

Capítulo 6

Teoría de las bases de Groebner aplicado al cálculo de la cinemática inversa de un robot bípedo

Rocío Ambrocio Delgado ¹
Heriberto Casarrubias Vargas²
Esther Lugo González ³
Alberto E. Petrilli Barceló ⁴

Abstract: In this paper, we give an analysis of the inverse kinematics of the biped robot NAO for the development of a walking algorithm. Using the Groebner Bases theory, the NAO robot's joints angles are estimated to follow the desired trajectory. With the *Maple*TM software, which is a program oriented to the solution of mathematical problems, the Groebner bases are estimated from different proposed equations, which describe the NAO robot behavior at rest. The proposed equations that will be transformed to Groebner bases are obtained from the forward kinematics of the Nao robot and will be used for joint angles calculation from a proposed point. As a result, is presented the trajectory generation using the ZMP stability criterion.

Keywords: Inverse kinematics, Groebner Bases theory, walking algorithm.

Resumen: En el presente trabajo se realiza un análisis de la cinemática inversa del robot bípedo NAO para el desarrollo de un algoritmo de marcha. Usando la teoría de las Bases de Groebner se calculan los ángulos de las articulaciones que debe tomar el robot NAO para seguir la trayectoria deseada. Con el software *Maple*TM, que es un programa orientado a la solución de problemas matemáticos, se calcula la base de Groebner a partir de diferentes ecuaciones propuestas, las cuales describen el comportamiento del robot NAO en reposo. Las ecuaciones propuestas que serán transformadas a bases de Groebner son obtenidas a partir de la cinemática directa del robot Nao y serán utilizadas para el cálculo de los ángulos de las articulaciones a partir de un punto propuesto. Como resultado se presenta la generación de una trayectoria utilizando el criterio de estabilidad ZMP.

¹rocio.ambrocio.delgado@gmail.com. Estudiante de la maestría en Robótica, Universidad Tecnológica de la Mixteca

²hcasarrubiasv@uaemex.mx. Centro Universitario UAEM Valle de México, Universidad Autónoma del Estado de México

³elugog@mixteco.utm.mx. Instituto de Electrónica y Mecatrónica, Universidad Tecnológica de la Mixteca

⁴petrilli@mixteco.utm.mx. División de Estudios de Posgrado, Universidad Tecnológica de la Mixteca

Palabras clave: Cinemática inversa, teoría de las Bases de Groebner, algoritmo de marcha.

6.1. Introducción

La cinemática es la parte de la física que se encarga del estudio del movimiento de sistemas mecánicos sin considerar las fuerzas que lo producen [11]. La cinemática se divide en: cinemática directa y cinemática inversa, las cuales pueden calcularse mediante el método de las bases de Groebner, Denavit-Hartenberg y haciendo uso de herramientas geométricas.

La cinemática directa consiste en analizar el movimiento del robot con respecto a un sistema cartesiano fijo relacionando las coordenadas generalizadas, los parámetros geométricos y las coordenadas cartesianas y de orientación del efector final.

La cinemática inversa determina si un robot puede alcanzar una posición determinada dadas las coordenadas generalizadas, los parámetros geométricos y de orientación en ángulos de Euler del efector final de un robot con respecto a un sistema de coordenadas fijo.

La cinemática directa siempre tiene solución, mientras que la cinemática inversa no siempre la tiene, puede ser que tenga más de una solución o que no tenga ninguna solución [11].

Para obtener cálculos más exactos en la cinemática inversa de un manipulador, pueden utilizarse las Bases de Groebner.

6.2. Teoría de las Bases de Groebner

La teoría de la Bases de Groebner, nombrado así por Bruno Buchberger en su tesis doctoral en honor a Wolfgang Groebner, provee una aproximación uniforme a la solución de muchos problemas expresados en términos de conjuntos de polinomios multivariados [2].

El cálculo computacional en los polinomios multivariados no depende de la cantidad de polinomios que se tengan, sino del orden lexicográfico de los mismos. Para ordenar un conjunto de polinomios lexicográficamente, el elemento de menor grado en el polinomio debe estar en términos de una sola variable.

Este tipo de orden permite que se tenga un cálculo recursivo para las diferentes variables del conjunto de polinomios.

La teoría de las Bases de Groebner es atractiva debido a diferentes factores [7], entre ellos se encuentran:

1. El problema principal puede ser resuelto de forma rápida si se conocen bien los polinomios a utilizar.
2. El algoritmo de Buchberger se puede comprender fácilmente.
3. Muchos problemas de las diferentes áreas de las matemáticas pueden ser resueltos mediante Bases de Groebner.

Para comprender matemáticamente las Bases de Groebner se presentan las siguientes definiciones [9]:

Definición 12 Definimos un orden monomial sobre \mathbb{T}^n como un orden total \prec que satisfice:

1. $1 \prec x^\alpha$ para todo $x^\alpha \in \mathbb{T}^n$ distinto de 1
2. Si $x^\alpha \prec x^\beta$, entonces $x^\gamma x^\alpha \prec x^\gamma x^\beta$, para todo $x^\gamma \in \mathbb{T}^n$

Definición 13 Diremos que $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{T}^n$ es menor (respecto al orden lexicográfico) que $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{T}^n$, y lo denotaremos por $a <_{lex} b$, si existe $i \in \{1, \dots, n-1\}$ tal que $a_j = b_j$, si $1 \leq j \leq i$, y $a_i < b_i$, o equivalentemente, si en la diferencia $b - a$ la primera coordenada distinta de cero de izquierda a derecha es positiva.

