2} & A_{1,3} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & A_{2,3} & \dots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots \end{bmatrix} \\ &= \mathcal{I} + \hat{\mathcal{A}},\end{aligned}$$

donde $\mathcal{I}$ es la matriz identidad infinita. Como en la prueba del Lema 2.6.2, obtenemos que para cualquier $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots) \in l^\infty$,

$$||\hat{\mathcal{A}}\mathbf{f}||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \left|\sum_{j=n}^{\infty} A_{n,j} f_j\right| \leq ||\mathbf{f}||_\infty \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \sum_{j=n}^{\infty} |A_{n,j}| = ||\mathbf{f}||_\infty \sup_{n\in\mathbb{N}_0} S_n^{'}, \tag{2.6.10}$$

donde esta vez tenemos el estimado:

$$S_n^{'} \leq \Bigg(\sum_{1\leq i\leq n+1} q^i + \sum_{1\leq i_1<i_2\leq n+2} q^{i_1+i_2} + \dots + \sum_{1\leq i_1<i_2<\dots<i_{j-n}\leq j} q^{i_1+\dots+i_{j-n}} + \dots \Bigg).$$

Usando el mismo argumento combinatorio del Lemma 2.6.2, se tiene que $\mathcal{S}(q) = \sum_{j=1}^{\infty} P(j)q^j$ es una función continua y satisface que $S_n^{'} \leq \mathcal{S}(q)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Así, por (2.6.10), obtenemos que

$$||\hat{\mathcal{A}}\mathbf{f}||_\infty \leq \mathcal{S}(q)||\mathbf{f}||_\infty. \tag{2.6.11}$$

Además, como $\mathcal{S}(0) = 0$, existe $q_0 \in (0,1)$ tal que $|\mathcal{S}(q)| < 1$ para $0 < q \leq q_0$. Así, por la desigualdad (2.6.11) resulta que

$$||\hat{\mathcal{A}}\mathbf{f}||_\infty \leq \mathcal{S}(q)||\mathbf{f}||_\infty < \|f\|_\infty.$$

Por otra parte, como $\hat{\mathcal{A}} \neq \mathcal{I}$, se tiene que $||\hat{\mathcal{A}}|| < 1$ y $\mathcal{A} = \mathcal{I} + \hat{\mathcal{A}} = \mathcal{I} - (-\hat{\mathcal{A}})$, entonces por las Proposiciones 2.3.1 y 2.3.2, $\mathcal{A}^{-1}$ existe y cumple que

$$\mathcal{A}^{-1} = [\mathcal{I} - (-\hat{\mathcal{A}})]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-\hat{\mathcal{A}})^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\hat{\mathcal{A}})^n.$$

Resta probar que $\mathcal{A}$ es inyectivo y sobreyectivo.

Veamos la inyectividad. Si $\mathcal{A}f = \mathcal{A}g$, entonces $\mathcal{A}(f-g) = 0$. De aquí, $f - g = \mathcal{A}^{-1}0 = 0$.

$\mathcal{A}$ es sobreyectivo, ya que, si $g \in l^\infty$, entonces existe $f \in l^\infty$, a saber ($f = \mathcal{A}^{-1}g$) tal que $\mathcal{A}f = g$. En resumen $\mathcal{A}$ es inyectivo y sobreyectivo, luego $\mathcal{A}$ es un isomorfismo. ■

Combinando los resultados dados enteriormente, obtenemos el que nos ocupa.

Teorema 2.6.4 *Supongamos que las sucesiones $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ y $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ satisfacen los supuestos **(A1)-(A2)** y la hipótesis del Lema 2.6.3. Entonces el semigrupo generado por el sistema* (2.6.1) *es caótico en cualquier espacio l^p, $1 \leq p < \infty$, y en c_0.*

Demostración. En el Lema 2.6.1, vimos que, $\sigma_P(\mathcal{L}_1)$ contiene el círculo abierto $|\lambda + \alpha| < \beta$ con punto interior $\lambda = 0$. De aquí, $\sigma_P(\mathcal{L}_1)$ contiene subconjuntos abiertos:

$$V_+ \subset \mathbb{C}_+ = \{\lambda\colon \mathcal{R}\lambda > 0\}, \quad V_- \subset \mathbb{C}_- = \{\lambda\colon \mathcal{R}\lambda < 0\}$$

