



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

CONTROL DE POSICIÓN DE UN MOTOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES

Tesis para obtener el grado de
Maestro en Electrónica, Opción:
Sistemas Inteligentes Aplicados

Presenta:

Ing. Oscar David Ramírez Cárdenas

Director de Tesis:

Dr. Carlos García Rodríguez

Co-director de Tesis:

Dr. Marco Antonio Contreras Ordaz

H. Cd. de Huajuapán de León, Oaxaca, México, Diciembre de 2014

Sinodales:

Dr. Jesús Linares Flores
MC. Esteban Osvaldo Guerrero Ramírez
Dr. Fermin Hugo Ramírez Leyva
Dr. Edgardo Yescas Mendoza

Director de tesis:

Dr. Carlos García Rodríguez

Co-Director de tesis:

Dr. Marco Antonio Contreras Ordaz

Dedicatoria

*Con mucho cariño a:
Mi familia, especialmente a mi
madre Eugenia que me ha a dado todo
en la vida.*

Agradecimientos

Principalmente a ti madre por todo el apoyo que me has brindado, y que me ha dado las fuerzas para seguir adelante. Por que se todo lo que has tenido que pasar para que yo pudiera llegar a este punto. Por que se que no ha sido fácil tener que pasar tantos problemas y tantas necesidades, solo para que tus hijos tuvieran lo necesario. Y por que se que por la única razón por la que trabajas y sigues luchando es por nosotros tus hijos, por eso te agradezco infinitamente.

A ti Jero, por estar cuando te necesitaba, por aconsejarme, por enseñarme lo que es cumplir con una responsabilidad a pesar de todo, por mostrarme lo que es humildad, por que has sido un padre para mi. Y todo esto sin que tuvieras la obligación de hacerlo, por eso te admiro y te doy gracias.

A ustedes Erick (manto) y Eugenia (manta), que también me han apoyado directa e indirectamente al apoyar a nuestra madre, por que también se que dejaron varias cosas para que yo pudiera seguir estudiando, por que confían en mí. Espero nunca defraudar esa confianza que me tienen.

Al Dr. Carlos García Rodríguez y al Dr. Marco Antonio Contreras Ordaz, director y co-director de la presente tesis, por el apoyo concedido en el desarrollo de esta tesis.

A mis sinodales Dr. Jesús Linares Flores, MC. Esteban Osvaldo Guerrero Ramírez, Dr. Fermin Hugo Ramírez Leyva, Dr. Edgardo Yescas Mendoza, por su disposición a revisar el presente trabajo de tesis desde el inicio de la realización de este, así como ver la mejor manera para que yo finalizará este proyecto. Y un agradecimiento especial al Dr. Jesús Linares Flores por su apoyo e interés en la finalización de este proyecto desde las clases recibidas en la maestría hasta la culminación de este, por que usted es el culpable de que ahora me guste el control.

A la Universidad Tecnológica de la Mixteca por darme la oportunidad de cursar la maestría. A Carmen y Celes, que me brindaron su apoyo y atención, pero sobre todo por su amistad.

A ustedes doña Oly y doña Mary, que me brindaron su amistad y apoyo desde que estuve en la licenciatura y por compartir muchos momentos de alegría.

Agradezco también de forma especial al CONACYT por el apoyo económico brindado (Becario No 302610), ya que sin este apoyo no hubiera sido posible mi

IV

estadía en la maestría.

Resumen

El presente trabajo de tesis trata sobre el diseño e implementación de un controlador robusto de seguimiento suave de posición angular del Motor Síncrono de Imanes Permanentes (MSIP). El modelo del MSIP se escribe en el marco de referencia d-q y se utiliza la linealización entrada salida para escribir el modelo no lineal afín en su forma normal de Brunovsky desacoplada. El diseño del controlador se basa en la técnica Backstepping, el cual adapta el valor estimado del parámetro de par de carga, así como el valor de los términos de fricción no modelados, a través de un observador de orden reducido, lo que minimiza los efectos de estas perturbaciones sobre la posición controlada del eje. Además, en este trabajo se utiliza un sensor resolutor (resolver) en combinación con un observador basado PLL (Phase Lock Loop) para obtener la posición y velocidad angular del rotor. Se utiliza el enfoque de estabilidad de entrada al estado para demostrar la estabilidad en lazo cerrado del sistema sustancialmente perturbado.

Índice general

Dedicatoria	I
Agradecimientos	III
Resumen	V
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Estado del arte	2
1.2. Planteamiento del problema	5
1.3. Hipótesis	5
1.4. Objetivos	6
1.5. Metas	6
1.6. Justificación	7
1.7. Estructura de la tesis	7
2. FUNDAMENTOS PARA EL CONTROL DEL MOTOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES	9
2.1. Introducción	9
2.2. Modelo dinámico del motor síncrono de imanes permanentes	9
2.2.1. Transformaciones de Clarke y Park	12
2.2.2. Expresión de par eléctrico del motor	16
2.2.3. Modelo del motor síncrono de imanes permanentes de polos superficiales	18
2.3. Controlador backstepping	19
2.3.1. Estabilidad en el sentido de Lyapunov	19
2.3.2. Integrador Backstepping	23
2.3.3. Sistemas estrictamente retroalimentados	24
2.4. Linealización entrada salida	27
2.4.1. Derivadas de Lie	27
2.4.2. Corchetes de Lie	28
2.4.3. Grado relativo	29
2.4.4. Linealización exacta por realimentación	31

3. DISEÑO DEL CONTROLADOR NO LINEAL BACKSTEPPING	35
3.1. Linealización exacta por realimentación del modelo del motor	35
3.2. Observador de posición	37
3.3. Observador del parámetro de par de carga	39
3.4. Diseño de la ley de control	40
3.5. Estabilidad entrada al estado	45
4. RESULTADOS	49
4.1. Resultados en simulación	49
4.2. Descripción de la plataforma experimental	54
4.3. Resultados experimentales	59
5. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO	65
5.1. Conclusiones	65
5.2. Trabajo futuro	66
A. Linealización en forma exacta del MSIP	67
B. Publicación realizada	71
C. Prueba del Lema 1 del integrador Backstepping	87
Bibliografía	89

Índice de figuras

2.1.	Representación del vector \mathbf{I}_{abc} .	12
2.2.	Efecto de la transformación de Clarke.	13
2.3.	Voltajes del estator en diferentes marcos de referencia relacionados a través de las transformaciones de Clarke y Park.	14
2.4.	Modelo del circuito equivalente del motor MSIP	17
3.1.	El sensor <i>resolver</i> es un transductor de posición absoluto basado en un transformador rotatorio.	37
3.2.	Observador PLL de la posición y velocidad angular del rotor	39
4.1.	Diagrama a bloques del esquema de la co-simulación Matlab–Simulink/PSIM.	51
4.2.	Respuesta del seguimiento de posición en presencia de un par aplicado en $t=5$ s.	52
4.3.	Respuesta del estimador de Par	53
4.4.	Comportamiento de las corrientes i_d e i_q	53
4.5.	Comportamiento del ISE para la posición variando las constantes del controlador	54
4.6.	Comportamiento del ISE para la posición variando la constante del observador de par	55
4.7.	Diagrama general de la plataforma experimental.	56
4.8.	Señales entrada/salida en la interfaz del equipo dSPACE	57
4.9.	Plataforma experimental del control del MSIP	59
4.10.	Resultados experimentales y de simulación: (A) Respuesta de la posición angular, (B) parámetro de par de carga	60
4.11.	Respuesta del observador de velocidad	61
4.12.	Resultados experimentales y de simulación: (A) respuesta de la corriente de cuadratura, (B) respuesta de la corriente directa (primera salida plana del sistema $y_1 = i_d$)	62
4.13.	Resultados experimentales y de simulación: entradas de control para la trayectoria de control deseado	62

Índice de Tablas

4.1. Parámetros del MSIP	50
4.2. Descripción de señales de entrada-salida de la plataforma al equipo dSPACE.	58

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

En la industria existen dos tipos de motores, estos son los motores de corriente directa (CD) y los de corriente alterna (CA). Los motores de CA se clasifican en asíncronos y síncronos. Los motores de inducción o motores asíncronos trifásicos son los motores más utilizados en la industria, resistentes, baratos y fáciles de mantener. Estos motores funcionan a velocidad constante desde par cero hasta par nominal. Para controlar la velocidad de los motores de inducción trifásicos, con confiabilidad y buena exactitud, actualmente se utilizan los controladores electrónicos de frecuencia variable [1].

Por otro lado, en los últimos años los motores síncronos de imanes permanentes (MSIP) están reemplazando a los motores de inducción (o jaula de ardilla) en algunas aplicaciones industriales. Esto se debe a que los MSIP pueden proporcionar una mayor potencia a velocidad baja con un menor volumen. Además de aportar un alto rendimiento en aplicaciones en las que se necesita corregir el factor de potencia, los motores síncronos aportan también pares elevados y velocidad constante bajo cargas variables, lo que se traduce en costos de operación y mantenimiento reducidos. