

Capítulo 10

Modelo matemático mediante teoría de tornillos para el análisis de velocidad y de aceleración de un robot redundante 4PRPR

Cuauhtémoc Vázquez Yescas¹
Mario A. García Murillo²
Manuel Arias Montiel³
Alberto Antonio García⁴

Abstract: The parallel robots also called parallel manipulators or parallel kinematic machines, are mechanisms with closed-loop kinematic chains whose end-effector is controlled by at least two kinematic chains that connect the end effector to the fixed base of the robot. This architecture provides the parallel robots with certain advantages over traditional serial robots, for example, large load capacities, construction with lighter elements, use of less powerful actuators, greater precision in the positioning of the end effector. One of the main disadvantages of parallel robots is that they can completely lose their rigidity in the singular positions (or singularities), in these configurations the robot gains degrees of freedom and loses controllability in the movement of the final effector. It has been reported that redundancy in actuation can effectively reduce the singularities of parallel robots. Redundancy occurs when the robot has more actuators than degrees of freedom (DOF). On the other hand, the kinematic analysis of the parallel robots represents a challenge because there is a practically unlimited number of different configurations and this causes that there is not a general method applicable to all of them. The screws theory represents a mathematical tool for the study of kinematics and the dynamics of the rigid body and in recent years has found in the study of parallel robots an important field of application. In this paper we present the development of mathematical models for velocity and acceleration analysis of a planar parallel robot with PRPR configuration using the screws theory. The obtained models are compared with results of numerical simulations to prove their validity.

¹cuvasyes@gmail.com. División de Estudios de Posgrado, Universidad Tecnológica de la Mixteca

²garcia.mario@ugto.mx. División de Ingenierías, Campus Irapuato-Salamanca, Universidad de Guanajuato

³mam@mixteco.utm.mx. Instituto de Electrónica y Mecatrónica, Universidad Tecnológica de la Mixteca

⁴antonio@mixteco.utm.mx. Instituto de Electrónica y Mecatrónica, Universidad Tecnológica de la Mixteca

Keywords: Screw theory, redundant parallel robot, kinematic model.

Resumen: Los robots paralelos también llamados manipuladores paralelos o máquinas cinemáticas paralelas, son mecanismos de cadena cerrada cuyo efector final es controlado mediante al menos dos cadenas cinemáticas que conectan dicho efector final con la base fija del robot. Esta arquitectura proporciona a los robots paralelos ciertas ventajas sobre los tradicionales robots seriales, por ejemplo, grandes capacidades de carga, construcción con elementos más ligeros, uso de actuadores menos potentes, mayor precisión en el posicionamiento del efector final. Una de las principales desventajas de los robots paralelos es que pueden perder completamente su rigidez en las posiciones singulares (o singularidades), en las cuales el robot gana grados de libertad y pierde controlabilidad en el movimiento del efector final. Se ha reportado que la redundancia en la actuación puede reducir efectivamente las singularidades de los robots paralelos. La redundancia se presenta cuando el robot posee más actuadores que grados de libertad (GDL). Por otro lado, el análisis cinemático de los robots paralelos representa un reto debido a que se cuenta con una cantidad prácticamente ilimitada de configuraciones distintas y esto ocasiona que no se cuente con un método general aplicable a todas ellas. La teoría de tornillos representa una herramienta matemática para el estudio de la cinemática y la dinámica del cuerpo rígido y en años recientes ha encontrado en el estudio de los robots paralelos, un importante campo de aplicación. En este trabajo se presenta el desarrollo de modelos matemáticos para el análisis de velocidad y de aceleración de un robot paralelo planar con configuración PRPR utilizando la teoría de tornillos. Los modelos obtenidos son comparados con resultados de simulaciones numéricas, para demostrar su validez

Palabras clave: Teoría de tornillos, robot paralelo redundante, modelo cinemático.

10.1. Introducción

Un robot paralelo es descrito como aquel que es capaz de relacionar los movimientos de su efector final y la base fija del robot a través de un mecanismo con al menos dos cadenas cinemáticas independientes. De este concepto se desprenden los componentes principales que constituyen mecánicamente al robot paralelo: efector final, cadenas cinemáticas y la base del robot [6].

El estudio de estos mecanismos y la relación cinemática que guardan sus componentes, ha dado pie a varias aplicaciones y ha abierto nuevos campos de investigación proponiendo nuevas estrategias de solución a los problemas de cinemática directa, inversa, análisis de velocidad y de aceleración. Entre los trabajos enfocados a desarrollar el análisis cinemático de un manipulador planar redundante, se encuentran los trabajos desarrollados por Taghirad [7, 8]; donde los análisis de velocidad y aceleración se plantean desde ecuaciones de cerradura de lazo.

Tradicionalmente, la solución de la cinemática directa e inversa se ha abordado desde un enfoque geométrico. En lo referente al problema del análisis de velocidad y de aceleración se ha hecho uso de teorías y herramientas propuestas en otros campos de la ciencia, tal es el caso de la denominada teoría de tornillos. Esta teoría establece que es posible determinar los movimientos, velocidades, fuerzas, pares y aceleraciones de un cuerpo rígido en el espacio, basándose en la idea de que cualquier movimiento del cuerpo rígido puede representarse como la

unión inseparable de una rotación alrededor de un eje y una traslación a lo largo del mismo eje, donde el eje es coincidente con el objeto o la partícula que experimenta el desplazamiento [2].

En este trabajo, se expone el estudio del análisis cinemático de un manipulador planar 4PRPR donde el movimiento resultante en la plataforma móvil en el plano xy se logra a través del accionamiento independiente de los actuadores que conforman las cadenas cinemáticas que conecta la plataforma fija con la plataforma móvil del robot. La particularidad del mecanismo expuesto recae en la capacidad de reconfigurar los puntos de anclaje de los actuadores con la plataforma fija con el fin de dotar al efector final de una mayor capacidad de movimiento y rango de orientación. La reconfiguración del mecanismo se logra a través de emplear juntas prismáticas en cada punto de anclaje entre la plataforma fija y las extremidades del robot, que al analizar el mecanismo en su conjunto se tiene como resultado un mecanismo redundante en actuación.

Las simulaciones numéricas y los resultados de simulaciones en software de análisis ADAMS© son mostrados a fin de validar las ecuaciones planteadas

10.2. Cinemática infinitesimal

En esta sección se presentan algunos conceptos necesarios para abordar los problemas cinemáticos de velocidad y de aceleración de robots paralelos desde el enfoque de la teoría de tornillos infinitesimales.

La velocidad de un cuerpo rígido, puede ser representada simplemente como un punto en \mathbb{R}^6 , definido por tres velocidades angulares y tres velocidades lineales a lo que en conjunto se les conoce como velocidad espacial o twist. Tomando en cuenta que cualquier configuración de cuerpo rígido se puede lograr comenzando un movimiento desde un marco de referencia fijo e integrando un giro constante durante un tiempo específico, un movimiento de este tipo se asemeja al movimiento de un tornillo, que gira y se desplaza a lo largo del mismo eje fijo [5].

En coordenadas de Plücker, un tornillo infinitesimal $\$ \in \mathbb{R}^6$ está definido como [2]:

$$\$ = \begin{bmatrix} \hat{s}_1 \\ \mathbf{s}_O \end{bmatrix}. \quad (10.2.1)$$

De esta representación son distinguibles sus dos componentes principales: $\hat{s}_1 = P(\$)$ la componente primaria del tornillo, siendo éste un vector unitario en \mathbb{R}^3 que proporciona la dirección del tornillo en el espacio tridimensional, $\mathbf{s}_O = D(\$)$ la componente dual del tornillo, que representa el momento causado por \hat{s} con respecto al sistema de referencia seleccionado y es definido como:

$$\mathbf{s}_O = h\hat{s} + \hat{s} \times \mathbf{r}_O, \quad (10.2.2)$$

en donde \mathbf{r}_O es un vector que va desde un punto arbitrario sobre el eje instantáneo del tornillo y termina en un punto O fijo al sistema de referencia, mientras que h es el paso de tornillo y está definido como:

$$h = \frac{v \cdot \omega}{\omega^2}. \quad (10.2.3)$$

Este paso de tornillo define la relación existente entre la velocidad lineal v a lo largo del eje del tornillo y la velocidad angular ω sobre el eje del tornillo.

En el contexto de la teoría de tornillos infinitesimales aplicados al análisis de la cinemática de robots ya sea seriales o paralelos, es posible asociar tornillos infinitesimales a cada uno de los pares inferiores que componen estos robots.

Partiendo de asociar un tornillo a una junta helicoidal, es posible generar dos casos particulares dependiendo del valor del paso de tornillo h asociado, y así obtener la representación en tornillos infinitesimales de las juntas prismáticas y de revoluta como se muestra en la Figura 10.1.

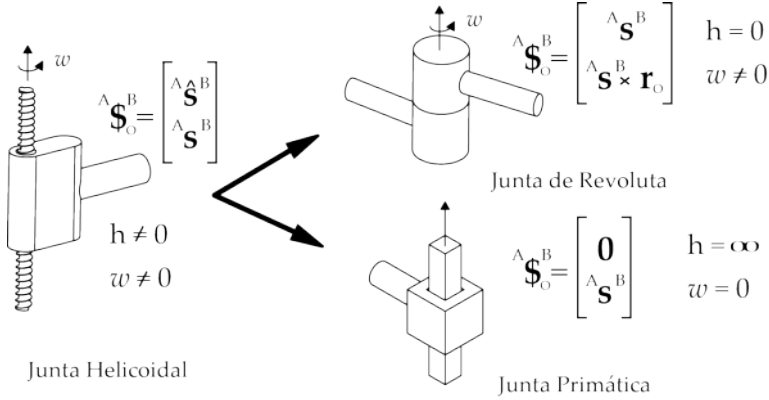


Figura 10.1: Representación de pares cinemáticos como tornillos infinitesimales.

Una vez definidos los tornillos de cada una de las juntas que conforman una cadena cinemática abierta, el estado de velocidad del último elemento de dicha cadena queda definido como [3]:

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^m {}_{k-1}\omega_k {}^{k-1}\mathcal{S}^k, \quad (10.2.4)$$

donde ${}^{k-1}\mathcal{S}^k \in \{1, \dots, m\}$ es un tornillo normalizado y representa los pares cinemáticos que conectan cada par de eslabones adyacentes en la cadena cinemática, mientras que ${}_{k-1}\omega_k \in \{1, \dots, m\}$ es el cambio instantáneo de velocidad entre los eslabones mencionados.

Otro concepto que es necesario abordar para el análisis del manipulador por teoría de tornillos, es la reciprocidad. Se dice que dos tornillos $\mathcal{S}_1 = (\hat{\mathbf{s}}_1, \mathbf{s}_{O1})$ y $\mathcal{S}_2 = (\hat{\mathbf{s}}_2, \mathbf{s}_{O2})$ elementos del álgebra de Lie, son recíprocos si la forma de Klein $\{*, *\}$, entre ellos es igual a cero [2].

$$\{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2\} = \hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \mathbf{s}_{O2} + \hat{\mathbf{s}}_2 \cdot \mathbf{s}_{O1} = 0. \quad (10.2.5)$$

Existen tres condiciones básicas para que tornillos que representan movimientos puramente rotacionales o traslacionales sean recíprocos entre ellos:

1. Dos tornillos con movimiento rotacional puro, es decir, con paso ($h = 0$) son recíprocos si éstos son coplanares.
2. Dos tornillos con movimiento puramente traslacional son siempre recíprocos entre ellos.
3. Un tornillo traslacional y uno rotacional son recíprocos si son perpendiculares entre sí.

El significado físico que tiene el hecho de que dos tornillos sean recíprocos, es que no aportan trabajo al movimiento del cuerpo o del sistema en general [2].

10.3. Descripción del mecanismo

En el mecanismo estudiado son distinguibles cuatro cadenas cinemáticas que conectan la plataforma móvil con la plataforma fija, describiendo en su conjunto la estructura cinemática de un robot paralelo (lado izquierdo de la Figura 10.2).

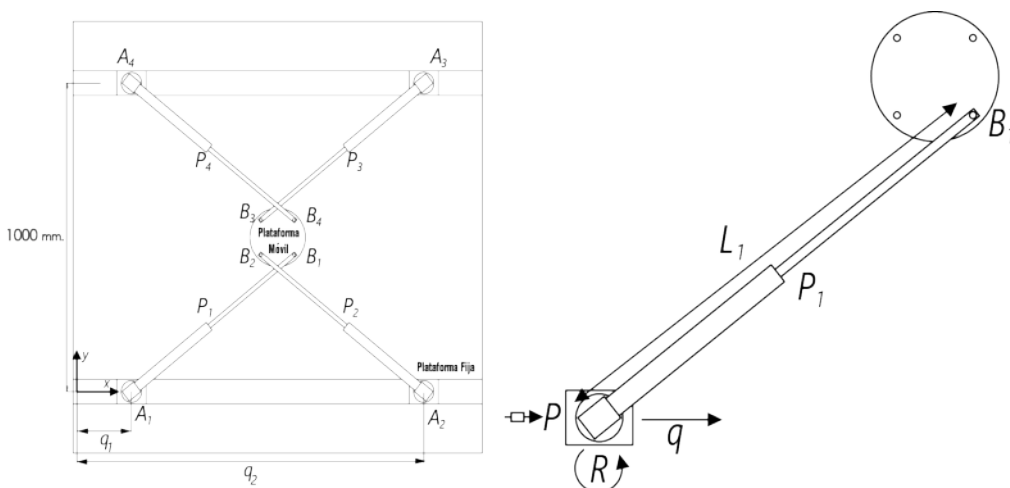


Figura 10.2: Descripción del mecanismo

Cada cadena cinemática (lado derecho de la Figura 10.2) tiene una junta prismática (P) en los puntos A_i , en dicho punto se ha dispuesto de una junta de revoluta (R) que permite rotar a una segunda junta prismática (P) que conecta el punto A_i con el punto B_i , en este punto se dispone de otra junta de revoluta (R) conectada a la plataforma móvil, este encadenamiento cinemático recibe el nombre PRPR y el mecanismo al contar con 4 cadenas cinemáticas idénticas recibe el nombre de 4PRPR.

