

Capítulo 8

Galería de dinámicas no lineales en un convertidor de potencia CD a CD del tipo Ćuk controlado por realimentación de la integral del error

Richard Márquez¹
Marco A. Contreras Ordaz²
Arturo Hernández Méndez³

Abstract: A Ćuk DC/DC power converter is regulated by integral control using a control gain k_I . It is shown analytically, by numerical simulation, and experimentally that variations on this parameter results in a supercritical (stable) Hopf bifurcation. Well beyond its initial variation a plethora of phenomena is obtained in realistic simulation (using PSIM, a dedicated power electronics simulation package) and through experimental results on a real Ćuk converter.

Keywords: Hopf bifurcation, canard-like explosion, hysteresis, relaxation oscillations, chaos.

Resumen: En este trabajo se estudia un convertidor de potencia CD a CD del tipo Ćuk (reductor-elevador) desde el punto de vista de la variación de un parámetro. El convertidor se regula alrededor de un valor deseado mediante un control de tipo integral con un solo parámetro k_I . Al variar tal valor se verifica la existencia de una bifurcación de Hopf de tipo supercrítico (ciclo límite estable) obtenida de forma analítica. Al continuar aumentando el parámetro de bifurcación k_I se presentan diversas dinámicas no lineales tanto en simulación numérica en PSIM (software dedicado a la simulación en electrónica de potencia) como experimentalmente, usando un convertidor de potencia real.

Palabras clave: Bifurcación de Hopf, explosión de ciclo límite del tipo “canard”, histéresis, oscilaciones de relajación, caos.

¹rmarquez@mixteco.utm.mx. Instituto de Electrónica y Mecatrónica, Universidad Tecnológica de la Mixteca

²marco.contreras@mixteco.utm.mx. Instituto de Electrónica y Mecatrónica, Universidad Tecnológica de la Mixteca

³arturohm54@mixteco.utm.mx. Laboratorio de Posgrado, Universidad Tecnológica de la Mixteca

8.1. Introducción

La electrónica de potencia está presente en nuestra vida diaria, desde nuestros celulares y computadoras hasta en los automóviles modernos, pasando por todo tipo de “gadget” electrónico moderno. Para la conversión de corriente alterna (CA) a corriente directa (CD), como es el caso del cargador del celular, se requiere de un convertidor CA/CD. Para la conversión de un nivel de CD a otro nivel de CD (lo cual ocurre, por ejemplo, en el caso de la fuente de poder en nuestra computadora personal o en la laptop) se requiere un convertidor de potencia de CD a CD o simplemente convertidor CD/CD. El tipo de convertidores CD/CD más eficiente empleado es el del tipo conmutado; en este caso se emplean dispositivos semiconductores como el transistor y el diodo los cuales permiten mediante su activación cambios en la topología⁴ o estructura del circuito involucrado. Tal conmutación se realiza, por ejemplo, mediante modulación de ancho de pulso (PWM, por sus siglas en inglés, *Pulse Width Modulation*). Debido a tal conmutación, estos convertidores presentan una inherente dinámica o comportamiento no lineal que sin embargo en lazo abierto (sin regulación) es estable. Es en el caso en lazo cerrado usando retroalimentación (del voltaje o de la corriente) que se han observado fenómenos diversos no lineales, incluyendo caos, desde mediados de los años 80, e.g. [10, 24].

Muchos estudios han sido realizados en este ámbito. Disponemos del estado del arte para convertidores de potencia CD/CD hasta el año 2002, en el libro editado por Soumitro Banerjee y George Verghese [2] y en la excelente revisión de Chi K. Tse y Mario di Bernardo [23]. En el año 2003 el mismo C.K. Tse presentó un libro sobre dinámicas complejas en convertidores de potencia conmutados [22].

El problema de bifurcaciones ha sido estudiado, en particular, para convertidores regulados bajo un esquema de realimentación en lazo cerrado. El esquema más empleado en estos estudios es el llamado control por modo de corriente (CMC, por sus siglas en inglés, *Current-Mode Control*), también control de corriente programada, o control por inyección de corriente. El CMC ha sido un área de especial interés para la comunidad de electrónica de potencia desde 1978 [7]. Esta estrategia consiste en un doble lazo de control, uno interno basado en medición de corriente y uno externo basado en medición de voltaje, en contraposición al lazo simple o de control por voltaje (*voltage-mode control*). Véase, por ejemplo, el Capítulo 14 de [11] y su larga lista de 98 referencias.

En el caso de convertidores CD/CD bajo CMC, debido a la propia respuesta conmutada, se pueden considerar principalmente dos tipos de bifurcaciones: una rápida asociada a los tiempos entre conmutaciones (es decir, en una escala de tiempo similar al tiempo de conmutación T), la cual considera la dinámica rápida del lazo interno de corriente y otro tipo de bifurcación más asociado a la “dinámica lenta” (en términos de promediación –*averaging* en inglés– la llamada *dinámica promedio*, que se observa en un tiempo muy superior a T), asociada al lazo de voltaje. En este tipo de bifurcaciones a escala lenta se incluyen las bifurcaciones de Poincaré-Andronov-Hopf (brevemente, bifurcaciones de Hopf). En los últimos 10 años podemos encontrar aún un continuo interés en este tema como lo muestra la búsqueda en Scopus de las palabras claves “power converter hopf bifurcation”, generando más de 60 publicaciones desde 2009, de las cuales más de la mitad están en revistas internacionales.

Si nos referimos a las bifurcaciones de Hopf en convertidores de potencia CD a CD, el tema en si mismo es novedoso. A pesar de que en circuitos eléctricos el teorema de bifurcación de Hopf se emplea desde hace muchos años [15], es apenas en el año 2010 que se propone el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz para predecir esas bifurcaciones que aparecen en la dinámica del lazo de voltaje, llamada también inestabilidad de Hopf o de pequeña escala (*slow-scale instability* en inglés) [1]. Recordemos que la bifurcación de Hopf aparece cuando en un sistema con un punto de equilibrio con linealización estable (polos con parte real negativa)

⁴Aquí el concepto de *topología* corresponde al sentido de forma y no al sentido estricto de la conocida área de las Matemáticas.

se hace variar un parámetro hasta que el sistema se hace inestable, en particular, hasta que aparecen polos complejos imaginarios puros (con parte real nula). Ese cambio de estabilidad bajo condiciones de transversalidad (y otras condiciones que comentaremos más adelante), hace que se presente una oscilación al cambiar la estabilidad del punto de equilibrio. El criterio de Routh-Hurwitz permite evaluar el polinomio característico de la matriz Jacobiana (matriz obtenida por linealización alrededor del punto de equilibrio) mediante ciertas condiciones sobre un arreglo de los coeficientes de tal polinomio.

Adicionalmente, más recientemente en 2012, Zhang et al. [25] analizan los ciclos límites en un convertidor elevador del tipo Boost usando un control por voltaje⁵ basado en un controlador proporcional-integral. Consideramos que el análisis presentado en tal trabajo es incompleto y aparentemente poco riguroso, los autores indican que existen dos tipos de ciclos límites llamados tipo I y tipo II, los cuales no son más que dos resultados de analizar la variación de los dos parámetros utilizados k_P y k_I y usando k_I como parámetro de bifurcación.

La aparición de oscilaciones auto-sostenidas (*self-sustained oscillations*) en sistemas realimentados se ha estudiado extensivamente. Véase, por ejemplo, el texto [12], donde se emplea un sistema de control realimentado (de tipo Lur'e) entre sus objetos de estudio de bifurcaciones de Hopf. En el presente trabajo se estudia la aparición de oscilaciones (de escala lenta, *slow-scale oscillations*) usando el teorema de bifurcación de Hopf en un convertidor de potencia CD a CD del tipo Ćuk usando un control integral del tipo

$$u(t) = -k_I \int_0^t (v_2(\sigma) - V_{\text{ref}}) d\sigma, \quad (8.1.1)$$

es decir, basado en la medición de voltaje v_2 , por lo que en este caso se considera un solo parámetro de bifurcación k_I . Nuestro interés desde el punto de vista práctico es confirmar nuestra intuición de que el sistema, a pesar de la inestabilidad del punto de equilibrio, conserva la propiedad de exhibir una oscilación estable, lo cual abre posibilidades notorias al campo de control de convertidores de potencia CD a CD más allá de las nociones o conceptos preestablecidos que se emplean en la práctica.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera. En la Sección 8.2 se describe el objeto de nuestro estudio, el convertidor de potencia CD a CD del tipo Ćuk, se presenta el diagrama circuital, las cuatro ecuaciones diferenciales asociadas a su modelo promedio, añadiendo una quinta ecuación mediante la estrategia de control (8.1.1) para obtener un sistema autónomo en lazo cerrado. El modelo no lineal obtenido se linealiza, se obtiene su matriz Jacobiana asociada y su polinomio característico. Con esta información a la mano procedemos a presentar el teorema de bifurcación de Hopf en la Sección 8.3. Se muestra que un ejemplo de aplicación de este teorema es justamente el sistema del convertidor Ćuk con control integral, usando k_I como parámetro de bifurcación. En la Sección 8.4 se presentan las simulaciones numéricas asociadas al modelo promedio y las simulaciones ciclo por ciclo (conmutadas) usando el programa PSIM para simulación dedicada de sistemas eléctricos de potencia. Estas simulaciones confirmaron las predicciones realizadas a través del teorema de Hopf y mostraron fenómenos adicionales, como aparición de explosiones en las oscilaciones (drásticos cambios de amplitud ante pequeños cambios en los parámetros), múltiples variaciones en las oscilaciones con espectros bien definidos y otros que indican fenómenos cuasi-caóticos en función de variaciones del parámetro k_I . Realizamos además un experimento con un convertidor real fabricado aquí en la Universidad Tecnológica de la Mixteca, en la Sección 8.5, gracias al cual detectamos una histéresis, un comportamiento no lineal adicional, en la forma como aparecen las oscilaciones al cambiar en línea el parámetro de bifurcación. La última sección está dedicada a las conclusiones y a

⁵Es sorprendente que en la gran mayoría de los trabajos revisados sobre CMC, en los cuales usan el lugar geométrico de las raíces o el método de Routh-Hurwitz, no se considera la aparición de oscilaciones de pequeña amplitud como las inducidas por la bifurcación de Hopf.

nuestro interés sobre las posibles implicaciones que puede tener este trabajo en el control de convertidores de potencia CD/CD.