y un intervalo abierto V_0 del eje imaginario. De este modo, si $F_\phi(\mu) = 0$, entonces por (2.6.6), tenemos que $\sum_{j=0}^{\infty} \mu^j \sum_{n=j}^{\infty} \Phi_n A_{j,n} = 0$ en uno de estos conjuntos $V_\pm$ o V_0, el cual es equivalente a que $\mathcal{A}\Phi = \sum_{n=j}^{\infty} \Phi_n A_{j,n} = 0$. Pero, por el Lema 2.6.3, obtuvimos que $\mathcal{A}$ es un isomorfismo en l^∞, así que la única solución acotada es $\Phi = 0$. Hemos reunido las hipótesis del Teorema 2.3.3, luego el semigrupo $\{T_1(t)\}_{t\geq 0}$ es topológicamente caótico en el espacio l^1.

Consideremos el mismo problema en los espacios c_0 o l^p con $1 < p < +\infty$. Sea L la matriz de coeficientes asociada al sistema (2.6.2). Se sigue que, para $p \in \{0\} \cup [1, \infty)$ el operador $\mathcal{L}_p : l^p \to l^p$ definido por

$$\mathcal{L}_p(f_n) = L(f_n), \; f_n \in l^p$$

es acotado y así, por el Teorema 2.2.8, genera un semigrupo uniformemente continuo $\{T_p(t)\}_{t\geq 0}$. Los eigenvectores construidos pertenecen a cada espacio de arriba. Además, $c_0^\star = l^1$ y $(l^p)^\star = l^q$, con $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Si $\mathcal{A}\Phi = 0$, para cada $\Phi \in l^q$ y $1 \leq q \leq +\infty$, entonces $\Phi = 0$. De aquí, el semigrupo $\{T_p(t)\}_{t\geq 0}$ es topológicamente caótico en cada uno de estos espacios. Pero, cualquier elemento de l^q es necesariamente acotado, de esta manera la afirmación se sigue de la solubilidad única de $\mathcal{A}\Phi = 0$ en l^∞. ■

2.7. Modelo de muerte con coeficientes variables: enfoque general

En esta sección mostraremos una generalización de los supuestos **(A1)-(A2)**, el cual fue observado por K.G, Grosse-Erdmann y A. Peris en [7, Capítulo 7].

Consideremos en el espacio $X = l^1$ el sistema de ecuaciones:

$$\frac{df_n}{dt} = -\alpha_n f_n + \beta_n f_{n+1}, \quad n \geq 1$$

con $f_n \in L^1([0, +\infty))$, donde $L^1([0, +\infty))$ denota el espacio de Lebesgue con norma $||f||_1 = \int_0^\infty |f| dt$.

Si $f = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in X$, entonces en X definimos:

$$Lf = \{-\alpha_n f_n + \beta_n f_{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}} \in X,$$

$f = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in D(L) \subset X$. Denotemos por $\{T_t\}_{t\geq 0}$ el semigrupo$-C_0$ solución del problema de Cauchy (2.6.1), donde L es un operador lineal densamente definido en X con gráfico cerrado.

Proposición 2.7.1 *Sean $\alpha_n \in (0, \infty)$ y $\beta_n \in \mathbb{R}$, con $n \in \mathbb{N}$, tal que*

$$\alpha := \sup\{\alpha_k : k \in \mathbb{N}\} < \beta := \liminf\{\beta_k : k \in \mathbb{N}\}. \tag{2.7.1}$$

Entonces el semigrupo$-C_0$ solución para el problema de Cauchy (2.6.1) *es caótico y mezclante.*

Demostración. Sea $\frac{\alpha}{2} < \mu < \frac{\beta}{2}$. Denotemos por $N(\frac{-\alpha}{2}, \mu)$ a la esfera abierta con centro en $\frac{-\alpha}{2}$ y radio μ. Pongamos $U = N(\frac{-\alpha}{2}, \mu)$. Se sigue que, $U \subset \mathbb{C}$ y $U \cap i\mathbb{R} \neq \emptyset$.