La primera junta prismática en A_i proporciona al mecanismo la posibilidad de modificar la ubicación una distancia q de un punto inicial A_i a otro de manera horizontal. Así el accionamiento de cada una de las cadenas cinemáticas, proporciona un cambio de posición y de orientación en la plataforma móvil con respecto de la plataforma fija.

En lo referente a la capacidad de reconfiguración del robot, se han planteado dos modos de operación por cada una de sus extremidades o cadenas cinemáticas:

- En el modo 1, el movimiento de la segunda junta prismática está restringido y no existe un cambio de longitud en dicha junta, por tanto su velocidad es igual a cero $\dot{L} = 0$. No así la velocidad de la junta prismática que une la plataforma fija con la cadena cinemática $\dot{q} \neq 0$.
- En el modo 2, la velocidad \dot{q} de la junta prismática que une la cadena cinemática con la plataforma fija del manipulador, es igual a cero y por su parte la longitud L , puede variar en el momento de operación del robot, $\dot{L} \neq 0$.

10.4. Análisis de posición

Se definen los puntos de anclaje A_i de las cadenas cinemáticas de la plataforma fija Figura 10.2. En la plataforma móvil se definen los puntos de anclaje de B_i , separados 90° entre sí.

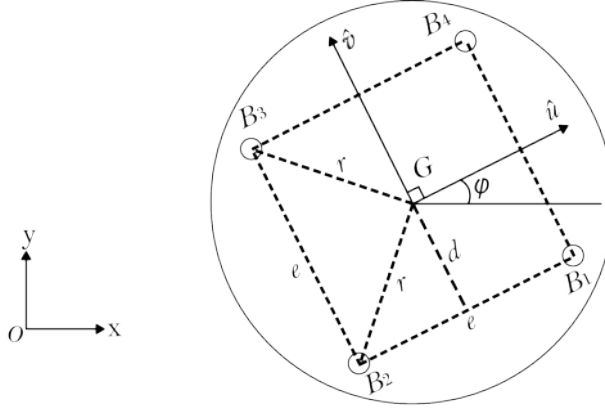


Figura 10.3: Plataforma móvil, parámetros geométricos y definición ejes \hat{u} - \hat{v} .

En la Figura 10.3, está definida geoméricamente la plataforma móvil por los valores de $r = 80\text{mm}$, $e = 2r\cos(45^\circ)$, $d = r\cos(45^\circ)$.

10.4.1. Problema de la cinemática directa

El problema de la cinemática directa, se resume en encontrar las coordenadas que definen el centro geométrico G de la plataforma móvil, así como la inclinación ϕ con respecto de la horizontal.

La posición de los puntos de anclaje B_1 y B_2 se define con respecto del sistema de ejes coordenados (x, y, z) , como: $B_1 = [x_1, y_1, 0]$ y $B_2 = [x_2, y_2, 0]$. El eje \hat{u} en la plataforma móvil se define cómo:

$$\hat{u} = \frac{1}{e}(\vec{B}_1 - \vec{B}_2), \quad (10.4.1)$$

donde \vec{B}_i son vectores que van desde el punto de anclaje A_i hasta el punto B_i correspondiente a cada cadena cinemática.

Por otra parte, el eje \hat{v} queda definido por el producto cruz, ver Figura 10.3:

$$\hat{v} = \hat{k} \times \hat{u}, \quad (10.4.2)$$

siendo \hat{k} el vector unitario que es perpendicular al plano de la plataforma. Ahora es posible definir la matriz de rotación R con respecto al eje z .

$$R = \frac{1}{e} \begin{bmatrix} x_1 - x_2 & y_2 - y_1 & 0 \\ y_1 - y_2 & x_1 - x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (10.4.3)$$

El centro geométrico G de la plataforma móvil puede definirse cómo:

$$\vec{G} = \frac{1}{2}(\vec{B}_1 + \vec{B}_2) + d\hat{k}. \quad (10.4.4)$$

Los distintos vectores que definen los puntos de anclaje en la plataforma móvil con respecto del centro geométrico G en coordenadas (\hat{u}, \hat{v}) quedan definidas cómo:

$$\begin{aligned} {}^G\vec{B}_1 &= [d, -\frac{e}{2}, 0]^T \\ {}^G\vec{B}_2 &= [-d, -\frac{e}{2}, 0]^T \\ {}^G\vec{B}_3 &= [-d, \frac{e}{2}, 0]^T \\ {}^G\vec{B}_4 &= [d, \frac{e}{2}, 0]^T. \end{aligned} \quad (10.4.5)$$

La posición de los puntos B_3 y B_4 quedan definidos cómo:

$$B_3 = R^G\vec{B}_3 + \vec{G} \quad (10.4.6)$$

$$B_4 = R^G\vec{B}_4 + \vec{G}. \quad (10.4.7)$$

Para encontrar los valores del centro geométrico G y el ángulo de inclinación ϕ de la plataforma móvil con respecto de la horizontal. Es necesario resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\|\vec{B}_i - \vec{A}_i\|^2 - L_i^2 = 0 \quad \forall i = 1, 2, 3, 4. \quad (10.4.8)$$

donde L_i representa la longitud de la i -ésima extremidad del manipulador.

De resolver el sistema de ecuaciones (10.4.8) se obtienen los valores de $B_1 = [x_1, y_1, 0]$ y $B_2 = [x_2, y_2, 0]$, que al aplicarse a la expresión (10.4.4) permite encontrar el valor en coordenadas (x, y) del centro geométrico G de la plataforma móvil. Resta conocer el valor de inclinación de la plataforma móvil, $\phi = \cos^{-1}(u_x)$

10.4.2. Problema de la cinemática inversa

El problema de la cinemática inversa, se resume en encontrar los valores de L_i , teniendo por conocidos el centro geométrico G de la plataforma móvil y su valor de inclinación ϕ con respecto de la horizontal.

Se define la matriz de rotación de la plataforma móvil, con referencia al eje \hat{k} dado el ángulo ϕ cómo:

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (10.4.9)$$

Los puntos de anclaje de la plataforma B_i en la plataforma móvil se definen bajo la expresión:

$$\vec{B}_i = R^G\vec{B}_i + G \quad \text{para todo } i = 1, 2, 3, 4. \quad (10.4.10)$$

Para conocer las longitudes L_i de cada cadena cinemática, conociendo los puntos de anclaje A_i sobre la plataforma móvil, los cuales están definidos por las longitudes q_i , como se observa en la Figura 10.2 es necesario resolver las 4 ecuaciones definidas cómo:

$$L_i^2 = \|\vec{B}_i - \vec{A}_i\|^2 \quad \text{para todo } i = 1, 2, 3, 4. \quad (10.4.11)$$

10.5. Análisis de velocidad

10.5.1. Análisis inverso de velocidad

El análisis inverso de velocidad consiste en determinar los cambios instantáneos de velocidad en las juntas activas, teniendo por conocido el estado de velocidad V_0 de la plataforma móvil con respecto a un punto de referencia, en este caso el centro geométrico de la plataforma fija.