Por ejemplo, si tenemos $x_1x_2x_3^2x_4^5$ y $x_1x_2x_3^3x_4^2$, usando las Definiciones 12 y 13 tenemos que

$$x_1x_2x_3^2x_4^5 <_{lex} x_1x_2x_3^3x_4^2 \quad (6.2.1)$$

ya que $(1, 1, 2, 5) <_{lex} (1, 1, 3, 2)$.

A lo largo del documento se denotará por $R = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] = \mathbb{K}[x]$ al anillo de polinomios sobre el cuerpo \mathbb{K} . Un subconjunto no vacío $I \subseteq R$ es un ideal de R si es cerrado bajo la suma de polinomios y es cerrado por la multiplicación de elementos de R .

Definición 14 (Bases de Groebner). Dado un orden monomial \succ y un ideal $I \subset R$ se dice que el conjunto $f_1, \dots, f_s \subset R$ es una Base de Groebner de I para \succ si se cumple

$$\langle lt_\succ(f_1), \dots, (f_s) \rangle = \langle lt_\succ(I) \rangle, \quad (6.2.2)$$

donde $lt_\succ(I) = \{lt_\succ(f) \mid f \in I\}$ [9]

Las Bases de Groebner son un sistema de generadores del ideal I , lo cual se demuestra a partir del teorema 6.2.1 (ver [9]).

Teorema 6.2.1 Dado un orden monomial \succ y un ideal $I \subset R$ existe una Base de Groebner de I , la cual es un sistema de generadores del ideal I .

Para comprobar que un conjunto de polinomios multivariados es una Base de Groebner se utiliza el criterio de Buchberger el cual es mostrado en la Proposición 6.2.2.

Proposición 6.2.2 (Criterio de Buchberger). Sea \succ un orden monomial e I un ideal en R . Un sistema de generadores $G = \{g_1, \dots, g_s\}$ de I es una Base de Groebner si y sólo si

$$\overline{S(g_i, g_j)}_\succ^G = 0, 1 \leq i, j \leq s, i \neq j. \quad (6.2.3)$$

6.3. Algoritmo de Buchberger

El algoritmo de Buchberger calcula la Base de Groebner de un ideal dado por un sistema de generadores, todo esto a partir de los S-polinomios que son la combinación más simple de dos polinomios que cancelan sus términos líderes [9].

Definición 15 (*S-polinomio*). Sean $f, g \in R$ dos polinomios no nulos y \succ un orden monomial. El S-polinomio de f y g es

$$S(f, g) = \frac{x^\gamma}{lt_\succ(f)} \cdot f - \frac{x^\gamma}{lt_\succ(g)} \cdot g, \quad (6.3.1)$$

donde $x^\gamma = mcm\{lm_\succ(f), lm_\succ(g)\}$.

El algoritmo de Buchberger es el siguiente:

ENTRADA: $F = f_1, \dots, f_s$ con $I = \langle \{f_i\}_{i=1}^s \rangle \neq \{0\}$ y \succ un orden monomial.

SALIDA: Una Base de Groebner para el ideal I en el orden monomial \succ .

1. $G \leftarrow F, G' \leftarrow \{0\}$
2. **MIENTRAS** $G \neq G'$ **HACER**
3. $G' \leftarrow G$
4. **PARA** cada par $\{p, q\} \subset G'$ con $p \neq q$ **HACER**
5. $S \leftarrow \overline{S(p, q)}^{G'}$
6. **SI** $S \neq 0$ **HACER**
7. $G \leftarrow G \cup \{S\}$
8. **fin SI**
9. **fin PARA**
10. **fin MIENTRAS**

6.4. Punto de momento cero (ZMP)

Vukabratovic y Stepanenko en 1972 propusieron un método para que la marcha de un robot tenga estabilidad local. A este método lo llamaron *Zero Moment Point* (ZMP) [5] o *Punto de Momento Cero* en español. El ZMP mostrado en la Figura 6.1 se define como el punto del suelo respecto al cual el momento creado por las fuerzas inerciales y gravitacionales no tiene componente en los ejes horizontales.

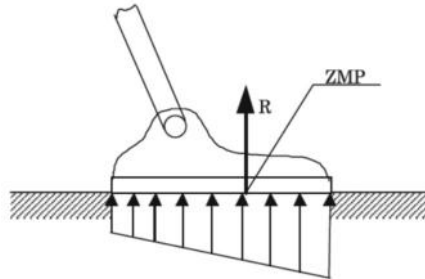


Figura 6.1: Definición del Punto de Momento Cero (ZMP) [6].

En los robots bípedos el único contacto con el medio ambiente se realiza mediante la fuerza de fricción y la fuerza vertical generadas por el piso.