8.2. El convertidor Ćuk

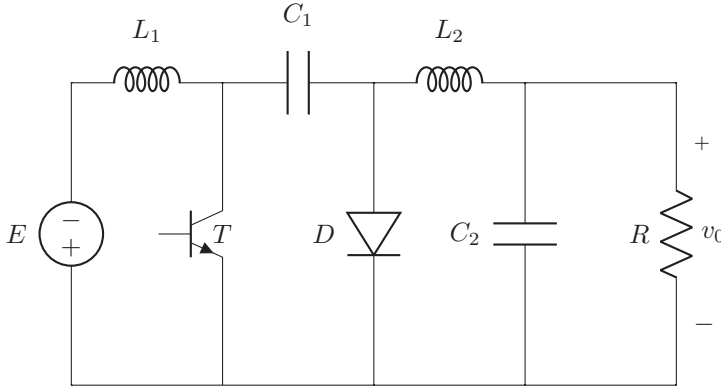


Figura 8.1: Diagrama eléctrico (esquemático) del Convertidor CD a CD Ćuk.

En la Figura 8.1 se muestra el diagrama esquemático de un convertidor de potencia CD a CD del tipo Ćuk, donde E representa la fuente de tensión de tipo CD, lineal y constante, L_1, L_2 son bobinas, C_1, C_2 representan los capacitores, R representa la carga asociada al capacitor de salida C_2 , además aparecen elementos como el transistor T y el diodo D , considerados parte del sistema de conmutación (a pesar de que estos semiconductores pueden presentar posibles comportamientos no lineales, aquí se considera que se comportan como un suiche, es decir, abierto o cerrado). Cada componente n exhibe un voltaje o tensión v_n y una corriente i_n , aunque puede no estar explícitamente indicado, cada una de estas cantidades depende del tiempo, $v_n(t), i_n(t)$. Por ejemplo, la tensión en el capacitor 1 se representará en la forma v_{C_1} y su corriente v_{C_1} . Así la derivada respecto al tiempo de una de estas variables la podremos representar como $dv_n(t)/dt = dv_n/dt$. Nuestro objetivo en esta parte es obtener expresiones para las ecuaciones diferenciales que representan la dinámica en el tiempo del circuito de la Figura 8.1.

Este circuito fue creado por Slobodan Ćuk mientras hacía sus estudios doctorales bajo la dirección de R. David Middlebrook en el Instituto de Tecnología de California (Caltech) [5, 6]. Este convertidor fue diseñado usando grafos (mediante dualidad) y tiene la característica de ofrecer un bajo rizo de corriente, se dice en este caso que la corriente es no pulsante, tanto a la entrada como en la salida (gracias a los inductores colocados en ambos extremos). El transistor mostrado funciona como un interruptor o conmutador, el cual al estar activo desactiva el diodo y viceversa. Esto hace que se pueda analizar su comportamiento usando las dos topologías que resultan, las cuales se muestran en la Figura 8.2.

A este proceso de conmutación entre dos circuitos o topologías se le llama modo de conducción continua (*continuous conduction mode* en inglés) debido a que no aparece una tercera topología que puede darse cuando la corriente en alguna de las bobinas se hace discontinua⁶. Durante nuestro análisis solo consideraremos el modo de conducción continua, es decir, la conmutación estará circunscrita a las dos topologías mostradas.

⁶Esto ocurre cuando los dispositivos semiconductores impiden el paso de la corriente en los inductores.

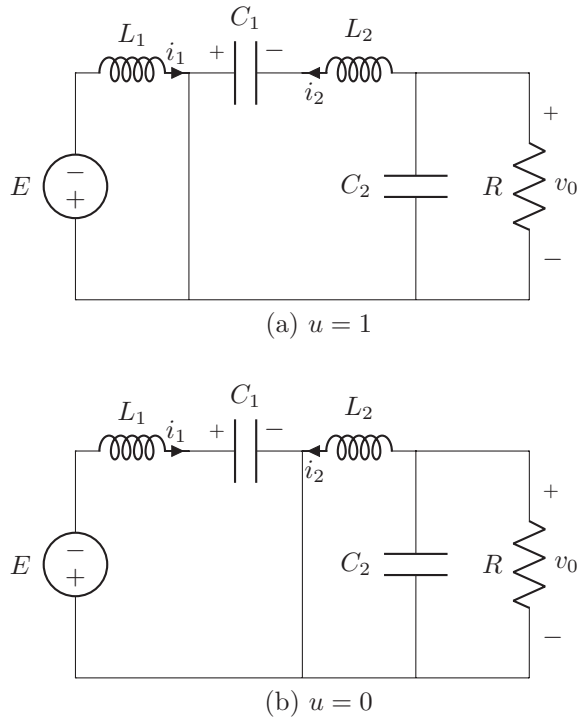


Figura 8.2: Circuitos equivalentes en el convertidor Ćuk (a) cuando está activo el transistor, $u = 1$ (b) cuando está inactivo, $u = 0$.

Modelo conmutado. Se puede obtener el modelo dinámico de ecuaciones diferenciales del convertidor Ćuk a partir de los dos circuitos anteriores usando la variable auxiliar u . Esta variable representa el proceso de activación del transistor ($u = 1$), Figura 8.2(a), o al apagar el transistor, representa la activación del diodo ($u = 0$). Usando las leyes de Kirchhoff para circuitos eléctricos se obtiene para el primer circuito lo siguiente (observe que, para simplificar la notación, no se expresa explícitamente la dependencia del tiempo de todas y cada una de las variables de tensión y corriente):

1. Posición $u = 1$ (transistor-on):

$$\begin{aligned} -E + v_{L_1} &= 0, \\ i_{L_2} + i_{C_1} &= 0, \\ v_{C_1} - v_{L_2} + v_{C_2} &= 0, \\ -v_{C_2} + R(-i_{L_2} - i_{C_2}) &= 0. \end{aligned}$$

2. Posición $u = 0$ (transistor-off):

$$\begin{aligned} -E + v_{L_1} + v_{C_1} &= 0, \\ i_{L_1} - i_{C_1} &= 0, \\ -v_{L_2} + v_{C_2} &= 0, \\ -v_{C_2} + R(-i_{L_2} - i_{C_2}) &= 0. \end{aligned}$$

Y combinándolas a través de u y $(1 - u)$, se tiene:

$$\begin{aligned} -E + v_{L_1} + v_{C_1}(1 - u) &= 0, \\ i_{L_1}(1 - u) - i_{C_1} - i_{L_2}u &= 0, \\ v_{C_1}u - v_{L_2} + v_{C_2} &= 0, \\ -v_{C_2} + R(-i_{L_2} - i_{C_2}) &= 0, \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} v_{L_1} &= L_1 \frac{di_{L_1}(t)}{dt} = -v_{C_1}(1 - u) + E, \\ i_{C_1} &= C_1 \frac{dv_{C_1}(t)}{dt} = i_{L_1}(1 - u) - i_{L_2}u, \\ v_{L_2} &= L_2 \frac{di_{L_2}(t)}{dt} = v_{C_1}u + v_{C_2}, \\ i_{C_2} &= C_2 \frac{dv_{C_2}(t)}{dt} = -i_{L_2} - \frac{v_{C_2}}{R}, \end{aligned} \tag{8.2.1}$$

donde los siguientes son parámetros asumidos hipotéticamente constantes, L_1, L_2 son las inductancias de las bobinas, C_1, C_2 las capacitancias de los condensadores, $E > 0$ es la fuente de tensión y R es la resistencia de carga a la salida del convertidor. Las variables de estado están dadas por las llamadas variables continuas, las corrientes i_{L_1}, i_{L_2} en los inductores y las tensiones v_{C_1}, v_{C_2} en los capacitores.

El sistema (8.2.1) representa el llamado modelo conmutado, donde $u \in \{0, 1\}$ posee solo dos valores. Las variaciones $u(t)$ de u en el tiempo entonces se pueden considerar equivalentes a las de la señal de modulación PWM de activación del transistor. Esta es una forma usual de controlar un convertidor CD a CD, de forma tal que se emplea una frecuencia de conmutación $f = 1/T$ constante. Esta señal depende del ciclo de trabajo $0 \leq \mu \leq 1$:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t_k \leq t < t_k + \mu T \text{ (transistor activo, on);} \\ 0, & \text{si } t_k + \mu T \leq t < t_{k+1} \text{ (transistor off),} \end{cases}$$

para el instante de conmutación $t_k = kT$, $k \in \mathbb{Z}_0^+$, donde $T = 1/f$ es el período de conmutación de la señal PWM.

En la práctica, para regular el convertidor Ćuk (8.2.1) se varía el valor del ciclo de trabajo μ de la política de conmutación PWM a lo largo del tiempo, es decir, nuestra señal de control estará dada por μ .

Modelo promediado. Al llevar la frecuencia de conmutación f a un valor suficientemente alto (generalmente superior a 20 kHz), el modelo anterior presenta una dinámica similar a la del siguiente modelo continuo, llamado modelo promedio:

$$\begin{aligned} L_1 \frac{di_1}{dt} &= -v_1(1 - \mu) + E, \\ L_2 \frac{di_2}{dt} &= v_1\mu + v_2, \\ C_1 \frac{dv_1}{dt} &= i_1(1 - \mu) - i_2\mu, \\ C_2 \frac{dv_2}{dt} &= -i_2 - \frac{v_2}{R}, \end{aligned} \tag{8.2.2}$$

donde hemos reordenado las ecuaciones y reemplazado la variable de conmutación u por el ciclo de trabajo μ (el cual corresponde al valor promedio de u), $0 \leq \mu \leq 1$, véase [16, 20]. Las variables i_1, i_2, v_1, v_2 corresponden, respectivamente, a los valores promedios de $i_{L_1}, i_{L_2}, v_{C_1}, v_{C_2}$. Una

explicación detallada de este proceso desde el punto de vista eléctrico se puede encontrar en [11, Sección 9.3].