En la Figura 10.4 se observa la disposición de los tornillos infinitesimales asociados a cada par cinemático en una de las cadenas cinemáticas, para el análisis de velocidad del robot paralelo.

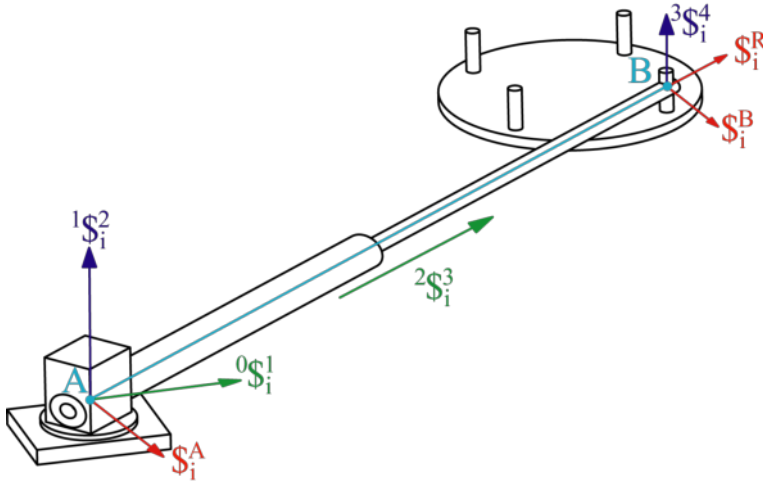


Figura 10.4: Disposición de los tornillos infinitesimales en una de las cadenas cinemáticas

Donde los tornillos infinitesimales ${}^0S_i^1$ corresponden a una junta prismática en los puntos A_i , ${}^1S_i^2$ es una junta de revoluta en A_i , ${}^2S_i^3$ corresponde a una junta prismática, ${}^3S_i^4$ corresponde a una junta de revoluta en el punto B_i , S_i^R es un tornillo de paso $h = 0$ y es recíproco a todos los pares pasivos en la cadena cinemática i . Por su parte S_i^A , S_i^B son tornillos de paso $h = 0$ y son perpendiculares a la línea que conecta los puntos A y B .

Aplicando la forma de Klein entre los tornillos S_i^A , S_i^B y el estado de velocidad de la plataforma móvil.

$$\{S_i^A; {}^0V_0^4\} = \dot{q}_i \{S_i^A; {}^0S_i^1\} + {}_3\omega_4^i \{S_i^A; {}^3S_i^4\} \quad \text{para todo } i = 1, 2, 3, 4. \quad (10.5.1)$$

$$\{S_i^B; {}^0V_0^4\} = \dot{q}_i \{S_i^B; {}^1S_i^2\} + {}_1\omega_2^i \{S_i^B; {}^1S_i^2\} \quad \text{para todo } i = 1, 2, 3, 4. \quad (10.5.2)$$

De la ecuación (10.5.1), se puede despejar

$${}_3\omega_4^i = \frac{\{S_i^A; {}^0V_0^4\} - \dot{q}_i \{S_i^A; {}^0S_i^1\}}{\{S_i^A; {}^3S_i^4\}}. \quad (10.5.3)$$

De manera similar de la ecuación (10.5.2), se puede conocer ${}_1\omega_2^i$.

$${}^1\omega_2^i = \frac{\{\mathbb{S}_i^B; {}^0V_0^4\} - \dot{q}_i \{\mathbb{S}_i^B; {}^1\mathbb{S}_i^2\}}{\{\mathbb{S}_i^B; {}^1\mathbb{S}_i^2\}}. \quad (10.5.4)$$

10.5.2. Análisis directo de velocidad

El análisis directo de velocidad consiste en encontrar el estado de velocidad de la plataforma móvil teniendo por conocidas las velocidades de las articulaciones del manipulador.

Aplicando la forma de Klein entre el estado de velocidad y los tornillos recíprocos \mathbb{S}_i^R , se obtiene la expresión.

$$\{\mathbb{S}_i^R; {}^0V_0^4\} = \dot{q}_i \{\mathbb{S}_i^R; {}^0\mathbb{S}_i^1\} + \dot{L}_i \quad \text{para todo } i = 1, 2, 3, 4 \quad (10.5.5)$$

Que en forma matricial, queda expresada como:

$$\mathbf{M}\vec{\mathbf{V}}^* = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \{\mathbb{S}_1^R; {}^0\mathbb{S}_1^1\} + \dot{L}_1 \\ \dot{q}_2 \{\mathbb{S}_2^R; {}^0\mathbb{S}_2^1\} + \dot{L}_2 \\ \dot{q}_3 \{\mathbb{S}_3^R; {}^0\mathbb{S}_3^1\} + \dot{L}_3 \\ \dot{q}_4 \{\mathbb{S}_4^R; {}^0\mathbb{S}_4^1\} + \dot{L}_4 \end{bmatrix}, \quad (10.5.6)$$

siendo $\vec{\mathbf{V}}^*$ el vector de estado de velocidad recortado, donde $\mathbf{M} = \mathbf{J}^{*T}\mathbf{\Delta}$, siendo \mathbf{J}^* el resultado de haber recortado los renglones 3, 4 y 5 de la matriz Jacobiana \mathbf{J} definida como: $\mathbf{J} = \{\mathbb{S}_1^R, \mathbb{S}_2^R, \mathbb{S}_3^R, \mathbb{S}_4^R\}$, mientras $\mathbf{\Delta}$ es una operador de polaridad [4] y tiene la propiedad que $\mathbf{\Delta}^{-1} = \mathbf{\Delta}$, definida para el robot planar como:

$$\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.5.7)$$

A partir de la ecuación (10.5.6) es posible conocer $\vec{\mathbf{V}}^*$ como:

$$\vec{\mathbf{V}}^* = \mathbf{M}^+ \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \{\mathbb{S}_1^R; {}^0\mathbb{S}_1^1\} + \dot{L}_1 \\ \dot{q}_2 \{\mathbb{S}_2^R; {}^0\mathbb{S}_2^1\} + \dot{L}_2 \\ \dot{q}_3 \{\mathbb{S}_3^R; {}^0\mathbb{S}_3^1\} + \dot{L}_3 \\ \dot{q}_4 \{\mathbb{S}_4^R; {}^0\mathbb{S}_4^1\} + \dot{L}_4 \end{bmatrix}, \quad (10.5.8)$$

donde \mathbf{M}^+ es la pseudoinversa de la matriz \mathbf{M} y se obtiene mediante la expresión: $\mathbf{M}^+ = (\mathbf{M}^T\mathbf{M})^{-1}\mathbf{M}^T$.

10.6. Análisis de aceleración

El análisis de aceleración busca determinar las expresiones que relacionan las aceleraciones de las juntas con la aceleración que sufre la plataforma móvil. Brand en 1947 definió el estado de aceleración reducido \mathbf{A}_O de un cuerpo rígido como un vector de 6 dimensiones [1]:

$$\mathbf{A}_O = \begin{bmatrix} \alpha \\ \mathbf{a}_O - \omega \times v_O \end{bmatrix}, \quad (10.6.1)$$

donde $\alpha = \dot{\omega}$ funge como componente primario y es la aceleración angular sufrida por el cuerpo rígido, mientras $\mathbf{a}_O - \omega \times v_O$ es la componente dual, donde \mathbf{a}_O es la aceleración lineal que experimenta un cuerpo rígido en el punto O ; es necesario resaltar que α no depende de un punto en particular del cuerpo y por tanto puede considerarse como una propiedad del cuerpo rígido.

A su vez, el estado de aceleración reducido puede definirse a través de tornillos infinitesimales como:

$$\mathbf{A}_O = \mathbf{J}_i \dot{\mathbf{\Omega}}_i + \mathbb{S}_{\mathcal{L}}^i \quad \text{para todo } i = 1, 2, 3, 4, \quad (10.6.2)$$

siendo $\dot{\mathbf{\Omega}}_i$ la matriz conformada por las aceleraciones sufridas por las juntas en una de las cadenas cinemáticas del manipulador. $\mathbb{S}_{\mathcal{L}}^i$ es el tornillo de Lie definido para una de las cadenas cinemáticas como:

$$\mathbb{S}_{\mathcal{L}}^i = [{}_{0}\omega_1 {}^0\mathbb{S}_i^1; {}_1\omega_2 {}^1\mathbb{S}_i^2 + {}_2\omega_3 {}^2\mathbb{S}_i^3 + {}_3\omega_4 {}^3\mathbb{S}_i^4] + [{}_{1}\omega_2 {}^1\mathbb{S}_i^2; {}_2\omega_3 {}^2\mathbb{S}_i^3 + {}_3\omega_4 {}^3\mathbb{S}_i^4] + [{}_{2}\omega_3 {}^2\mathbb{S}_i^3; {}_3\omega_4 {}^3\mathbb{S}_i^4]. \quad (10.6.3)$$

10.6.1. Análisis inverso de aceleración

El análisis inverso de aceleración consiste en determinar los cambios instantáneos de aceleración en las juntas de la i -ésima cadena cinemática, teniendo por conocido el estado de aceleración reducido \mathbf{A}_O de la plataforma móvil con respecto a un punto de referencia, se obtiene a partir de la expresión (10.6.2).

$$\dot{\mathbf{\Omega}}_i = \mathbf{J}_i^{*-1}(\mathbf{A}_O - \mathbb{S}_{\mathcal{L}}^i). \quad (10.6.4)$$

10.6.2. Análisis directo de aceleración

El análisis directo de aceleración consiste en encontrar el estado de aceleración reducido de la plataforma móvil teniendo por conocidas las aceleraciones presentes en las articulaciones del manipulador. Este estado de aceleración reducido es posible de obtener a través del análisis de cualquiera de las cadenas cinemáticas que conectan la plataforma móvil con la plataforma fija.

Empleando la forma de Klein a ambos lados de la ecuación (10.6.2):

$$\{\mathbb{S}_i^R; {}^0A_0^4\} = \{\mathbb{S}_i^R; \mathbb{S}_{\mathcal{L}}^i\}. \quad (10.6.5)$$

Esta expresión, llevada a su forma matricial queda definida como:

$$\mathbf{M}\mathbf{A}_O = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \{\mathbb{S}_1^R; \mathbb{S}_{\mathcal{L}}^1\} + \ddot{L}_1 \\ \ddot{q}_2 \{\mathbb{S}_2^R; \mathbb{S}_{\mathcal{L}}^2\} + \ddot{L}_2 \\ \ddot{q}_3 \{\mathbb{S}_3^R; \mathbb{S}_{\mathcal{L}}^3\} + \ddot{L}_3 \\ \ddot{q}_4 \{\mathbb{S}_4^R; \mathbb{S}_{\mathcal{L}}^4\} + \ddot{L}_4 \end{bmatrix}. \quad (10.6.6)$$

Ahora, solo resta obtener la pseudoinversa de la matriz \mathbf{M} , tal como se definió para la ecuación (10.5.8)

$$\mathbf{A}_O = \mathbf{M}^+ \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \{\mathbb{S}_1^R; \mathbb{S}_{\mathcal{L}}^1\} + \ddot{L}_1 \\ \ddot{q}_2 \{\mathbb{S}_2^R; \mathbb{S}_{\mathcal{L}}^2\} + \ddot{L}_2 \\ \ddot{q}_3 \{\mathbb{S}_3^R; \mathbb{S}_{\mathcal{L}}^3\} + \ddot{L}_3 \\ \ddot{q}_4 \{\mathbb{S}_4^R; \mathbb{S}_{\mathcal{L}}^4\} + \ddot{L}_4 \end{bmatrix}. \quad (10.6.7)$$

Es necesario resaltar que, empleando la expresión (10.6.2) no se requiere conocer los valores de aceleración de las juntas pasivas del manipulador para llevar a cabo el cálculo del estado de aceleración reducido de la plataforma móvil del manipulador.

10.7. Validación de resultados numéricos mediante ADAMS

En esta sección son presentados los valores obtenidos mediante el cálculo numérico de las relaciones analíticas obtenidas y cotejados con los resultados arrojados de la simulación en

ADAMS. Para ejemplificar uno de los posibles comportamientos del manipulador, se definen los modos de operación para cada una de las cadenas cinemáticas, Cuadro 10.1.

Cadena Cinemática	Modo de operación
1	2
2	1
3	2
4	1

Cuadro 10.1: Modos de operacion en cadenas cinemáticas del manipulador

Los parámetros geométricos son los presentados en las Figuras 10.2 y 10.3. En cuanto a los puntos de anclaje A_i en su posición inicial con respecto al centro geométrico de la plataforma móvil son presentados en el Cuadro 10.2:

Puntos de Anclaje A_i	Coordenada en x	Coordenada en y
A_1	$-500mm$	$-500mm$
A_2	$500mm$	$-500mm$
A_3	$500mm$	$500mm$
A_4	$-500mm$	$500mm$

Cuadro 10.2: Puntos de anclaje A_i en su posición inicial.

Se propone una trayectoria en el plano de la plataforma fija que deberá seguir el centro geométrico de la plataforma móvil, partiendo desde el centro geométrico de la plataforma fija (0,0), hasta alcanzar el punto (100,-50)mm, Figura 10.5.

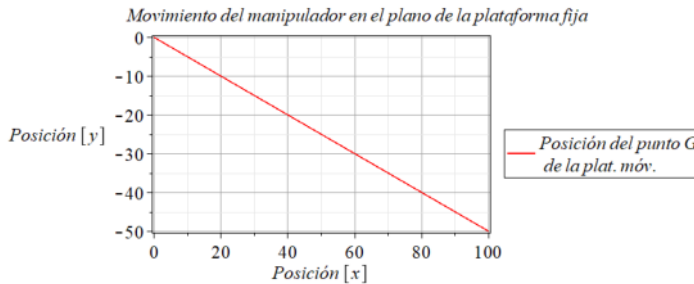


Figura 10.5: Trayectoria propuesta del manipulador 4PRPR en el plano x-y

El valor de ϕ , va desde 0 a $22,5^\circ$, este movimiento se efectuará en 5 segundos. Para aproximar la trayectoria propuesta del manipulador planar se proponen polinomios de tercer grado para cada desplazamiento, puesto que es posible establecer condiciones iniciales y finales tanto de posición como de velocidad en la trayectoria. Se obtienen los coeficientes del polinomio deseado que describe el movimiento en términos de x , y , ϕ en función del tiempo, ecuaciones (10.7.1)-(10.7.3):

$$x(t) = 12t^2 - 1,6t^3, \quad (10.7.1)$$

$$y(t) = -6t^2 + 0,8t^3, \quad (10.7.2)$$

$$\phi(t) = 2,7t^2 - 0,36t^3. \quad (10.7.3)$$

siendo la representación de las ecuaciones paramétricas (10.7.1)-(10.7.3), en las Figuras: 10.6 y 10.7.

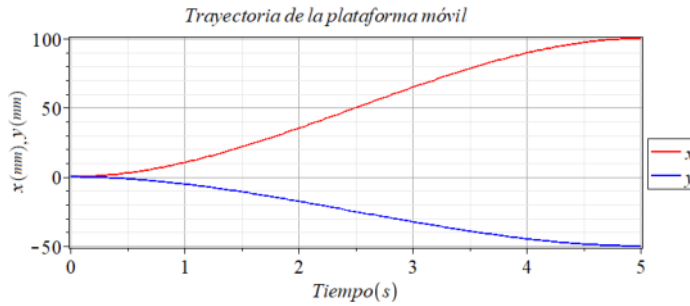


Figura 10.6: Trayectoria en x, y del centro geométrico de la plataforma móvil

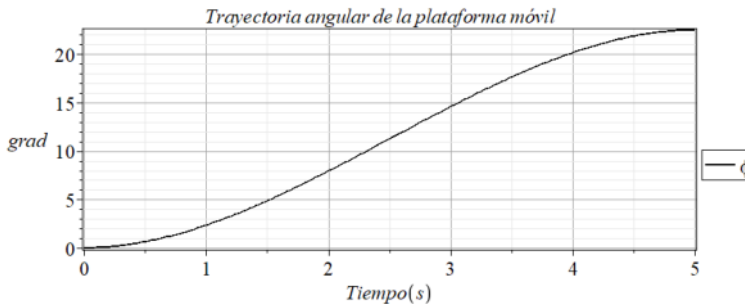


Figura 10.7: Trayectoria angular de la plataforma móvil

10.7.1. Validación del análisis de velocidad

Las expresiones (10.7.4)-(10.7.6) son el resultado de calcular la derivada de las expresiones (10.7.1)-(10.7.3), las cuales describen la velocidad deseada del manipulador y su representación paramétrica puede verse en las Figuras 10.8, 10.9.

$$\dot{x}(t) = 24t - 4,8t^2, \quad (10.7.4)$$

$$\dot{y}(t) = -12t + 2,4t^2, \quad (10.7.5)$$

$$\dot{\phi}(t) = 5,4t - 1,08t^2. \quad (10.7.6)$$

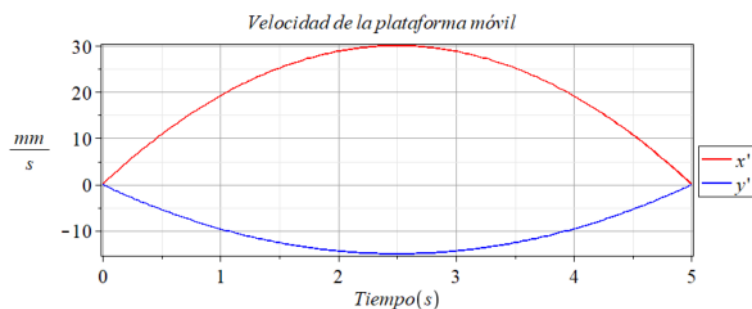


Figura 10.8: Velocidad deseada del manipulador

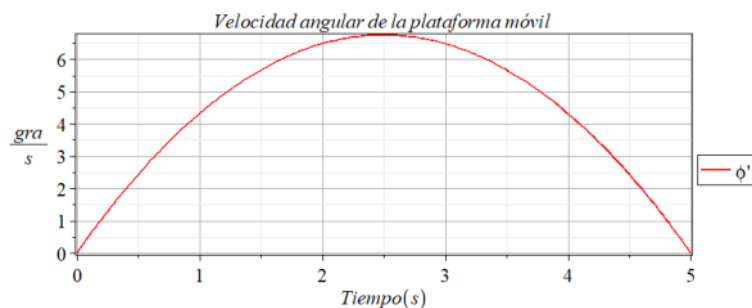


Figura 10.9: Velocidad angular deseada del manipulador

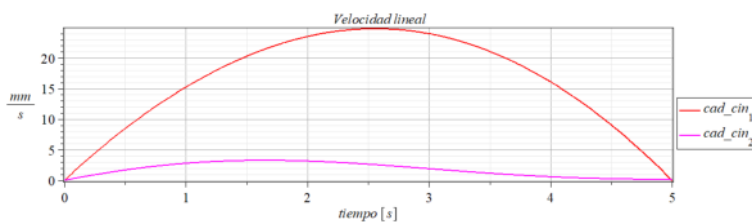


Figura 10.10: Velocidad en juntas activas de las cadenas cinemáticas 1 y 3

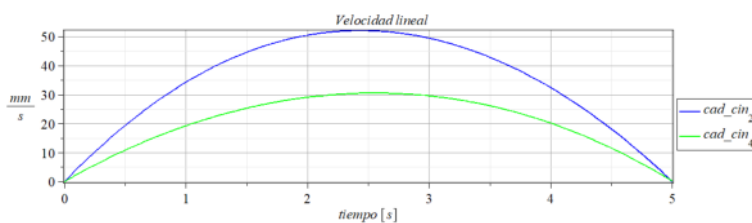


Figura 10.11: Velocidad en juntas activas de las cadenas cinemáticas 2 y 4

Definiendo el estado de velocidad del manipulador \vec{V}^* y resolviendo el sistema (10.5.6) se obtiene el vector de velocidad en las juntas activas del manipulador Figuras 10.10 y 10.11.

De los resultados de simulación mediante el software ADAMS View, para la misma tra-

vectoria deseada de la plataforma móvil, se obtienen los valores en velocidad para las juntas activas Figuras 10.12 y 10.13.

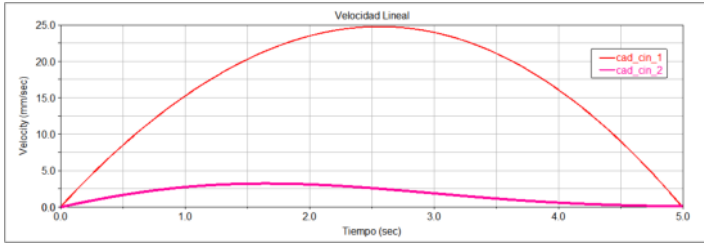


Figura 10.12: Velocidad en juntas activas de las cadenas cinemáticas 1 y 3, resultado de la simulación en Adams View

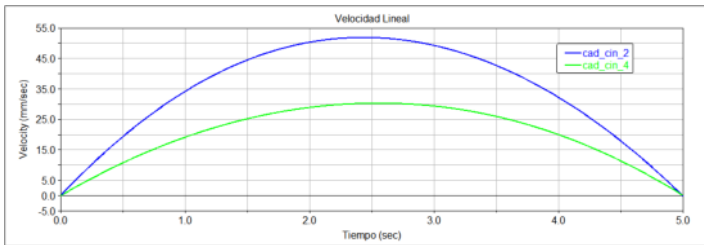


Figura 10.13: Velocidad en juntas activas de las cadenas cinemáticas 2 y 4, resultado de la simulación en Adams View

Continuando con la validación del análisis de velocidad, es pertinente definir el vector de velocidades articulares en función de las velocidades en las juntas activas del manipulador y encontrar la velocidad lineal y angular de la plataforma móvil, es decir, resolver el análisis directo de velocidad del sistema (10.5.8), los resultados del análisis numérico se presentan en las Figuras 10.14 y 10.15.

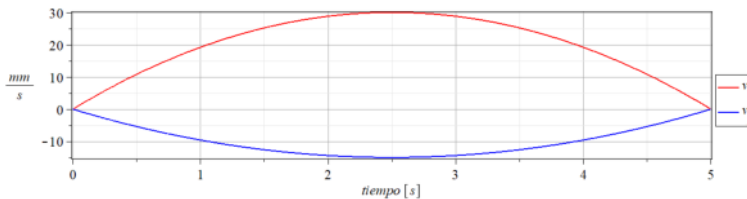


Figura 10.14: Velocidad lineal de la plataforma móvil, obtenida mediante simulación numérica

Los valores de velocidad de la plataforma móvil obtenidos mediante la simulación en el software de simulación ADAMS View, se observan en las Figuras 10.16 y 10.17.

Un análisis cualitativo de las gráficas obtenidas nos conduce al resultado idéntico, lo que significa que el análisis teórico y las simulaciones concuerdan bajo las mismas unidades métricas.

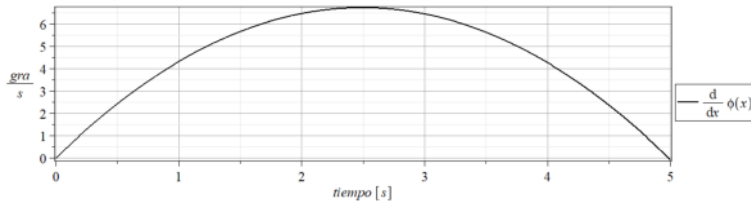


Figura 10.15: Velocidad angular de la plataforma móvil, obtenida mediante simulación numérica

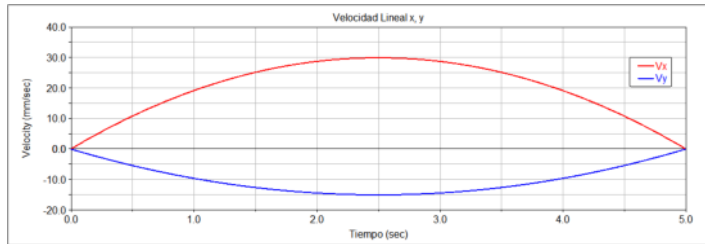


Figura 10.16: Velocidad lineal de la plataforma móvil, obtenida mediante ADAMS View

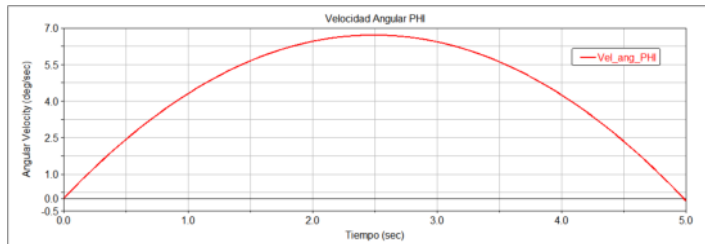


Figura 10.17: Velocidad angular de la plataforma móvil, obtenida mediante ADAMS View

10.7.2. Validación del análisis de aceleración

Las expresiones (10.7.7)-(10.7.9) son el resultado de calcular la derivada de las expresiones (10.7.4)-(10.7.6), las cuales describen la aceleración del manipulador y su representación paramétrica puede verse en las Figuras 10.18 y 10.19.

$$\ddot{x}(t) = 24 - 9,6t, \quad (10.7.7)$$

$$\ddot{y}(t) = -12 + 4,8t, \quad (10.7.8)$$

$$\ddot{\phi}(t) = 5,4 - 2,16t. \quad (10.7.9)$$

Definiendo el estado de aceleración reducido \mathbf{A}_O en base al comportamiento deseado de la aceleración del manipulador Figuras 10.18 y 10.19. Calculando la solución del sistema de EDO en forma matricial (10.6.4), es posible obtener las aceleraciones analíticamente en las juntas activas del manipulador, Figura 10.20.

De la simulación mediante el software ADAMS View, se obtienen los valores en aceleración para las juntas activas del manipulador, Figura 10.21.

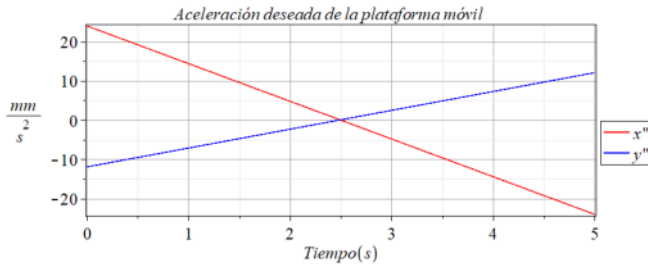


Figura 10.18: Gráficas resultantes de evaluar la función de aceleración lineal deseada

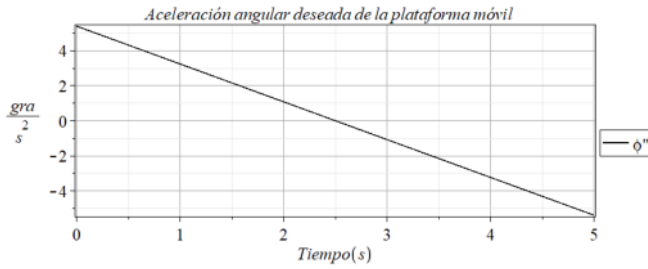


Figura 10.19: Gráfica resultante de evaluar la función de aceleración angular deseada

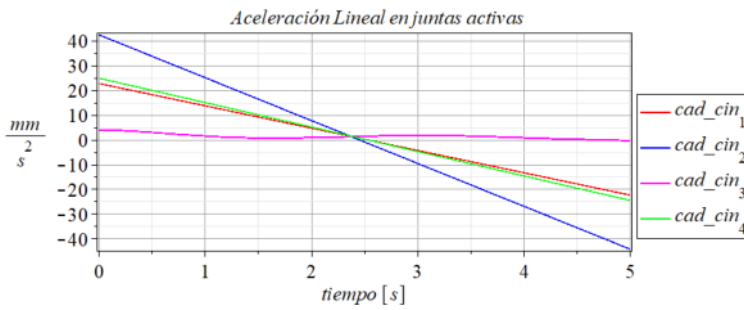


Figura 10.20: Gráfica resultante del análisis inverso de aceleración

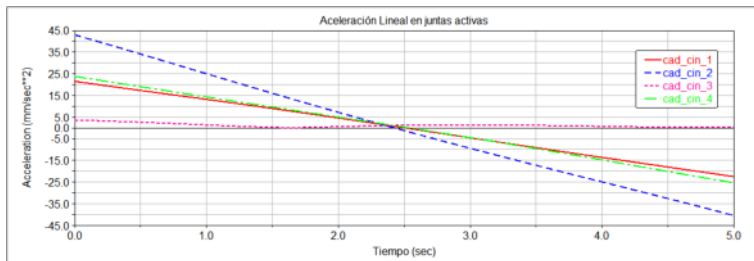


Figura 10.21: Aceleración en las juntas activas de las cadenas cinemáticas 1-4, obtenidas mediante ADAMS

Continuando con la validación del análisis de aceleración, es pertinente definir el vector de aceleraciones articulares en función de las aceleraciones en las juntas activas del manipulador y encontrar la aceleración lineal y angular de la plataforma móvil, los resultados del análisis numérico se presentan en las Figuras 10.22 y 10.23.

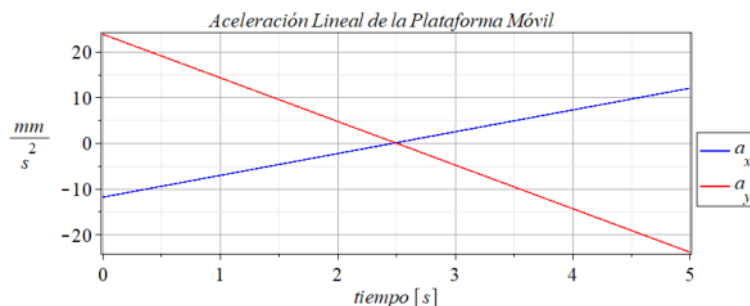


Figura 10.22: Aceleración lineal en x-y de la plataforma móvil

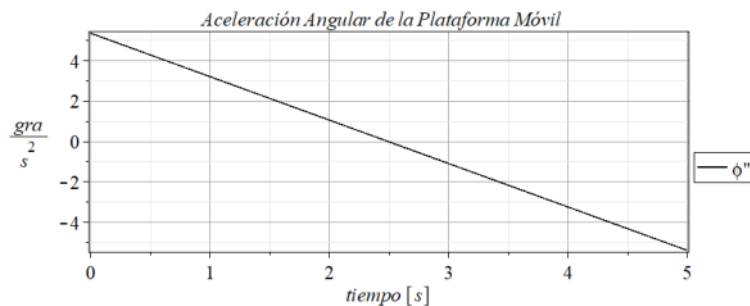


Figura 10.23: Aceleración angular de la plataforma móvil

Los valores de aceleración de la plataforma móvil obtenidos mediante la simulación en el software ADAMS View, se observan en las Figuras 10.24 y 10.25.

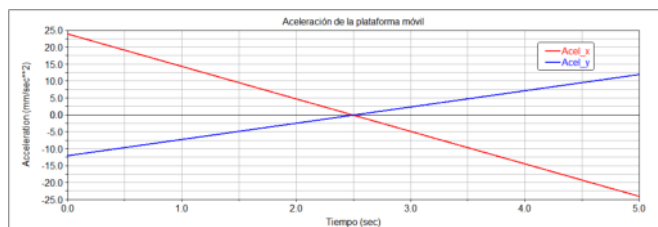


Figura 10.24: Aceleración lineal de la plataforma móvil, obtenida mediante ADAMS

El análisis cualitativo de las gráficas obtenidas mediante el análisis inverso de aceleración, Figura 10.20 y las obtenidas mediante simulación Figura 10.21, así como en el análisis directo de aceleración, Figuras 10.22 - 10.23 y los valores correspondientes de velocidad de la plataforma móvil desde la simulación en Adams, Figuras 10.24 - 10.25, es posible notar como los valores de ADAMS concuerdan con los valores esperados a través del análisis de aceleración mediante teoría de tornillos para el análisis directo e inverso.

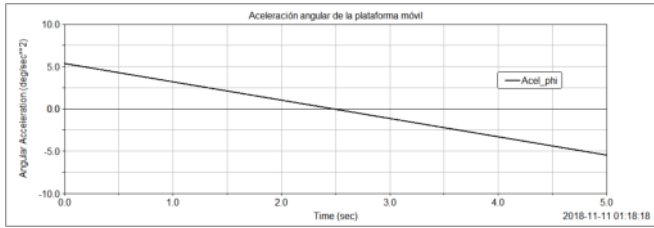


Figura 10.25: Aceleración angular de la plataforma móvil, obtenida mediante ADAMS

10.8. Conclusiones

En este trabajo se aborda el análisis cinemático de un manipulador planar 4PRPR donde cada cadena cinemática cuenta con la capacidad de operar en dos modos distintos. El emplear el enfoque de tornillos infinitesimales para análisis de velocidad y aceleración del manipulador en cuestión genera sistemas matriciales cuyos métodos de solución son sencillos y su gasto computacional es mínimo.

El análisis bajo el enfoque de tornillos infinitesimales y las propiedades de los tornillos recíprocos permite prescindir del cálculo del comportamiento en velocidad y aceleración de las juntas pasivas del manipulador.

Así mismo las expresiones obtenidas mediante la teoría de tornillos para el análisis de velocidad y de aceleración son relativamente fáciles de implementar para realizar las simulaciones numéricas pertinentes.

De igual forma se presentan los resultados de la simulación mediante el software Adams View, lo cual permite verificar la validez de las ecuaciones planteadas mediante la teoría de tornillos para el análisis de velocidad y de aceleración.

Los resultados presentados en este trabajo son de utilidad para el diseño y el análisis de manipuladores paralelos reconfigurables, ya que una extensión de éstos permite la cuantificación del espacio de trabajo, la ubicación de las posiciones singulares y la planificación de trayectorias.

Bibliografía

- [1] L. Brand. *Vector and Tensor Analysis*. John Wiley & Sons, 1947.
- [2] J. Gallardo Alvarado. *Kinematic Analysis of Parallel Manipulators by Algebraic Screw Theory*. Springer, 2016.
- [3] J. Gallardo-Alvarado, R. Rodríguez-Castro, L. Pérez-González, and C. R. Aguilar-Nájera. **Análisis Cinemático de un Manipulador Paralelo Plano Mediante la Teoría de Tornillos Infinitesimales**. *Científica*, 17(4):1665-0654, 2013.
- [4] H. Lipkin and J. Duffy. **The Elliptic Polarity of Screws**. *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, 3:377-386, 1985.
- [5] K. M. Lynch and F. C. Park. *Modern Robotics, Mechanics, Planning, and Control*. Cambridge University Press, 2017.
- [6] J.-P. Merlet. *Parallel Robots*. Springer, 2006.
- [7] H. D. Taghirad. **Parallel Robots, Mechanics and Control**. CRC Press Taylor & Francis Group, 2013.
- [8] H. D. Taghirad and M. Nahond. **Kinematic Analysis of a Macro-Micro Redundantly Actuated Parallel Manipulator**. *Advanced Robotics*, 22:657-687, 2007.