Para facilitar el análisis se puede descartar la parte del mecanismo que está por encima del tobillo del pie de apoyo y sustituir su influencia por una fuerza y un momento con tres componentes cada una, las cuales son las reacciones totales del robot con respecto al piso.

Todos los sensores de fuerza en el pie del robot deben estar en contacto con el piso, de no hacerlo el robot puede rotar y caer. Cuando uno o varios de los sensores de fuerza en el pie no están en contacto con el piso o si el robot no cuenta con sensores de fuerza en los pies, se emplea una estrategia de control para evitar que el robot caiga [12].

Para ejecutar la estrategia de control primero se debe verificar que el CoM (centro de masas) se encuentra dentro del polígono de soporte. La región que considera todos los puntos de contacto entre el robot y el suelo se le llama *polígono de soporte*. Matemáticamente el *polígono de soporte* está definido por una envolvente convexa como se muestra en la Figura 6.2.

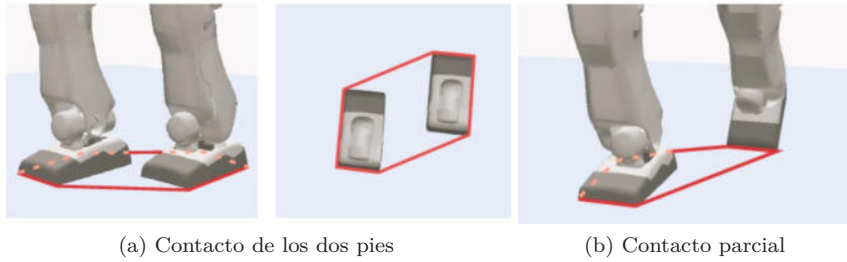


Figura 6.2: Polígono de soporte [6].

La relación que existe entre el ZMP y el polígono de soporte es muy importante. El ZMP solo existe dentro del polígono de soporte. Si el ZMP se encuentra fuera del polígono de soporte el robot caerá.

6.5. Método geométrico

Para encontrar la solución geométrica de un robot, se trata de descomponer la geometría espacial del mismo en varios problemas de geometría plana. El método geométrico consiste en encontrar la cinemática inversa de un robot a partir de identidades trigonométricas.

En muchos robots es fácil calcular los ángulos de las articulaciones utilizando las herramientas de la geometría plana.

Para un brazo de 3 Grados de Libertad (GDL) como el mostrado en la Figura 6.3 que es planar, se le puede aplicar directamente la geometría plana para encontrar una solución [3]. Esto es, considerar que es un triángulo sólido y de esta forma aplicar funciones trigonométricas como la *ley de cosenos* y el *teorema de Pitágoras* para encontrar la solución de los ángulos que debe tomar el mecanismo para llegar a un punto determinado.

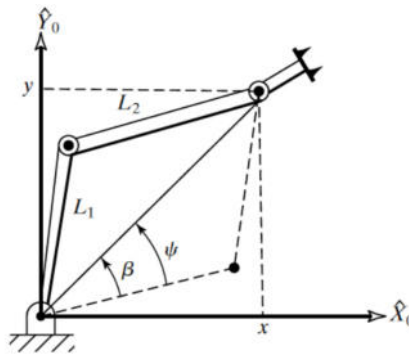


Figura 6.3: Representación del modelo de un manipulador planar de 3 GDL [3].

6.6. El robot Nao

El robot humanoide Nao de Aldebaran Robotics tiene 5 cadenas cinemáticas [10], éstas son: la cabeza, sus dos brazos y sus dos piernas. Las articulaciones que tiene cada cadena cinemática, mostradas en la Figura 6.4, son:

- **Cabeza:** HQ1, HQ2
- **Brazo izquierdo:** LSQ1, LSQ2, LEQ3, LEQ4
- **Brazo derecho:** RSQ1, RSQ2, REQ3, REQ4
- **Pierna izquierda:** LHQ1, LHQ2, LHQ3, LKQ4, LAQ5, LAQ6
- **Pierna derecha:** RHQ1, RHQ2, RHQ3, RKQ4, RAQ5, RAQ6

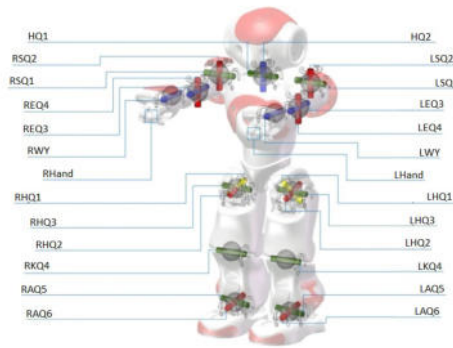


Figura 6.4: Cadenas cinemáticas y articulaciones del robot Nao [10].

Las dimensiones que tiene el robot Nao son las mostradas en el Cuadro 6.1, las cuales son muy importantes en el cálculo de la cinemática directa.

Nombre	Longitud(mm)
NeckOffsetZ	126.50
ShoulderOffsetY	98.00
ElbowOffsetY	15.00
UpperArmLength	105.00
LowerArmLength	55.95
ShoulderOffsetZ	100.00
HandOffsetX	57.75
HipOffsetZ	85.00
HipOffsetY	50.00
ThighLength	100.00
TibiaLength	102.90
FootHeight	45.19
HandOffsetZ	12.31

Cuadro 6.1: Dimensiones del robot Nao.

La coordenada base se toma en la parte central del torso como se muestra en la Figura 6.5, al mismo tiempo se muestra la posición inicial de todas las articulaciones del robot Nao [8].

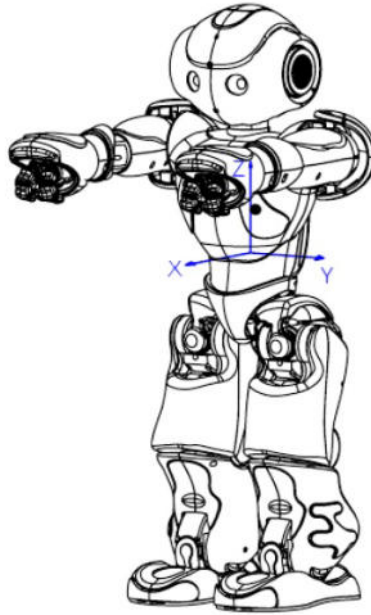


Figura 6.5: Posición inicial y la coordenada base del robot Nao [10].

6.7. Obtención de la cinemática inversa del robot Nao

Para el cálculo de la cinemática inversa del robot Nao se utilizaron las Bases de Groebner, esto se hace a partir de proponer una posición final para las piernas del robot. Las funciones para calcular la cinemática inversa se propusieron utilizando el método geométrico.

6.7.1. Brazos del robot Nao

Los brazos del robot Nao se pueden ver como dos cadenas cinemáticas que trabajan en reflejo una de la otra, es decir, el brazo izquierdo es el reflejo del brazo derecho. En este caso se resolverá la cinemática inversa del brazo derecho. La obtención de las funciones a convertir a Bases de Groebner son a partir del hombro a la muñeca como se muestra en la Figura 6.6, donde $L_1 = 105$ mm y $L_2 = 113,7$ mm, de acuerdo al Cuadro 6.1, L_1 corresponde a UpperArmLength y L_2 es la suma de LowerArmLength y HandOffsetX. Además, se propone que el ángulo $\theta_3 = 0$, que es la rotación en el codo, ya que en el algoritmo de marcha no se manipulan objetos.

La cadena cinemática del brazo derecho se puede ver como dos eslabones articulados como en la Figura 6.7.

Los ángulos de la Figura 6.7 se pueden representar como vectores como se muestra en la Figura 6.8, en donde $q_2 = \theta_2$ y $q_4 = \theta_4$.

A partir de la Figura 6.8 se obtienen las ecuaciones mostradas en (6.7.1) y (6.7.2). Estas ecuaciones resultan de aplicar identidades trigonométricas y de igualarlas con el vector $P =$

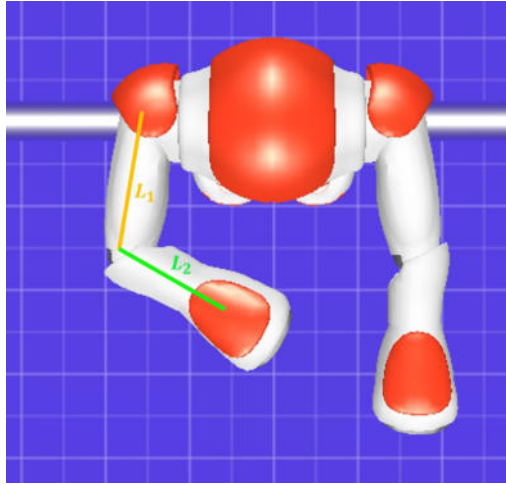


Figura 6.6: Cadena para calcular la cinemática inversa de los brazos del robot Nao.

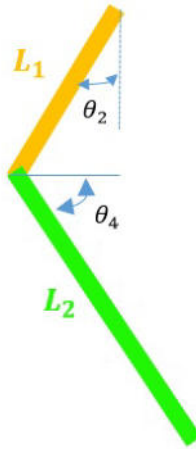


Figura 6.7: Cadena cinemática de los brazos del robot Nao.

$[p_y, p_z]$, donde el vector P representa la posición deseada en (y, z) .

$$L_1 \cdot c_2 + L_2 \cdot s_4 - p_z = 0 \quad (6.7.1)$$

$$L_1 \cdot s_2 + L_2 \cdot c_4 - p_y = 0. \quad (6.7.2)$$

Para que el sistema de ecuaciones se pueda resolver, es necesario proponer otras dos ecuaciones (6.7.3) y (6.7.4) a partir de identidades trigonométricas:

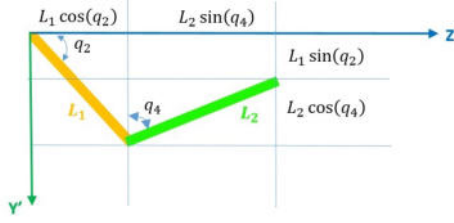


Figura 6.8: Ecuaciones propuestas para calcular la cinemática inversa de los brazos del robot Nao.

$$c_2^2 + s_2^2 - 1 = 0 \quad (6.7.3)$$

$$c_4^2 + s_4^2 - 1 = 0. \quad (6.7.4)$$

Las ecuaciones de la (6.7.1) a la (6.7.4), donde $s_2 = \text{sen}(\theta_2)$, $c_2 = \text{cos}(\theta_2)$, $s_4 = \text{sen}(\theta_4)$ y $c_4 = \text{cos}(\theta_4)$, se proponen como la solución a la cinemática inversa de los brazos del robot Nao. Estas ecuaciones se convierten a Bases de Groebner con el software *Maple^TM*, con el orden lexicográfico c_4 , c_2 , s_4 y s_2 , se tienen 4 ecuaciones:

$$44100 \cdot (p_y^2 + p_z^2) \cdot s_2^2 - 420 \cdot (p_y^3 + p_y \cdot p_z^2) \cdot s_2 + 799129,8 \cdot p_y \cdot s_2 + 3620229,3 - 3805,38 \cdot p_y^2 - 47905,38 \cdot p_z^2 + p_y^4 + 2 \cdot p_y^2 \cdot p_z^2 + p_z^4 = 0. \quad (6.7.5)$$

$$p_y^2 - 210 \cdot s_2 \cdot p_y - p_z^2 + 227,40 \cdot p_z \cdot s_4 - 1902,69 = 0 \quad (6.7.6)$$

$$210 \cdot p_z \cdot c_2 - p_y^2 + 210 \cdot s_2 \cdot p_y - p_z^2 + 1902,69 = 0 \quad (6.7.7)$$

$$113,70 \cdot c_4 - p_y + 105 \cdot s_2 = 0. \quad (6.7.8)$$

De estas 4 ecuaciones se toman (6.7.5) y (6.7.6). Para conocer s_2 se utiliza la ecuación (6.7.9). Se toma la raíz negativa por las restricciones del robot. La solución positiva del polinomio cuadrático da una posición que el robot no puede alcanzar.

$$s_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (6.7.9)$$

Al sustituir los valores de a, b y c se tiene:

$$a = 44100 \cdot (p_y^2 + p_z^2)$$

$$b = -420 \cdot (p_y^3 + p_y \cdot p_z^2) + 799129,8 \cdot p_y$$

$$c = 3620229,3 - 3805,38 \cdot p_y^2 - 47905,38 \cdot p_z^2 + p_y^4 + 2 \cdot p_y^2 \cdot p_z^2 + p_z^4.$$

Al conocer el valor de s_2 se calcula s_4 para conocer los valores de θ_2 y θ_4 . El ángulo θ_1 se puede determinar a partir de la Figura 6.9, en donde se puede observar que

$$\theta_1 = -\text{atan}(p_z, p_x). \quad (6.7.10)$$

Con estas ecuaciones se puede calcular la cinemática inversa de los brazos del robot Nao proponiendo un punto (p_x, p_y, p_z) que se encuentre dentro del área de trabajo. Los ángulos para el brazo izquierdo quedan de la siguiente forma:

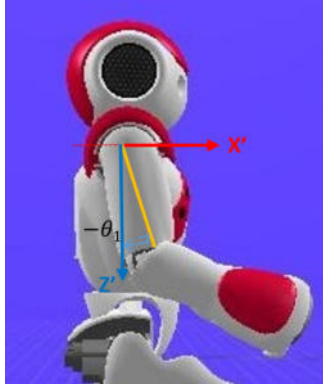


Figura 6.9: Ángulo θ_1 del brazo del robot Nao.

$$\begin{aligned}
 \theta_{1I} &= \theta_{1D} \\
 \theta_{2I} &= -\theta_{2D} \\
 \theta_{3I} &= -\theta_{3D} \\
 \theta_{4I} &= -\theta_{4D},
 \end{aligned}
 \tag{6.7.11}$$

en donde $\theta_{1I} = \theta_1$ del brazo izquierdo, $\theta_{2I} = \theta_2$ del brazo izquierdo, $\theta_{3I} = \theta_3$ del brazo izquierdo, $\theta_{4I} = \theta_4$ del brazo izquierdo, $\theta_{1D} = \theta_1$ del brazo derecho, $\theta_{2D} = \theta_2$ del brazo derecho, $\theta_{3D} = \theta_3$ del brazo derecho y $\theta_{4D} = \theta_4$ del brazo derecho.

6.7.2. Piernas del robot Nao

Las piernas del robot Nao son simétricas, por lo que la estimación de la cinemática inversa se puede realizar solo a una de las dos cadenas. Las medidas que se considera para proponer las funciones a convertir a Bases de Groebner van de la cadera al tobillo como se muestra en la Figura 6.10, donde $L_1 = 100.0$ mm y $L_2 = 102.9$ mm, de acuerdo al Cuadro 6.1, L_1 corresponde a ThighLength y L_2 a TibiaLength. Además, se propone $\theta_1 = 0$, debido a que no se requiere la rotación de cadera en el algoritmo de marcha.

Visto de otra forma, la cadena cinemática se forma por dos eslabones articulados como en la Figura 6.11. Para obtener las funciones que describen el comportamiento de las articulaciones, los ángulos se pueden ver como en la Figura 6.12.

Teniendo así las ecuaciones mostradas en (6.7.12) y (6.7.13). Resultantes de aplicar identidades trigonométricas y de igualar las ecuaciones mostradas en la Figura 6.12 con el vector $P = [p_x, p_z]$, en donde el vector P representa la posición deseada en (x, z) .

$$L_2 \cdot c_3 \cdot c_4 - L_2 \cdot s_3 \cdot s_4 + L_1 \cdot c_3 - p_z = 0 \tag{6.7.12}$$

$$L_2 \cdot c_3 \cdot s_4 + L_2 \cdot c_4 \cdot s_3 + L_1 \cdot s_3 - p_x = 0. \tag{6.7.13}$$

Estas ecuaciones aún no son suficientes. Para que el sistema de ecuaciones se pueda resolver se agregan las siguientes identidades trigonométricas:

$$c_3^2 + s_3^2 - 1 = 0 \tag{6.7.14}$$

$$c_4^2 + s_4^2 - 1 = 0. \tag{6.7.15}$$

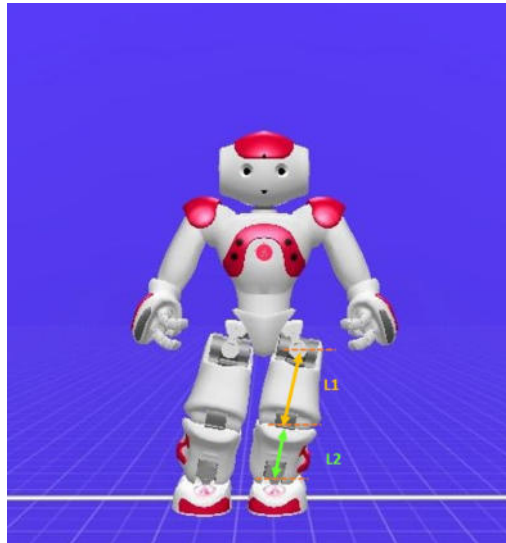


Figura 6.10: Cadena para calcular la cinemática inversa de las piernas del robot Nao.

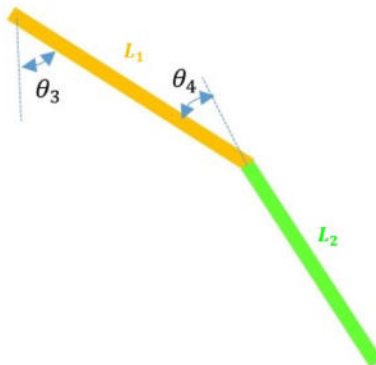


Figura 6.11: Cadena cinemática de las piernas del robot Nao visto como eslabones.

Las ecuaciones de la (6.7.12) a la (6.7.15), donde $s_3 = \sin(\theta_3)$, $c_3 = \cos(\theta_3)$, $s_4 = \sin(\theta_4)$ y $c_4 = \cos(\theta_4)$, se proponen como un sistema de ecuaciones con el cual se puede resolver la cinemática inversa de las piernas. Estas ecuaciones se convierten a bases de Groebner con el software *Maple^TM*, siguiendo el orden lexicográfico c_4 , c_3 , s_4 y s_3 , se tienen 4 ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 &40000 \cdot (p_x^2 + p_z^2) \cdot s_3^2 + -400 \cdot (p_x^3 + p_x \cdot p_z^2) \cdot s_3 + \\
 &235364 \cdot p_x \cdot s_3 + 346226,3 - 1176,82 \cdot p_x^2 - \\
 &41176,82 \cdot p_z^2 + p_x^4 + 2 \cdot p_x^2 \cdot p_z^2 + p_z^4 = 0
 \end{aligned} \tag{6.7.16}$$

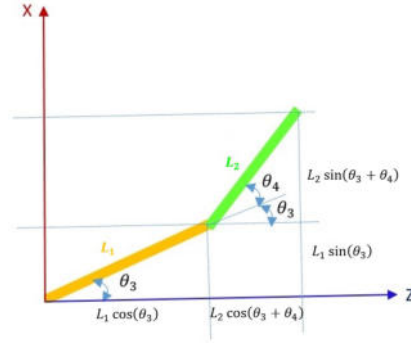


Figura 6.12: Ecuaciones propuestas para la estimación de la cinemática inversa de las piernas del robot Nao.

$$200 \cdot (p_x^2 + p_z^2) \cdot s_3 + 20580 \cdot p_z \cdot s_4 + 588,41 \cdot p_x - p_x^3 - p_x \cdot p_z^2 = 0 \quad (6.7.17)$$

$$-p_x^2 - p_z^2 + 20580 \cdot c_4 + 20588,41 = 0 \quad (6.7.18)$$

$$200 \cdot p_z \cdot c_3 - p_x^2 + 200 \cdot p_x \cdot s_3 - p_z^2 + 588,41 = 0. \quad (6.7.19)$$

De estas 4 ecuaciones se toman (6.7.16) y (6.7.17), ya que resolver las 4 ecuaciones es algo redundante. La ecuación (6.7.16) es un polinomio cuadrático del cuál se tomará la raíz negativa debido a las restricciones en el movimiento del robot. La solución positiva del polinomio cuadrático da como resultado una posición que no se puede alcanzar. Para resolverlo la ecuación (6.7.16) se utiliza la fórmula (6.7.20).