Como veremos a continuación, la ventaja de emplear el modelo promedio es la de disponer de un modelo continuo al cual, por ejemplo, se le pueden calcular los puntos de equilibrio y, por ende, es susceptible de ser linealizado (el modelo (8.2.1) no tiene esta propiedad).

Para obtener un sistema autónomo (en lazo cerrado) añadimos la ecuación (8.1.1) en su forma diferencial:

$$\frac{d\mu}{dt} = -k_I(v_2 - V_{\text{ref}}), \quad (8.2.3)$$

donde k_I es un valor constante tomado como la ganancia del controlador y V_{ref} es el voltaje deseado o de referencia. Se considera que se mide el voltaje del capacitor de salida v_2 y se desea regular el sistema (8.2.2) mediante el ciclo de trabajo μ para que tal variable v_2 alcance el valor deseado $V_{\text{ref}} < 0$.⁷ Entonces, a partir de (8.2.2) y (8.2.3), resulta un sistema no lineal dinámico, continuo, de la forma:

$$\dot{x} = f(x), \quad (8.2.4)$$

donde $x = (i_1, i_2, v_1, v_2, \mu)'$ es un vector columna (el apóstrofe indica transposición). Se puede apreciar que cada uno de los términos del lado derecho de las ecuaciones diferenciales dadas en (8.2.2) y (8.2.3) es derivable y, por lo tanto, Lipchitz, por lo que aplican las condiciones de existencia y unicidad de las soluciones, véase, por ejemplo, [8].

Punto de equilibrio. Recordemos que un punto de equilibrio (también conocido como punto fijo o punto crítico) $(\bar{x}, \bar{\mu})$ es tal que, para el sistema $\dot{x} = f(x)$, la derivada $dx/dt = \dot{x} = f(\bar{x}) \equiv 0$ se hace cero. Bajo esta propiedad tal punto es una singularidad del espacio de fase de (8.2.4). Justo en tales puntos el campo vectorial, el cual determina la dirección de las trayectorias (únicas) del espacio de fase, es nulo ($dx/dt \equiv 0$).

En función de la constante $\bar{v}_2 = V_{\text{ref}}$, al hacer cero el lado derecho de (8.2.3), se obtiene el punto de equilibrio de (8.2.2) y (8.2.3) siguiente:

$$\bar{x} = \left(\frac{V_{\text{ref}}^2}{RE}, -\frac{V_{\text{ref}}}{R}, E - V_{\text{ref}}, V_{\text{ref}}, \frac{V_{\text{ref}}}{V_{\text{ref}} - E} \right)'$$

Dado que $\bar{v}_2 = V_{\text{ref}} = -\frac{\bar{\mu}E}{1-\bar{\mu}}$, también se puede expresar el punto de equilibrio en función del valor constante $\mu = \bar{\mu}$ del ciclo de trabajo, es decir:

$$\bar{x} = \left(\frac{\bar{\mu}^2 E}{R(1-\bar{\mu})^2}, \frac{\bar{\mu}E}{R(1-\bar{\mu})}, \frac{E}{1-\bar{\mu}}, -\frac{\bar{\mu}E}{1-\bar{\mu}}, \bar{\mu} \right)'$$

Polinomio característico del sistema. Tal punto será estable si toda trayectoria que comienza “cerca” de él se le aproxima al transcurrir el tiempo. Dicha estabilidad se puede verificar a partir de los autovalores (eigenvalores) del espacio tangente (visto como una transformación lineal) en una vecindad cercana del punto crítico. La linealización alrededor del punto de equilibrio \bar{x} es básicamente la expansión en serie de Taylor de primer orden de $\dot{x} = f(x)$ (véase [18, Sección. 2.6]):

$$\dot{x}_\delta = Ax_\delta, \quad (8.2.5)$$

donde $x_\delta = x - \bar{x}$,

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}} x_\delta$$

$$y f(x) \approx f(\bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x})(x - \bar{x}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x})(x - \bar{x}).$$

⁷El convertidor Cúk invierte el signo de la señal de entrada, por lo que dado que $E > 0$, necesariamente se tiene $V_{\text{ref}} < 0$.

La matriz A viene dada por⁸:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1-\bar{u}}{L_1} & 0 & \frac{E}{(1-\bar{u})L_1} \\ 0 & 0 & \frac{\bar{u}}{L_2} & \frac{1}{L_2} & \frac{E}{(1-\bar{u})L_2} \\ \frac{(1-\bar{u})}{C_1} & -\frac{\bar{u}}{C_1} & 0 & 0 & \frac{\bar{u}E}{RC_1(1-\bar{u})^2} \\ 0 & -\frac{1}{C_2} & 0 & -\frac{1}{RC_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_I & 0 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de A se pueden obtener del polinomio característico $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$, donde I es una matriz identidad de dimensión 5×5 . Además,

$$p(\lambda) = \lambda^5 + \frac{1}{RC_2}\lambda^4 + \left(\frac{C_2\bar{u}^2 + C_1}{C_1 C_2 L_2} + \frac{(1-\bar{u})^2}{C_1 L_1} \right) \lambda^3 + \left(\frac{\bar{u}^2}{C_1 C_2 L_2 R} + \frac{(1-\bar{u})^2}{C_1 C_2 L_1 R} + \frac{E k_I}{C_2 L_2 (1-\bar{u})} \right) \lambda^2 + \left(\frac{E k_I \bar{u}^2}{C_1 C_2 L_2 R (1-\bar{u})^2} + \frac{(1-\bar{u})^2}{C_1 C_2 L_1 L_2} \right) \lambda + \frac{E k_I}{C_1 C_2 L_1 L_2}. \quad (8.2.6)$$

Nos interesa determinar la estabilidad del sistema (8.2.5) a partir de este polinomio en función de k_I . Esto se puede hacer mediante varios procedimientos. El más común y simple es el del método de Routh-Hurwitz [17, Cap. 6], mediante el cual se genera una tabla (tabla o arreglo de Routh⁹) de la cual se estudia la primera columna. El criterio de Routh-Hurwitz indica que si los coeficientes de esa primera columna son positivos, el sistema (lineal) estudiado es estable. El polinomio anterior (8.2.6) se puede escribir de la forma $p(\lambda) = \lambda^5 + \alpha_1 \lambda^4 + \alpha_2 \lambda^3 + \alpha_3 \lambda^2 + \alpha_4 \lambda + \alpha_5$, por lo que el arreglo de Routh resulta en:

1	α ₂	α ₄
α ₁	α ₃	α ₅
$b_1 = \frac{\alpha_2 \alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_1}$	$b_2 = \frac{\alpha_4 \alpha_1 - \alpha_5}{\alpha_1}$	0
$c_1 = \frac{\alpha_3 b_1 - \alpha_1 b_2}{b_1}$	α ₅	0
$d_1 = \frac{b_2 c_1 - b_1 \alpha_5}{c_1}$		
α ₅		

Así, $\alpha_1 = \frac{1}{RC_2}$, $\alpha_5 = \frac{E k_I}{C_1 C_2 L_1 L_2}$, $b_1 = \frac{1 - (\bar{u} + C_2 ER k_I)}{C_2 L_2 (1 - \bar{u})}$; c_1 y d_1 se pueden representar como expresiones racionales que dependen de k_I : el numerador de c_1 es, por ejemplo, un polinomio de segundo orden en k_I . Por lo tanto, $\alpha_1 > 0$; $\alpha_5 = \frac{E k_I}{C_1 C_2 L_1 L_2} > 0$ implica $k_I > 0$; para que $b_1 > 0$, se debe cumplir que $C_2 ER k_I < 1 - \bar{u}$, por lo que no interesa saber cuando $C_2 ER k_I = 1 - \bar{u}$, esto es,

$$k_I < \frac{1 - \bar{u}}{C_2 ER}.$$

De tal manera que estos coeficientes definen los valores/intervalos de k_I para los cuales el sistema (8.2.5) es estable. Debido a lo largo de las expresiones resultantes, consideraremos el siguiente conjunto de parámetros, mostrados en el Cuadro 8.1, utilizados en nuestro aparataje experimental más adelante, ver Sección 8.5.

⁸Por conveniencia la hemos escrito en función de \bar{u} , pero es posible expresarla en función de V_{ref} , usando $\bar{u} = V_{\text{ref}}/(V_{\text{ref}} - E)$.

⁹John E. Routh presentó *A Treatise on the Stability of a Given State of Motion* en 1877 para optar al premio Adams, de la Universidad de Oxford, el cual ganó, entre otros resultados, con este criterio para polinomios de orden mayor a cinco.

Variable	Variable numérico
L_1, L_2	300 μH
C_1, C_2	10 μF
R	48 Ω
E	12 V
V_{ref}	-16 V
$\bar{u} = \frac{V_{\text{ref}}}{V_{\text{ref}} - E}$	0.57143...

Cuadro 8.1: Valores de los parámetros del convertidor Ćuk.

Al hacer esto, obtenemos los siguientes intervalos:

$$\begin{aligned} k_I &> 0 \\ k_I &< 74.40476 \dots \\ -20.959 \dots &< k_I < 89.957 \dots \\ k_I &< 13.093 \dots \end{aligned}$$

Por lo que el sistema es estable para $0 < k_I < 13.0939889 \dots$

Como veremos a continuación, nuestro interés es encontrar los valores de k_I para los cuales se consiguen autovalores complejos conjugados puros. Esto se puede hacer al igualar $d_1 \equiv 0$, lo cual resulta en tres raíces del numerador de d_1 que arrojan los siguientes valores numéricos para k_I : 13.09398890520492, 94.7863932279806, 2049.077907132887. Al verificar los autovalores para los primeras dos valores de k_I se obtiene:

- Para $k_I = 13.09398890520492$,
 $\lambda_i \in \{-849.26045, -639.19956 \pm 21376.61765i, \pm 6702.785244662052i\}$.
- Para $k_I = 94.7863932279806$,
 $\lambda_i \in \{-4649.42629, 1260.88336 \pm 7621.89366i, \pm 21341.11148i\}$.

Es decir, éstos son los valores para los cuales el sistema (8.2.5) presenta raíces/autovalores críticamente estables, en particular para $k_I = 13.09398890520492$. Esto se puede apreciar numéricamente también en GNU Octave usando el comando `rlocus` del paquete `control` de GNU Octave¹⁰, el cual genera el lugar geométrico de las raíces ante variaciones de la ganancia k_I . En la Figura 8.3 se puede apreciar que los valores mostrados usando el comando `rlocus` coinciden con los valores calculados previamente. Se aprecia también la dependencia continua de los autovalores del sistema en lazo cerrado respecto a las variaciones del parámetro k_I . Solamente un par de polos son complejos imaginarios puros al llegar al valor de $k_I \approx 13.094$, lo cual permite emplear el teorema de bifurcación de Hopf.

8.3. Uso del teorema de bifurcación de Hopf

La distancia $d(A, B)$ de A a B entre dos conjuntos A, B no vacíos, cerrados, disjuntos, está dada por:

$$d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} |x - y|,$$

donde $|x|$ es la norma euclidiana del punto/vector x . La siguiente definición es extraída de [18, pág. 202].

¹⁰<http://octave.org>

Marsden y McCracken [14]. Otro texto interesante es el de Kuznetsov [12], el cual incluye también el llamado primer coeficiente de Lyapunov o coeficiente de curvatura (véase, por ejemplo, [15]). Hay varias versiones del teorema de bifurcación de Eberhard Hopf escrito originalmente en alemán¹² en 1942.

Consideremos un sistema expresado en la forma

$$\dot{x} = F(x, k) \quad (8.3.2)$$

el cual depende de un parámetro $k \in \mathbb{R}$. Sin pérdida de generalidad se puede asumir que $\bar{x} \equiv 0$ es un punto de equilibrio de (8.3.2), tal que $F(0, k) \equiv 0$. Se asume que la matriz $F_x(0, k) = \partial F / \partial x|_{\bar{x}}$ posee dos autovalores complejos conjugados $\alpha(k) \pm \beta(k)i$, tales que para un cierto valor de k , digamos $k = 0$, $\alpha(0) \equiv 0$ (ésta es la llamada condición de bifurcación), es decir, se convierten en autovalores imaginarios puros $\pm\beta(0)i$. Adicionalmente se debe cumplir que $\alpha'(0) \neq 0$ (condición de transversalidad, garantiza que el problema no sea degenerado). Bajo estas condiciones k se convierte en un *parámetro de bifurcación* por la generación de un cambio en la estabilidad del sistema: la parte real de los autovalores estudiados, $\alpha(k)$, originalmente menor que cero, se hará cero, $\alpha(k) \equiv 0$ (autovalores $\pm\beta(0)i$) y luego mayor que cero ($\alpha(k) > 0$, inestable). En tal transición ocurre la llamada bifurcación de Hopf.

Teorema 8.3.1 (Teorema de Hopf) *Bajo las condiciones mencionadas anteriormente, es decir, la matriz $F_x(0, k) = \partial F / \partial x|_{\bar{x}}$ posee dos autovalores complejos conjugados $\lambda(k) \in \alpha(k) \pm \beta(k)i$, tales que para $k = 0$ se obtienen dos autovalores complejos conjugados puros $\lambda(0) \in \pm\beta(0)i$ y se cumple que $\alpha'(0) \neq 0$, existen funciones continuas $k = k(\epsilon)$ y $T = T(\epsilon)$, dependientes del parámetro ϵ con $k(0) = 0$ y $T(0) = 2\pi\beta(0)^{-1}$ tales que existen soluciones periódicas no constantes $x(t, \epsilon)$ de (8.3.2) con período $T(\epsilon)$ las cuales colapsan en el origen a medida que $\epsilon \rightarrow 0$.*

Se hace necesario que solo se presenten dos autovalores complejos conjugados $\pm\beta i$ y que los demás autovalores tengan parte real diferente de cero para aplicar directamente el teorema de la variedad central (*center manifold theorem* en inglés), [4]. De esta forma se puede estudiar el sistema no lineal mediante el estudio de la forma normal asociada.

La idea general del TBH es predecir la existencia de (auto-)oscilaciones para valores antes o después de $k = 0$. Para valores de $k > 0$ en los que el punto de equilibrio es inestable y la oscilación generada es estable (las trayectorias se acercan a la oscilación), se llama caso supercrítico u oscilación supercrítica. El caso en que para $k < 0$ se genera una oscilación inestable (trayectorias que nacen en posiciones cercanas a la oscilación se alejan/son repelidas de ella), se llama caso subcrítico. Para poder saber si la oscilación resultante es estable, una característica muy apreciada desde el punto de vista de control de sistemas físicos reales, se requiere calcular el coeficiente de curvatura [15] o primer coeficiente de Lyapunov [12].

El sistema no lineal (8.2.2)–(8.2.3) presenta las condiciones indicadas en el TBH al variar k_I : en $k_I \cong 13.094$ se obtienen dos raíces complejas puras, es decir, se verifica en ese valor que $\alpha(k_I) \equiv 0$ (condición de bifurcación) y se aprecia que los otros autovalores λ_i de (8.2.5) cumplen $\text{Re}(\lambda_i) \neq 0$. La variación de $\alpha(k_I)$ versus k_I se muestra numéricamente en la siguiente gráfica, Figura 8.4. Evidentemente, se cumple la condición de transversalidad

$$\frac{\partial \alpha(k_I)}{\partial k_I} \neq 0,$$

es decir, la pendiente al cruzar el eje imaginario, en $\alpha(k_I = 13.09\dots) \equiv 0$, es diferente de cero.

La condición de transversalidad también se aprecia en la Figura 8.3, las raíces de (8.2.6) cruzan “transversalmente” el eje imaginario y $\alpha(k_I)$ cambia de signo.

¹²Una versión en inglés del original se puede encontrar con un apéndice (Section 5) de [14], disponible adicionalmente en Internet: <https://authors.library.caltech.edu/25053/18/Hopfch5-5A.pdf>.

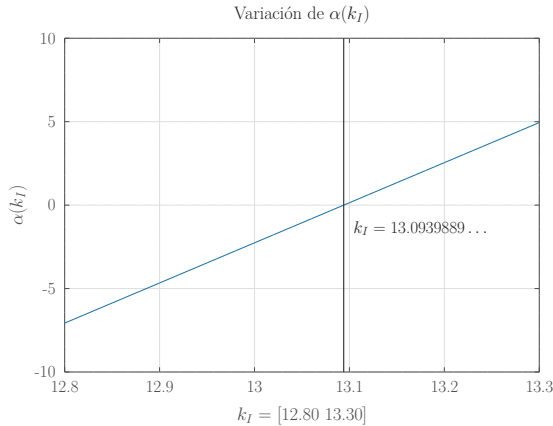


Figura 8.4: Variación de $\alpha(k_I)$ para el convertidor Ćuk linealizado alrededor del punto de equilibrio parametrizado respecto a $V_{\text{ref}} = -16$ V, alrededor del valor $k_I = 13.093\dots$ (donde $d_1 \equiv 0$).

Comentario 1 Se puede comprobar también este resultado de existencia de un par de autovalores imaginarios puros de los resultados de [9, Tabla I] para un polinomio de 5° grado. El resultante de Sylvester \mathcal{R}_S de $r_e(z) = \alpha_5 + \alpha_3 z + \alpha_1 z^2$ y $r_o = \alpha_4 + \alpha_2 z + z^2$ debe ser cero:

$$\mathcal{R}_S = (\alpha_3 - \alpha_2 \alpha_1)(\alpha_4 \alpha_3 - \alpha_5 \alpha_2) + \alpha_4 \alpha_1 (\alpha_4 \alpha_1 - 2\alpha_5) + \alpha_5 \alpha_5 \equiv 0$$

(éste es de hecho el numerador del término d_1 en el arreglo de Routh) y se puede verificar que el producto de los determinantes de las submatrices relevantes de Sylvester \mathcal{S}_0 y \mathcal{S}_0 , es mayor que cero:

$$(\alpha_3 - \alpha_2 \alpha_1)(\alpha_5 - \alpha_4 \alpha_1) > 0 .$$

Esto se puede verificar para las dos primeras raíces del resultante: $k_I = 13.093\dots$ y $k_I = 94.786\dots$

8.4. Simulación numérica en PSIM

Se realizó una simulación numérica del funcionamiento del convertidor de potencia Ćuk usando el programa PSIM. PSIM¹³ es un paquete de simulación específicamente diseñado para electrónica de potencia, accionadores de motores (*motor drives*) y sistemas de conversión de potencia [19].

El convertidor Ćuk, Figura 8.1, incluyendo la ecuación del controlador integral (8.2.3), se construyó vía software usando los elementos de PSIM, tal y como se muestra en la Figura 8.5.

Para la ley de control se resta la salida del convertidor, la tensión VC2 del segundo capacitor, del valor V_{ref} (Vd marcado en el diagrama). Se multiplica esta diferencia por la ganancia k_I , marcada K en el digrama, y finalmente se integra. El valor de salida U (el ciclo de trabajo) se usa como entrada al modulador PWM con 100 kHz (100e3 en el diagrama). La salida del modulador PWM permite controlar el estado de activación del transistor. Los valores indicados en el diagrama son los mismos del Cuadro 8.1.

En la Figura 8.6 se muestra una simulación de PSIM para un valor de $k_I = 6.5$. La gráfica ilustra los resultados obtenidos en PSIM, considerando el período transitorio (antes de que

¹³PSIM® es una marca registrada de Powersim Inc.

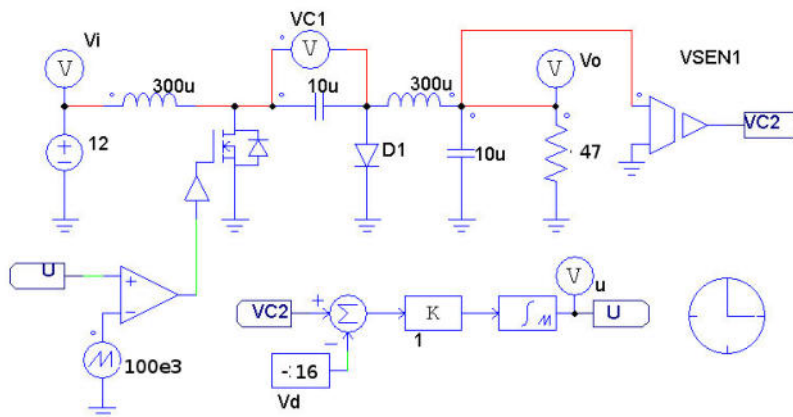


Figura 8.5: Diagrama esquemático del convertidor Ćuk en PSIM. Se pueden apreciar en la parte inferior tanto la frecuencia de conmutación, 100 kHz, como los bloques correspondientes a la política de control usada.

las trayectorias se estabilicen) y la respuesta dinámica del sistema, la cual efectivamente se estabiliza alrededor del valor deseado $V_{\text{ref}} = -16$ V; se muestra adicionalmente un detalle de la simulación ciclo por ciclo: se observa la onda característica de la corriente en el inductor i_2 debida a la conmutación en el transistor. El sistema en lazo cerrado aproximadamente en $t = 20$ ms.

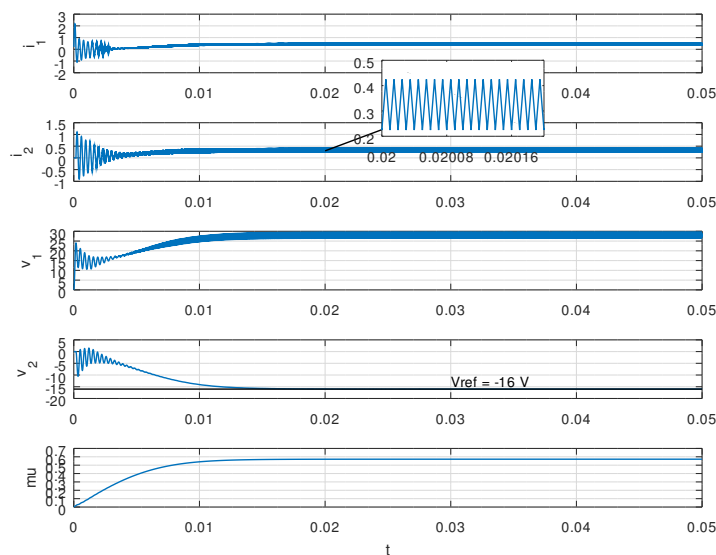


Figura 8.6: Simulación ciclo por ciclo en un convertidor de potencia CD/CD del tipo Ćuk controlado en lazo cerrado para un valor de ganancia $k_I = 6.5$. Se muestran las corrientes i_1 e i_2 , las tensiones v_1 , $v_o = v_2$ y el ciclo de trabajo μ del modulador PWM. Se puede apreciar un detalle de la simulación ciclo por ciclo para la corriente i_2 .

Se realizaron varias simulaciones para diferentes valores de k_I , desde $k_I = 12.5$ hasta $k_I = 155$. Los valores mostrados son tales que el ciclo de trabajo μ se mantuvo en el rango $0 < \mu < 1$ en todos los casos. A continuación se muestra una selección de las dinámicas que hemos podido observar.

Auto-oscilaciones basadas en el TBH. Para un valor de $k_I = 13.5$, por ejemplo, se obtuvo la simulación ciclo por ciclo mostrada en la Figura 8.7. El lector podrá observar que la simulación no muestra la respuesta transitoria (inicial) del sistema. La oscilación resultante es de tipo sinusoidal, ver Figura 8.7(b). Recordemos que para $k_I = 13.09398890520492$, $\beta(k_I) = \pm 6702.785244662052i$. El período predicho por el TBH es de $T = 2\pi/\beta \approx 2\pi/6702 \approx 0.000937$ s, es decir, una frecuencia de oscilación $f = 1066.7$ Hz. Como se observa en la simulación, la órbita se estabiliza a una frecuencia cercana a 1060 Hz, tal y como lo determina su espectro, obtenido usando la FFT (transformada rápida de Fourier), el cual se muestra parcialmente en la Figura 8.7(d).¹⁴ Así el período de la señal obtenida coincide aproximadamente con su valor predicho.

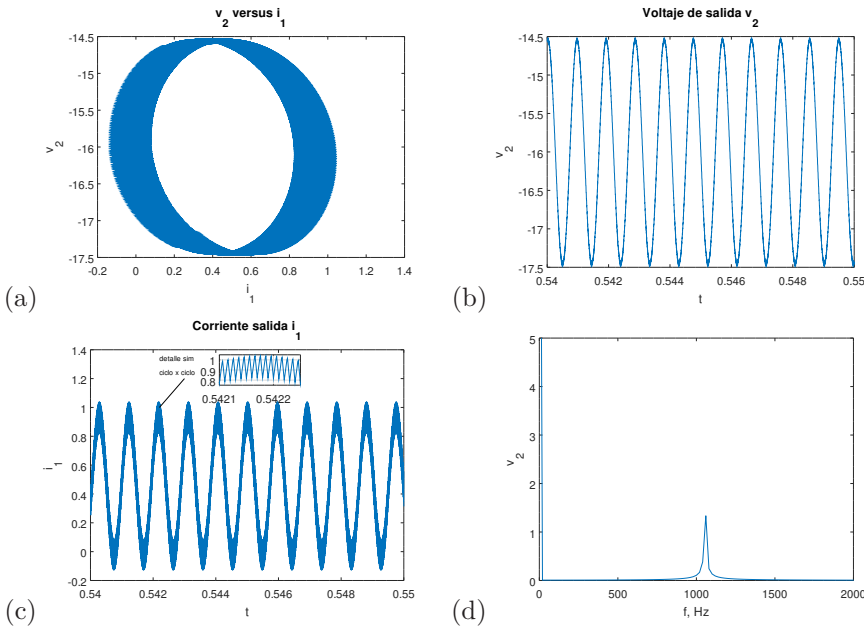


Figura 8.7: Simulación en PSIM para $k_I = 13.5$: (a) Tensión de salida v_2 vs. corriente i_1 ; (b) Tensión de salida v_2 . (c) Corriente de entrada i_1 (inductor L_1). Se muestra el detalle de la simulación ciclo por ciclo (al incluir las conmutaciones). (d) Espectro (detalle) obtenido para la tensión de salida v_2 al emplear $k_I = 13.5$. Se muestra que la frecuencia de la oscilación es de 1060 Hz.

Cuadro 8.2: Amplitudes $v_o - V_{\text{ref}} = v_2 - V_{\text{ref}}$, en voltios, de respuesta de la señal de salida simuladas numéricamente en PSIM para diferentes valores de k_I .

k_I	12.5	13.15	13.16	13.17	13.18	13.19	13.2	13.5	15
$v_2 - V_{\text{ref}}$ (V)	0	0.04	0.06	0.1	0.2	0.5	1	1.45	1.5

¹⁴La FFT completa muestra también la frecuencia de conmutación, 100 kHz.

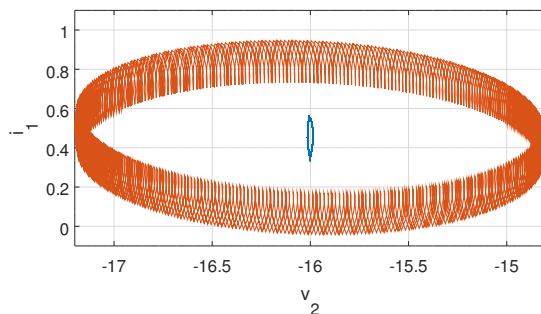


Figura 8.8: Comparativa del tamaño de las oscilaciones para $k_I = 12.50$ (gráfica interna, al centro) con respecto a la que se obtiene usando $k_I = 13.2$.

En el Cuadro 8.2 se muestran las amplitudes que se obtuvieron para las oscilaciones de la señal $v_2 = v_o$ para valores entre $k_I = 12.5$ y $k_I = 13.2$. La amplitud de la oscilación para $k_I = 12.50$ es muy pequeña, comparada con la amplitud que se obtiene usando $k_I = 13.2$ como se ilustra en la Figura 8.8.

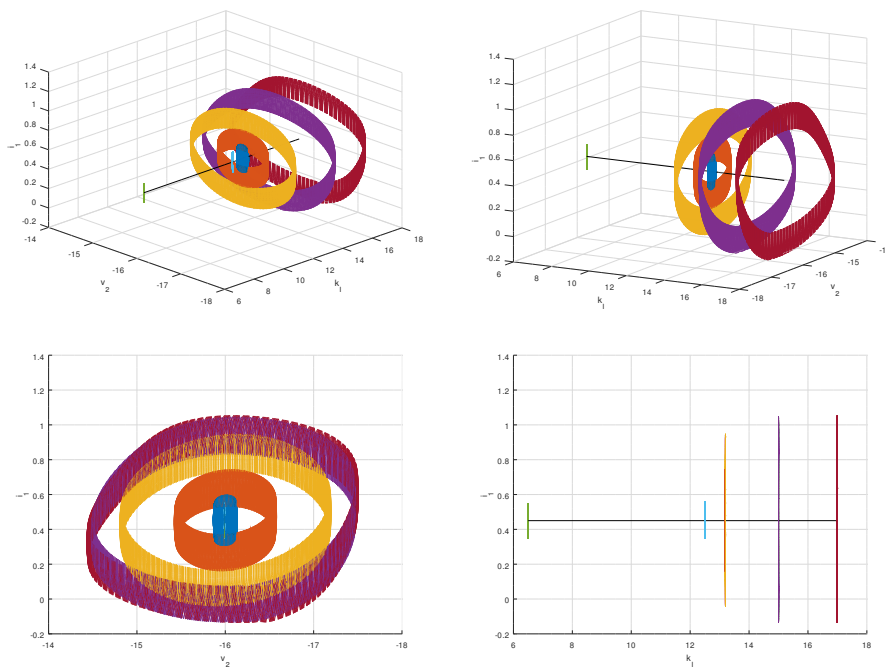


Figura 8.9: Diagrama de bifurcación en función del parámetro k_I . Se muestran la tensión v_2 versus la corriente i_1 .