Los vectores propios de L se expresan como sigue: para cada $\lambda \in U$, se tiene que $Lf = \lambda f$ o equivalentemente $\lambda f_n = -\alpha_n f_n + \beta_n f_{n+1}$, con $n \geq 1$. De aquí,

$$f_n(\lambda) = \gamma_n f_1, \quad \text{donde} \quad \gamma_1 := 1 \quad \text{y} \quad \gamma_n := \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda + \alpha_k}{\beta_k}, \quad \text{con} \quad n > 1.$$

Sea $\lambda \in U$ y fijemos $\delta \in (2\mu, \beta)$. Como $\beta := \lim inf\{\beta_k : k \in \mathbb{N}\}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\beta_n > \delta$ para cada $n \geq n_0$. Además, $-\alpha_n \in U$ para toda $n \in \mathbb{N}$, ya que, $\alpha_n \in (0, \infty)$. Así,

$$\left|\frac{\lambda + \alpha_n}{\beta_n}\right| \leq \left|\frac{\lambda - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} + \alpha_n}{\beta_n}\right| \leq \left|\frac{2\mu}{\delta}\right| < 1 \quad \text{para} \quad \text{cada} \quad n \geq n_0.$$

Luego, $f(\lambda) = \{f_n(\lambda)\}_{n\in\mathbb{N}_0} = \{\gamma_n f_1\}_{n\in\mathbb{N}_0} \in X$ y $Lf(\lambda) = \lambda f(\lambda)$. Afirmación, $f : U \to X$ es una función débilmente holomorfa. En efecto, sea $\phi = \{\phi_n\}_{n=1}^{\infty} \in X^\star = l^\infty(L^\infty([0,\infty)))$. Tenemos que

$$h(\lambda) = \langle f(\lambda), \phi_n\rangle = \sum_{n\geq 1} ||f_n\phi_n|| = \sum_{n\geq 1}\int_0^\infty f_n\phi_n = \eta_1 + \sum_{n\geq 2}\eta_n\prod_{k=1}^{n-1}(\lambda+\alpha_k),$$

donde $\eta_1 = \int_0^\infty f_1\phi_1$ y $\eta_n = \left(\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\beta_k}\right)\int_0^\infty f_1\phi_n, \quad n \geq 2.$

Por la elección de las sucesiones $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y U, obtenemos que h es holomorfa en U, ya que las sumas parciales son un polinomio y la serie es uniformemente convergente en el compacto U. Pongamos

$$0 = h(\lambda) = \eta_1 + \sum_{n\geq 2}\eta_n\prod_{k=1}^{n-1}(\lambda+\alpha_k).$$

Sustituyendo $\lambda = -\alpha_1$ en la función h, obtenemos que, $\eta_1 = 0$ y podemos descomponer a la función h como un producto

$$h(\lambda) = (\lambda+\alpha_1)\Big(\eta_2 + \sum_{n\geq 3}\eta_n\prod_{k=2}^{n-1}(\lambda+\alpha_k)\Big).$$

Sea $0 = h(\lambda)$. Al sustituir $\lambda = -\alpha_2$, en la parte derecha del producto, obtenemos que $\sum_{n\geq 3}\eta_n\prod_{k=2}^{n-1}(\lambda+\alpha_k) = 0$ en U, dándonos $\eta_2 = 0$ y podemos descomponer

$$h(\lambda) = (\lambda+\alpha_1)(\lambda+\alpha_2)g(\lambda),$$

donde $g(\lambda)$ es idénticamente cero en U.

Procediendo inductivamente, obtenemos que, $\eta_k = 0$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Pero, esto implica que $\int_0^\infty f_1\phi_k = 0$, para cada $k \in \mathbb{N}$ y $f_1 \in L^1([0,\infty))$. Esto demuestra que, $\phi = 0$. Hemos reunido las hipótesis del Teorema 2.3.3. Luego, el semigrupo$-C_0$ es caótico y mezclante. ∎

2.8. Proceso de nacimiento con coeficientes variables

En esta sección vamos a considerar el proceso de nacimiento, vea [12]. Adoptamos los mismos supuestos sobre las sucesiones $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ y $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ como en la sección anterior.

Las ecuaciones de rapidez de cambio viene expresado como:

$$\begin{array}{rcl} f_0' = (L\mathbf{f})_0 & = & -\alpha_0 f_0, \\ f_1' = (L\mathbf{f})_1 & = & -\alpha_1 f_1 + \beta_0 f_0, \\ & \vdots & \\ f_n' = (L\mathbf{f})_n & = & -\alpha_n f_n + \beta_{n-1}f_{n-1} \\ & \vdots & \end{array} \tag{2.8.1}$$

Reescribiendo nuevamente el sistema (2.8.1) nos queda:

$$\frac{d\mathbf{f}(t)}{dt} = L^T\mathbf{f}(t), \tag{2.8.2}$$

donde

$$L^T \quad = \quad \begin{pmatrix} -\alpha_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . \\ \beta_0 & -\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & . & . \\ 0 & \beta_1 & -\alpha_2 & 0 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & \beta_2 & -\alpha_3 & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

La matrix L^T da origen a dos operadores acotados, a saber $\mathcal{L}_0^T : c_0 \to c_0$ dado por

$$\mathcal{L}_0^T(f_n) = L^T(f_n), \qquad \text{para cada } f_n \in c_0$$

y, para $1 \leq p \leq +\infty$, $\mathcal{L}_p^T : l^p \to l^p$ definido como

$$\mathcal{L}_p^T(f_n) = L^T(f_n), \qquad \text{para cualquier } f_n \in l^p.$$

Por otra parte, la matrix transpuesta $L = (L^T)^T$ define un operador acotado $K_1 : l^1 \to l^1$ definido como:

$$K_1(f_n) = L(f_n), \qquad \text{para todo } f_n \in l^1$$

y, para $p \neq \infty$, un operador $K_q : l^q \to l^q$ dado por

$$K_q(f_n) = L(f_n), \qquad \text{para cada } f_n \in l^q, \qquad \text{donde } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Definamos por $\{\mathcal{S}_p(t)\}_{t\geq 0}$ el semigrupo$-C_0$ generado por $\mathcal{L}_p^T$, $p \in \{0\} \cup \{1, \infty\}$ (vea Teorema 2.2.8). Recordemos que (vea la Definición 6), si el semigrupo$-C_0$ no es hipercíclico, entonces no es topológicamente caótico. De aquí

Teorema 2.8.1 *Para cada $p \in \{0\} \cup [1, \infty)$, tenemos que, el semigrupo$-C_0$, $\{\mathcal{S}_p(t)\}_{t\geq 0}$, no es hipercíclico.*

Demostración. Como los generadores están acotados, los semigrupos generados por éstos, son uniformemente continuos. Por lo que, el adjunto del generador origina el adjunto del semigrupo. De este modo, para $p \in [1, \infty)$, se tiene que, $\{\mathcal{S}_p^\star(t)\}_{t\geq 0} = \{T_q(t)\}_{t\geq 0}$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y $\{\mathcal{S}_0^\star(t)\}_{t\geq 0} = \{T_1(t)\}_{t\geq 0}$.

Si $\{\mathcal{S}_p(t)\}_{t\geq 0}$ es hipercíclico, entonces todas las órbitas del semigrupo adjunto serán no acotados (véase [5, Teo. 3.3]).

Supongamos que $p \neq 1$, entonces por el Teorema 2.6.4, tenemos que $\{T_q(t)\}_{t\geq 0}$ es caótico, en particular, ésta posee órbitas periódicas el cual pueden no ser acotado. Luego, para este primer caso $\{\mathcal{S}_p(t)\}_{t\geq 0}$ no es hipercíclico.

Si $p = 1$, entonces el semigrupo adjunto $\{\mathcal{S}_1^\star(t)\}_{t\geq 0}$ actua sobre el espacio l^∞. Dado que K_0 es la restricción de K_∞ al subespacio invariante cerrado $c_0 \subset l^\infty$ ($K_0 = K_\infty|_{c_0}$), obtenemos que $\{T_0(t)\}_{t\geq 0}$ es una restricción de $\{T_\infty(t)_{t\geq 0}\}$. En el desarrollo de la demostración del Teorema 2.6.4, vimos que, existe un subespacio no vacío $X_0 \subset c_0$ ($cl(X_0) = l^1 \subset c_0$) tal que para cada $x \in X_0$ tenemos que, $\lim_{t\to\infty} ||T_0(t)x||_\infty = 0$. Como $X_0 \subset c_0 \subset l^\infty$, obtenemos que, para cada $x \in X_0$

$$||T_\infty(t)x||_\infty = ||T_0(t)x||_\infty.$$

Por lo tanto, las trayectorias de $\{T_\infty(t)\}_{t\geq 0}$ que empienzan desde X_0 éstas se aproximan a cero cuando t es suficientemente grande ($t \to \infty$). Esto demuestra que $\{\mathcal{S}_1(t)\}_{t\geq 0}$ no puede ser hipercíclico. ■

2.9. Conclusiones

Ahora, mencionamos lo que a nuestro juicio son las conclusiones de este capítulo.

En el trabajo, presentamos una condición necesaria que garantiza la ocurrencia del caos topológico (vea Teorema 2.3.3). Al analizar el comportamiento caótico de algunos modelos de nacimiento y muerte, obtuvimos un sistema infinito de ecuaciones diferenciales ordinarias, el cual puede ser representado por una matriz multiplicada por un vector de funciones (función distribución). Dicha matriz genera un operador lineal, a saber el operador derivado, cuyo dominio y codominio son espacios de Banach separables. Ahora, si los generadores infinitesimales son acotados, éstos generan semigrupos fuertemente continuos, los cuales dan solución al sistema (2.6.2). De aquí, los espacios apropiados para dar solución al sistema son los espacios c_0, $l^p(L^p(0,\infty))$, con $1 \leq p < \infty$.

En el desarrollo de esa interpretación, buscamos reunir las hipótesis del Teorema 2.3.3, para asegurar el fenómeno de caos topológico en el correspondiente espacio de Banach.

Las principales aportaciones de este trabajo, se pueden resumir como sigue:

(i) Los resultados presentados en las cita [1] están escritos de manera compacta, esto trae como consecuencia que sea poco entendible para aquellos lectores que no son especialistas en el tema. Subsanamos esta problemática escribiendo de tal manera que la lectura esté al alcance de cualquier persona interesada en esta área.

(ii) Los artículos tienen el inconveniente de estar redactados en el idioma inglés. Nos encargamos de realizar su traducción al español con el fin de facilitar la lectura a quien leyere.

Por supuesto, plantear algunas preguntas no está demás, ya que se da continuidad a este tema de investigación:

Pregunta 1: ¿Construir modelos de nacimiento y muerte cuando las razones de cambio (o coeficientes variables) dependen del tiempo?

Pregunta 2: ¿Analizar el modelo matemático para el caso de nacimiento y muerte?

Pregunta 3: Implementar el método de análisis de sensibilidad de parámetros al modelo de nacimiento y muerte con coeficientes constantes.

Bibliografía

[1] J. Aroza and A. Peris. **Chaotic behaviour birth-and-death models with proliferation**, *Journal of Difference Equations and Applications*, 18(4):647-655, 2012.

[2] J. Banasiak and M. Lachowicz. **Chaos for a class of linear kinetic models** , Compt. Rend. Acad. Sci. Paris, 2001; see also Internal Report 2/2001, School of matematical and Statistical Sciences, University of Natal, South Africa.

[3] J. Banasiak and M. Moszynski. **A generalization of Desch-Schappacher-Webb criteria for chaos**, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 12:959-972, 2005.

[4] L. Butzer Paul and Berens Hubert. ***Semi-Groups of Operators and Approximation***, Springer-Verlag New York Inc. 1967.

[5] W. Desch, W. Schappacher and G.F. Webb. **Hypercyclic and chaotic semi-groups of linear operators**, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 17:793-819, 1997.

[6] G. Godefroy and J. H. Shapiro. **Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds**, *Funct. Anal.*, 98(2):229-269, 1991.

[7] K. G. Grosse-Erdmann and A. Peris. ***Linear Chaos***, Universitext, Springer, London, 2011.

[8] M. Kimmel, A. Swierniak, and A. Polanski. **Infinite-dimensional model of evolution of drug resistance of cancer cells**, *J. Math. Systems Estimation Control*, 8(1):1-16, 1998.

[9] E. Kreyszig. ***Introductory Functional Analysis with Applications***, Wiley, 1989.

[10] R. Nagel. ***One-parameter semigroups of positive operators***, Springer Lect. Notes in Math. 1184, 1986.

[11] A. Pazy. ***Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations***, Applied Mathematical Sciences 44, Springer-Verlang, New York, 1983.

[12] V. Protopopescu and Y. Y. Asmy. **Topological chaos for a class of linear models**, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 2(1):79-90, 1992.

[13] J. Smieja and A. Swierniak. **Design of chemotherapy protocols-Optimal vs suboptimal periodical solutions**, *Proceedings VI National Conference on Applications of Mathematics in Biology and Medicine*, Zawoja, 138-143, 2000.

[14] A. Swierniak, A. Polanski, M. Kimmel, A. Bobrowski, and J. Smieja. **Qualitative analysis of controlled drug resistance model-inverse Laplace and semi-group approach**, *Control Cybernetics*, 28(1):61-73, 1999.

[15] H. M. Taylor and S. Karlin. ***An introduction to Stochastic Modelling***, Elsevier, 1984.

[16] J. H. van Lint and R. M. Wilson. ***A Course in Combinatorics***, Cambridge Univ. Press, 1992.