$$s_3 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (6.7.20)$$

Al sustituir a, b y c de la fórmula (6.7.20) se tiene:

$$a = 40000 \cdot (p_x^2 + p_z^2)$$

$$b = -400 \cdot (p_x^3 + p_x \cdot p_z^2) + 235364 \cdot p_x$$

$$c = 346226,3 - 1176,82 \cdot p_x^2 - 41176,82 \cdot p_z^2 + p_x^4 + 2 \cdot p_x^2 \cdot p_z^2 + p_z^4$$

Obtenida s_3 , se calcula s_4 para conocer los valores de θ_3 y θ_4 .

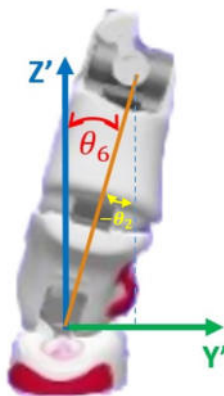
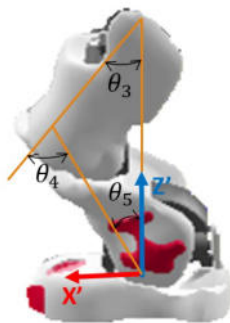
Hasta el momento se conocen 3 ángulos, θ_1 , θ_3 y θ_4 . Los ángulos θ_2 y θ_6 se calculan a partir de la Figura 6.13, en donde se puede observar que

$$\theta_6 = \text{atan}(p_y, p_z) \quad (6.7.21)$$

y que

$$\theta_2 = -\theta_6 \quad (6.7.22)$$

El ángulo θ_5 se obtiene a partir de θ_3 y θ_4 , como se muestra en la Figura 6.14. Teniendo así:

Figura 6.13: Ángulo θ_6 de la pierna del robot Nao.Figura 6.14: Ángulo θ_5 de la pierna del robot Nao.

$$\theta_5 = -(\theta_3 + \theta_4) \quad (6.7.23)$$

Con estas ecuaciones se puede calcular la cinemática inversa de las piernas del robot Nao proponiendo un punto (p_x, p_y, p_z) que se encuentre dentro del área de trabajo.

6.8. Generación de trayectorias

El diseño del generador de trayectorias considera dos cosas: los puntos de la trayectoria ZMP en el plano (x, y) y el tamaño del pie del robot, el cual mide 16.0 cm de longitud por 9.0 cm de anchura.

La trayectoria que debe seguir el robot Nao se generará mediante la función senoidal de la ecuación (6.8.1) en el plano (x, y) , con base en una distancia establecida x_d para hacer uso del criterio de estabilidad ZMP, donde x toma valores entre $\frac{-x_d}{2}$ y $\frac{x_d}{2}$. Una función senoidal proporciona movimientos suaves en el robot a comparación de una función escalón. Los puntos

de la trayectoria deberán estar dentro del área del pie del robot en el plano (x, y) .

La trayectoria no solo se establece en un solo plano, la fase de oscilación se hace en el plano (x, z) proponiendo la elevación del pie con respecto al piso z_d .

La combinación de movimientos entre la pierna izquierda y la pierna derecha del robot en el eje 'y' tiene la misma trayectoria mostrada en la ecuación (6.8.1), debido a que el efector final es el centro de masas que se encuentra en la cintura del robot como se muestra en la Figura 6.5.

$$y(x) = 50 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x_d} x\right) \quad (6.8.1)$$

La generación de la trayectoria queda de la siguiente forma:

1. Cuando el pie derecho este en el piso, al alcanzar una posición en el eje y igual a 50 mm, el pie izquierdo comienza la elevación para estar en la fase de oscilación.
2. Cuando el pie izquierdo este en el piso, al alcanzar una posición en el eje y igual a -50 mm, el pie derecho comienza la elevación para estar en la fase de oscilación.

El ciclo de marcha es una combinación de movimientos entre las piernas y los brazos. En este caso los brazos del robot Nao se dejaron fijos, en una posición que esté cerca del torso del mismo para evitar momentos de torsión, así mismo la velocidad con la cual se mueven los servomotores del robot Nao es muy baja, para evitar los momentos inerciales. Un ciclo de marcha se ve como el mostrado en la Figura 6.15.