De esta forma, hemos obtenido una oscilación supercrítica (punto de equilibrio inestable, oscilación asintóticamente estable), por lo tanto se obtiene en primera instancia un diagrama de bifurcación semejante al mostrado en la Figura 8.9. Como fue indicado en el cuadro anterior, se puede apreciar que alrededor de $k_I = 13,19$ hay efectivamente un crecimiento rápido de la amplitud de la oscilación generada por el parámetro k_I .

Otros comportamientos. Las simulaciones numéricas nos muestran otros comportamientos interesantes a estudiar. El sistema (8.2.2) y (8.2.3), al igual que el caso del sistema de Lorenz, el divergente del campo vectorial es negativo, esto es $\nabla \cdot f(x) = -\frac{1}{R}$, por lo que se puede probar que cualquier volumen en el espacio de fase se comprime exponencialmente, ver, por ejemplo, [21, Sección 9.2], que todas las trayectorias eventualmente evolucionan a un conjunto de volumen cero. Esta contracción del volumen impone restricciones severas en la dinámica del convertidor Ćuk con control integral. Aquí se muestra una pequeña galería de los posibles comportamientos.

Para los valores $k_I \in \{65, 90, 117, 155\}$ se obtienen las gráficas mostradas en la Figura 8.10. Todos estos comportamientos anteriores parecieran en la vista mostrada una especie de “armazones de sillones”, cada uno más artístico que el anterior. Hay comportamientos intermedios que se pueden presentar. En la Figura 8.11 se muestra una señal de doble ciclo (*period doubling* en inglés) para $k_I = 82.5$.

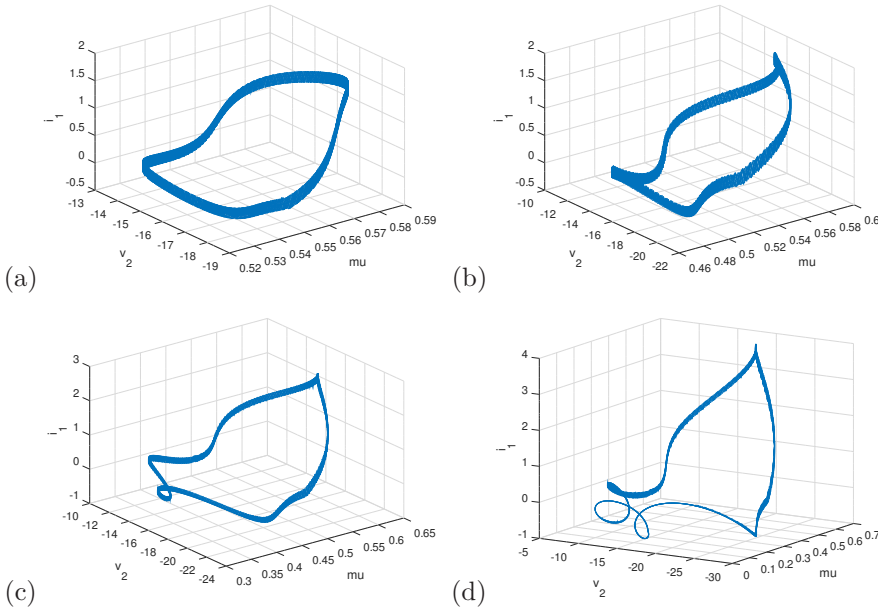


Figura 8.10: Galería de comportamientos del convertidor Ćuk con control integral para diferentes valores de k_I , (a) $k_I = 65$, (b) $k_I = 90$, (c) $k_I = 117$, (d) $k_I = 155$. Las tres coordenadas que se muestran son el ciclo de trabajo μ , la tensión del capacitor de salida v_2 y la corriente en el primer inductor i_1 .

Trayectoria caótica. En todos los casos anteriores el espectro obtenido está bien definido. A continuación presentamos un caso obtenido por simulación numérica en el cual el sistema en el largo plazo no es periódico y su espectro no está bien definido, lo que constituye básicamente un indicativo de caos determinista. En nuestro estudio conseguimos que esta situación se presenta en varias oportunidades, por ejemplo, para el rango $k_I = [11, 12.5]$. Para $k_I = 153$ el

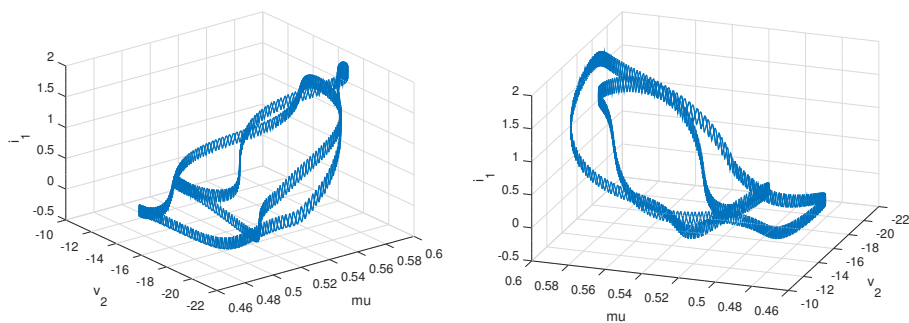


Figura 8.11: Señal de doble período (también llamada de dos ciclos) obtenida para $k_I = 82.5$.

sistema presenta el espectro mostrado en la Figura 8.12. Como hemos apuntado, el espectro está difuminado sobre un rango de frecuencias entre 0 y 5000 Hz. Esto nos da un excelente indicio de la existencia de trayectorias no periódicas de tipo caótico.

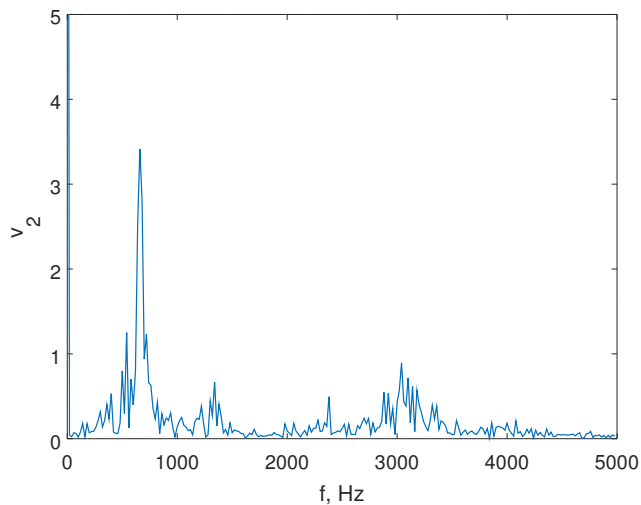


Figura 8.12: Espectro de la tensión v_2 para el caso $k_I = 153$.

La Figura 8.13 muestra el comportamiento de las trayectorias en el tiempo para el valor $k_I = 153$. Siguiendo con la analogía a los armazones, este sería el “relleno interior del sillón (tipo Puff)”. La Figura 8.13(c) muestra adecuadamente que el valor del ciclo de trabajo μ está acotado entre 0 y 1. En el resto de las gráficas se aprecia la pequeña oscilación de la corriente debida a la frecuencia del PWM.

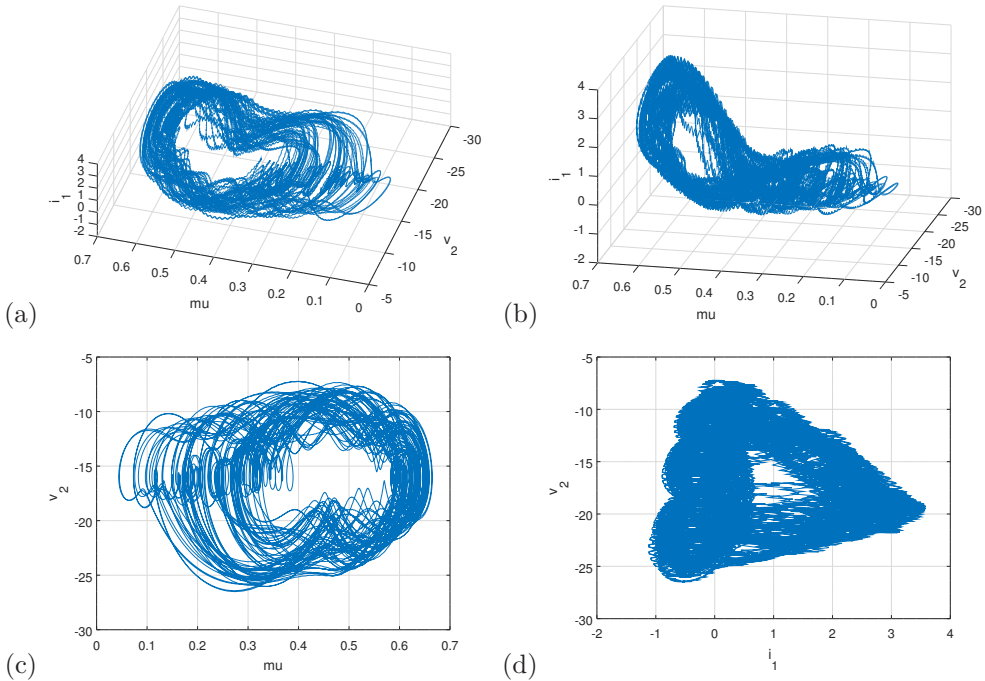


Figura 8.13: Diversas vistas del comportamiento del sistema en lazo cerrado, obtenido para el valor $k_I = 153$. Se muestran esencialmente tres variables: μ , i_1 y v_2 .

8.5. Resultados experimentales: oscilaciones, explosiones tipo “canards” e histéresis

El circuito Ćuk se diseñó con las bobinas y capacitores cuyos valores mostrados en el Cuadro 8.1. El convertidor implementado físicamente se muestra en la Figura 8.14. Se describen sus componentes principales y las localizaciones de los puntos de medición. Aunque se puede medir la tensión $v_1 = v_{C_1}$, solo se dispuso en nuestro caso de la tensión v_2 y de la corriente i_1 , empleadas anteriormente.