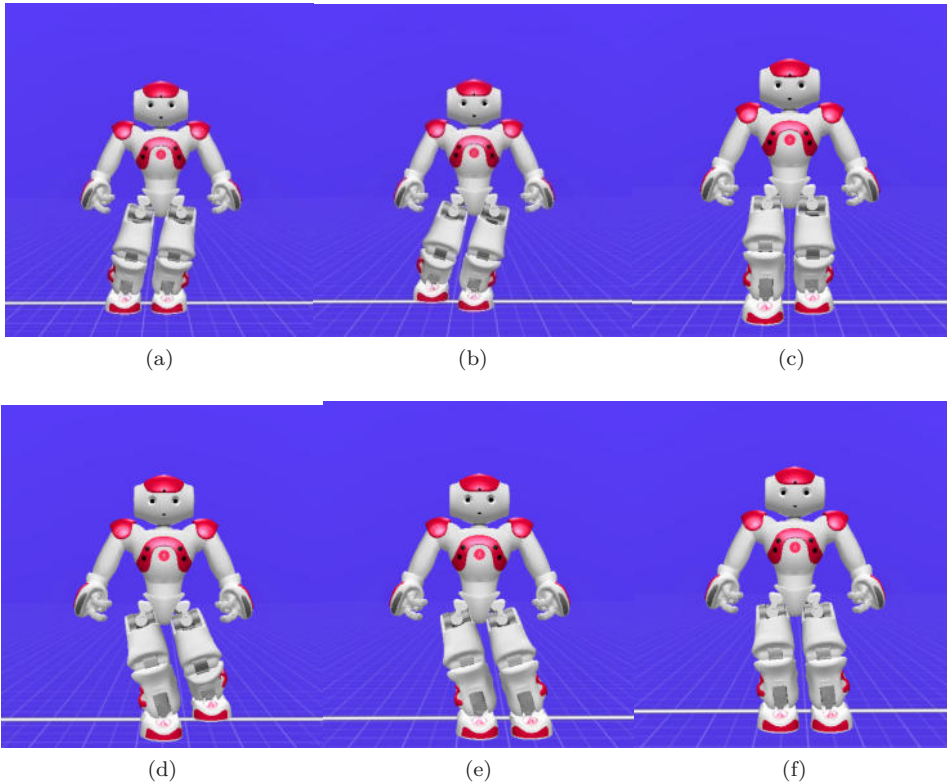


Figura 6.15: Ciclo de marcha del robot Nao simulado en WEBOTS.

6.9. Conclusiones

El cálculo de la cinemática inversa de cualquier tipo de mecanismo o robot es muy difícil de hacer. Por esta razón se buscan herramientas que puedan facilitar este tipo de cálculos. En este caso se propuso resolver la cinemática inversa del robot Nao utilizando la teoría de las Bases de Groebner.

Respetando las restricciones de movimiento del robot se seleccionan las ecuaciones que se va a utilizar para calcular la cinemática inversa. Usando la teoría de las Bases de Groebner se pueden encontrar todas las posibles soluciones para los ángulos de las articulaciones a partir de dichas ecuaciones estableciendo un orden lexicográfico.

Si se compara la teoría de las Bases de Groebner con otros métodos, como lo son el método geométrico y los Algoritmos Genéticos [1], la teoría de la Bases de Groebner proporciona todas las soluciones a diferencia de los métodos mencionados que solo encuentran soluciones particulares.

Al aplicar las ecuaciones calculadas con la teoría de las bases de Groebner en el algoritmo de marcha para el robot Nao, el cual siguió los puntos propuestos, esto quiere decir que el cálculo de la cinemática inversa es correcta y por consiguiente se tuvo una marcha adecuada en línea recta hacia adelante.

Bibliografía

- [1] R. Ambrocio Delgado, E. Lugo González, and A. E. Petrilli Barceló. **Aplicación de Algoritmos Genéticos en la Planeación de Trayectorias de un Robot Manipulador Marca Mitsubishi RV-2AJ**. Asociación Mexicana de Mecatrónica A.C., 2017.
- [2] B. Buchberger. **Groebner Bases: A Short Introduction for Systems Theorists**. Computer Aided Systems Theory EUROCAST 2001, 2001.
- [3] J. J. Craig, *Robótica.*, PEARSON EDUCACIÓN, tercera edición, 2006.
- [4] K. S. Fu, R.C. González and C. S. G. Lee, *Robótica: Control, detección, visión e inteligencia*, McGraw-Hill, 1988.
- [5] J. Álvaro Gallego, A. Forner Cordero, J. C. Moreno, E. A. Turowska, and J. L. Pons. **Síntesis de la marcha robótica mediante la aproximación del ciclo límite: El robor bípedo ESBiRRO**. 2017.
- [6] S. Kajita, K. Harada, H. Hirukawa, and K. Yokoi. *Introduction to humanoid robotics*. Springer, 2014.
- [7] K. Kendrick. **Solving the Inverse Kinematic Robotics Problem: A Comparison Study of the Denavit-Hartenberg Matrix and Groebner Basis Theory**. Tesis de Doctorado, 2007.
- [8] N. Kofinas. **Forward and Inverse Kinematics for the NAO Humanoid Robot**. 2012.
- [9] E. Martínez Moro, C. Munuera Gómez, and D. Ruano Benito. *Bases de Groebner: aplicaciones a la codificación algebraica*. Editorial Texto, 2007.
- [10] Aldebaran Robotics. **Nao documentation**. http://doc.aldebaran.com/2-1/home_nao.html, accesado 10-10-2017, 2017.
- [11] F. Reyes. *Robótica. Control de robots manipuladores*. Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V., primera edición, 2011.
- [12] M. Vukobratovic and B. Borovac. **ZERO-MOMENT POINT ? THIRTY FIVE YEARS OF ITS LIFE**. *International Journal of Humanoid Robotics*, 157-173, 2004.