El código que se programa en la tarjeta DSP TMS320F28335, se genera a partir de un diseño similar al mostrado en la Figura 8.5 con módulos de configuración y periféricos adicionales, ver Figura 8.15. El código en lenguaje C se genera utilizando PSIM y es programado en la tarjeta DSP con la herramienta Code Composer Studio. El código diseñado establece la frecuencia de reloj del DSP a 150 MHz. La frecuencia de adquisición de datos del ADC se configura a 20 kHz, velocidad a la que se mide la salida $v_o = v_2$. La señal de control μ (Uav en el diagrama) utiliza un módulo PWM (1-ph PWM) a una frecuencia de 100 kHz. Tanto la entrada del ADC como la salida del módulo PWM tienen un rango de 0 a 3.3 V. Por lo tanto, es necesario por un lado escalar el voltaje que entra al ADC (la K en el camino de medición del voltaje Vc del capacitor 2) y, por otro lado, un optoacoplador PC923 a la salida PWM para activar adecuadamente el transistor MOSFET FQA40N25.

Adicionalmente, se agregan al programa diseñado en PSIM, módulos SCI (por sus siglas en inglés *Serial Communication Interface*) para establecer el voltaje de referencia V_{ref} y la ganancia de integración k_I , lo anterior permite que se ajusten estos valores en línea, mientras se ejecuta

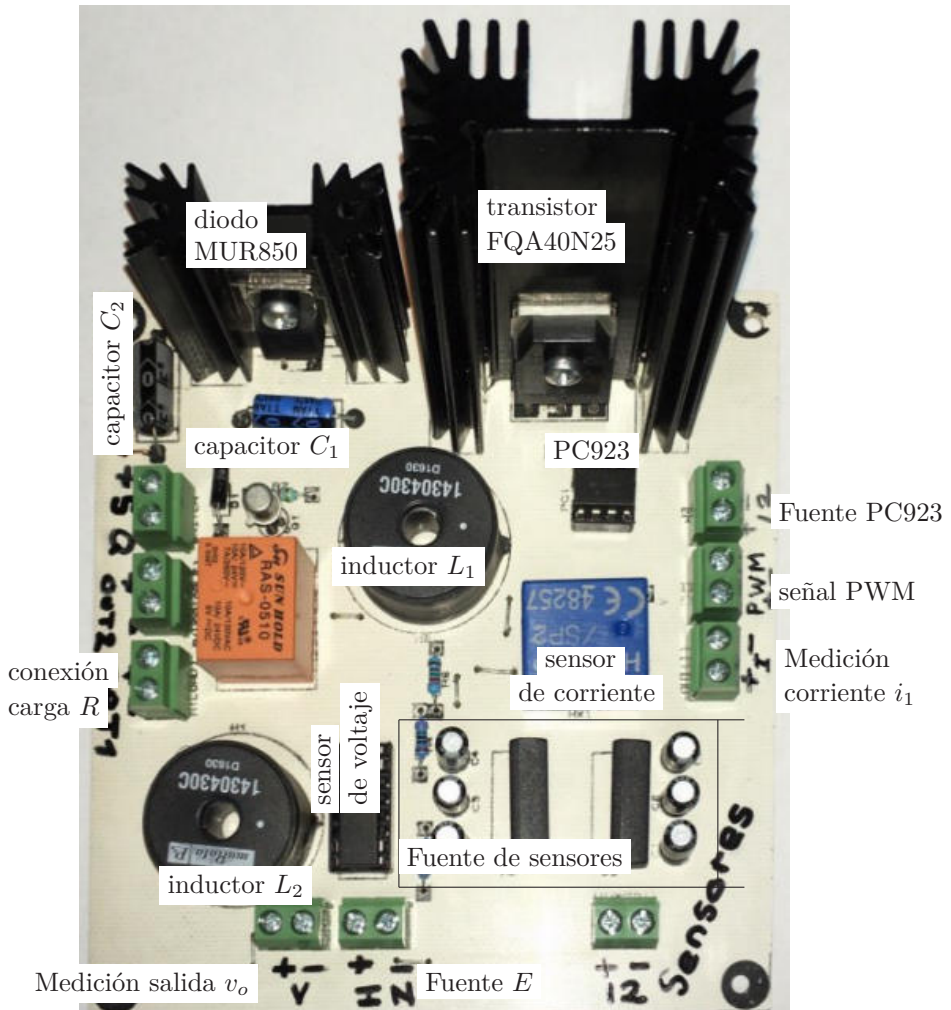


Figura 8.14: Placa del circuito convertidor de potencia CD/CD del tipo $\dot{C}uk$, se indican los componentes utilizados. El resto de los componentes corresponden a alimentaciones para funcionamiento del transistor (driver) y aislamiento para las mediciones.

el programa en la tarjeta DSP. Este ajuste en línea y en tiempo real, el cual permitió descubrir la histéresis que se muestra más adelante, se realiza usando la herramienta DSP Oscilloscope de PSIM. Las señales de salida en la tarjeta del convertidor (salida $v_o = v_2$, corriente i_1) son tensiones que se miden directamente en el osciloscopio Tektronix Serie MSO3000. La frecuencia de muestreo de este osciloscopio es de 50 k muestras/s (50 kHz). Para los casos mostrados se tomaron 100000 muestras (durante 2 segundos).

En los experimentos realizados el comportamiento cualitativo es equivalente al comporta-

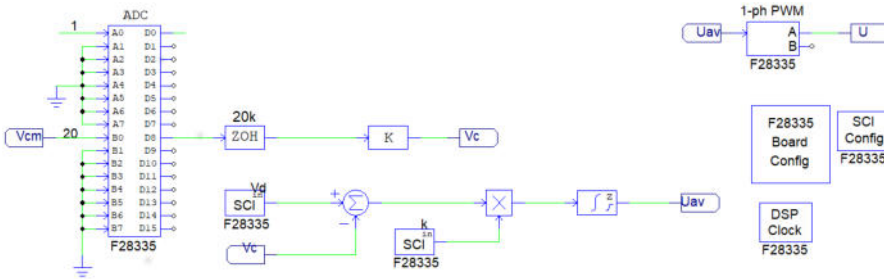


Figura 8.15: Esquema para la generación de código de la ley de control en la tarjeta DSP TMS320 F28335 usando PSIM. El control se ejecuta a una frecuencia de muestreo de 20 kHz de la señal medida.

miento obtenido en simulación para valores pequeños de k_I : primeramente, se tiene un punto de equilibrio ($k_I < 10$), luego oscilaciones de pequeña amplitud ($10 \leq k_I < 90$), las oscilaciones crecen rápidamente en un pequeño intervalo ($93 \leq k_I < 95$). Se puede apreciar que las ganancias k_I del controlador cambian respecto a los obtenidos en la simulación en PSIM, conservándose cualitativamente los comportamientos predichos. Por ejemplo, se obtiene una oscilación de una amplitud imperceptible a la vista desde $k_I = 10$ hasta $k_I = 90$, la amplitud es de 0.04 % (7 mV) del valor de la señal en estado estable ($-16,000 \pm 0,007$ V), lo cual puede considerarse un error de medición en la práctica (interesante apuntar que la frecuencia es de 1100 Hz, cercana a la predicha). En la Figura 8.16 se muestran las capturas en de pantalla de osciloscopio para los valores $k_I \in \{90, 93, 95\}$.

En $k_I = 93$ se aprecia un aumento significativo de la amplitud de la oscilación en el convertidor real. Efectivamente, para este valor, la oscilación tiene una frecuencia de aproximadamente $f = 1096.5$ Hz. La Figura 8.17 muestra la respuesta del sistema para $k_I = 93$. Al procesar los datos medidos de $v_2(t)$ mediante la `fft` en GNU Octave se aprecia la frecuencia obtenida y su amplitud. También se aprecia el valor absoluto promedio (componente CD del espectro en $f = 0$ Hz) de la señal, -16 V.

Al realizar este proceso de variación de k_I para conseguir las oscilaciones predichas por el TBH se apreciaron diversos fenómenos. En algunos casos, la oscilación aparecía en $k_I = 93$, pero, trabajando de manera continuada en el experimento, el valor de aparición podía variar hasta $k_I = 94$ o hasta $k_I = 96$. Suponemos que esto fue debido al calentamiento de la resistencia de carga R . Debido a la variación en línea que se realizó, encontramos otro fenómeno al disminuir el valor de k_I cuando la oscilación ya estaba presente: una histéresis. La aparición y desaparición de las oscilaciones ocurrieron en valores diferentes al subir $k_I \uparrow$ que al bajar $k_I \downarrow$. En uno de los casos, la oscilación no se presenta sino hasta $k_I = 95$, Figura 8.18, en el sentido $k_I \uparrow$, luego esta oscilación se mantenía en el sentido $k_I \uparrow$ hasta valores de $k_I = 92.5$. De hecho, para los valores extremos de la histéresis las órbitas no están bien definidas, como se pudo apreciar en el osciloscopio, ver Figura 8.19. Dependiendo del sentido de variación para el mismo valor del parámetro (por ejemplo, $k_I = 94$), se pueden presentar dos comportamientos de diferentes magnitudes.

Al observar este fenómeno, es posible apreciar una situación parecida a la de las explosiones tipo “canards” [3]: en ciertos valores del parámetro k_I : muy pequeñas variaciones de dicho parámetro generan cambios abruptos del tamaño de la amplitud (un fenómeno similar se observó durante la simulación en PSIM entre $k_I \in \{3.17, 3.20\}$).

Se pueden apreciar otros tipos de comportamientos diferentes a las órbitas de tipo sinusoidal. En la Figura 8.20 se muestra el comportamientos v_2 versus i_1 obtenidos en el laboratorio para el valor $k_I = 200$.

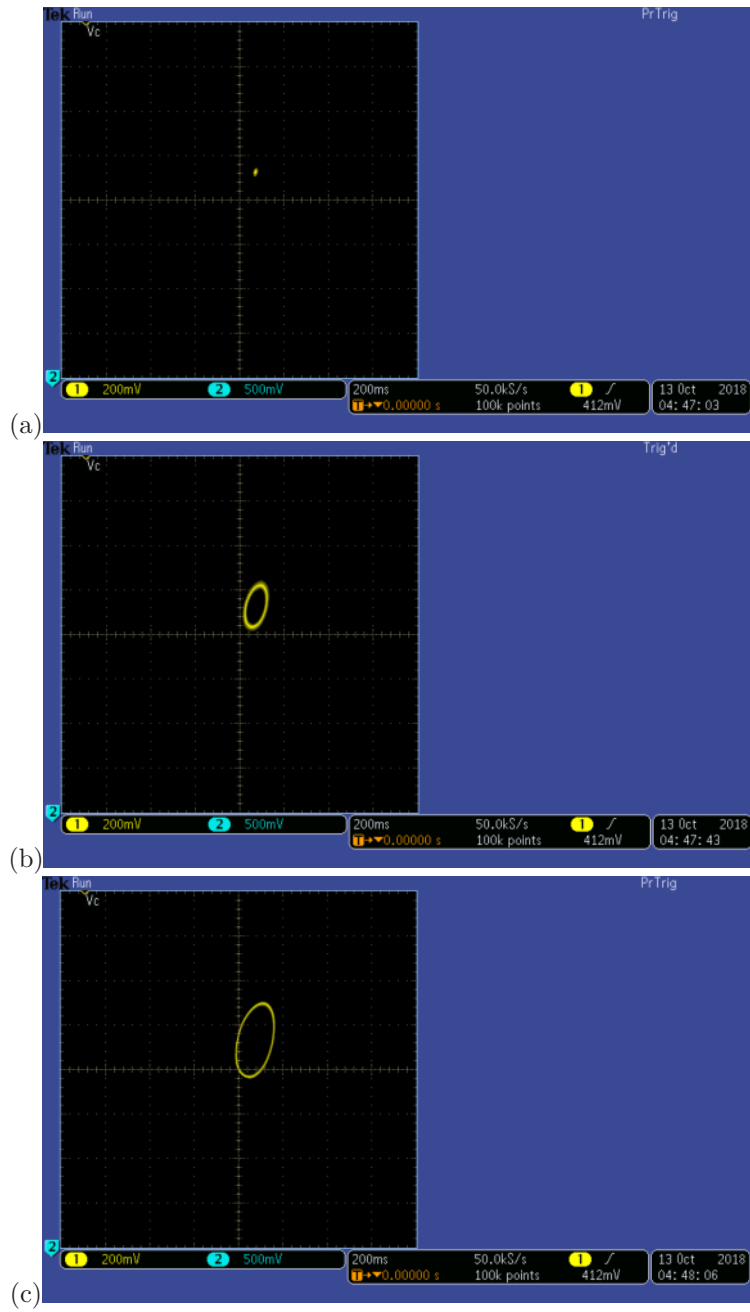


Figura 8.16: Capturas de pantalla del osciloscopio para (a) $k_I = 90$, (b) $k_I = 93$, (c) $k_I = 95$. Las oscilaciones mostradas son de tipo sinusoidal.

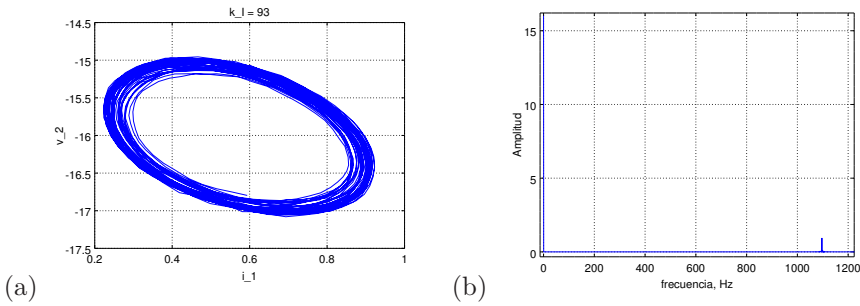


Figura 8.17: Respuesta del convertidor Ćuk en lazo cerrado para $k_I = 93$. (a) Diagrama de fase v_2 vs i_1 ; (b) Espectro de frecuencia de $v_2(t)$.

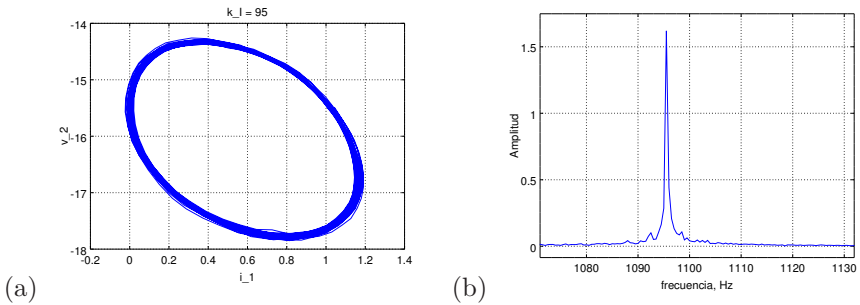


Figura 8.18: Respuesta del convertidor Ćuk en lazo cerrado para $k_I = 95$. (a) Diagrama de fase v_2 vs i_1 ; (b) Espectro de frecuencia de $v_2(t)$.

8.6. A manera de conclusión

El circuito empleado en este trabajo, el convertidor CD/CD de tipo Ćuk, ha sido intensamente estudiado desde el punto de vista matemático como experimentalmente, y desde el punto de vista de teoría de control constituye un ejemplo no trivial en una amplia literatura. En este trabajo se pudo verificar analíticamente, por simulación numérica y experimentalmente las condiciones para la aparición de una bifurcación de Hopf cuando el sistema es controlado usando un simple integrador del error del voltaje de salida v_2 respecto al valor deseado V_{ref} .

Este trabajo está en desarrollo, hay elementos que nos parece interesante estudiar desde el punto de vista matemático y que, según nuestro conocimiento, no han sido estudiados previamente y constituyen elementos de investigación en sistemas dinámicos, entre ellos: el cálculo del primer coeficiente de Lyapunov o coeficiente de curvatura; el fenómeno de “canards” en este contexto de convertidores de potencia; los exponentes de Lyapunov para la detección de fenómenos caóticos.

Desde el punto de vista de control, verificar la aparente estabilidad global (al menos estabilidad a un conjunto acotado, como en el caso del atractor de Lorenz), abre nuevas posibilidades no consideradas hasta ahora en el control de este tipo de dispositivos debido a la extrema simplicidad del control integral, el cual además de ser robusto respecto a variaciones en E y R [13] tiene la ventaja de tener un solo parámetro.

Bibliografía

- [1] A. E. Aroudi, E. Rodríguez, R. Leyva, and E. Alarcón. **A design-oriented combined approach for bifurcation prediction in switched-mode power converters.** *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 57(3):218–222, 2010.
- [2] S. Banerjee and G. Verghese. *Nonlinear Phenomena in Power Electronics: Bifurcations, Chaos, Control, and Applications.* Wiley, 2001.
- [3] E. Benoit, J. Callot, F. Diener, and M. Diener. **Chasse au canard.** *Collectanea Mathematica*, 31-32(1-3):39–119, 1981.
- [4] J. Carr. **Applications of Centre Manifold Theory.** volume 35 of *Applied Mathematical Sciences.* Springer Verlag, New York. 1981.
- [5] S. Čuk. **General topological properties of switching structures.** *1979 IEEE Power Electronics Specialists Conference*, 109–130, 1979.
- [6] S. Čuk and R. D. Middlebrook. **Advances in switched-mode power conversion part i.** *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, IE-30(1):10–19, 1983.
- [7] C. W. Deisch. **Simple switching control method changes power converter into a current source.** *IEEE Power Electronics Specialists Conference, PESC 1978*, pages 300–306, 1978.
- [8] E. A. Coddington and N. Levinson. *Theory of Ordinary Differential Equations.* McGraw-Hill, 1987.
- [9] J. Guckenheimer, M. Myers and B. Sturmfels. **Computing hopf bifurcations i.** *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 34, 1997.
- [10] D. C. Hamill and D. J. Jeffries. **Subharmonics and chaos in a controlled switched-mode power converter.** *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 35(8):1059–1061, 1988.
- [11] M. K. Kazimierczuk. *Pulse-Width Modulated DC-DC Power Converters.* Wiley, Reino Unido, 2 edition. Chapter 14: current-mode control, 2016.
- [12] Y. A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory (2Nd Ed.).* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1998.
- [13] R. Marquez, M. A. Contreras-Ordaz, and A. Hernández-Méndez. **Singular perturbations in integral control of dc-to-dc power converters.** *2017 14th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE)*, pages 1–6, 2017.

- [14] J. E. Marsden and M. McCracken. *The Hopf Bifurcation and its Applications*. Volume 19 of *Applied Mathematical Series*, Springer-Verlag, New York, 1976.
- [15] A. Mees and L. Chua. **The hopf bifurcation theorem and its applications to nonlinear oscillations in circuits and systems**. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 26(4):235–254, 1979.
- [16] R. D. Middlebrook and S. Čuk. **A general unified approach to modelling switching-converter power stages**. *International Journal of Electronics*, 42(6):521–550, 1977.
- [17] N. S. Nise. *Control System Engineering*. Wiley, 7 edition, 2015.
- [18] L. Perko. **Differential Equations and Dynamical Systems**. volume 7 of *Texts in Applied Mathematics*, Springer-Verlag, New York, 3 edition. 2001.
- [19] Powersim Inc (2017). **PSIM® User Guide**. Visitado el día 28 de octubre de 2018, <https://powersimtech.com/drive/uploads/2017/11/PSIM-User-Manual.pdf>.
- [20] H. Sira-Ramirez. **A geometric approach to pulse-width modulated control in nonlinear dynamical systems**. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(2):184–187, 1989.
- [21] S. H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics And Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Studies in nonlinearity. Westview Press, Cambridge, MA., 1994.
- [22] C. Tse. *Complex Behavior of Switching Power Converters*. Power electronics and applications series. CRC Press., 2003.
- [23] C. K. Tse and M. D. Bernardo. **Complex behavior in switching power converters**. *Proceedings of the IEEE*, 90(5):768–781, (2002).
- [24] J. R. Wood. **Chaos: a real phenomenon in power electronics**. *Proceedings, Fourth Annual IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition*, pages 115–124, 1989.
- [25] H. Zhang, X.-P. Yang, X.-K. Ma and B. He, **Analysis of limit cycle behavior in dc?dc boost converters**. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 13:2049–2062, 2012.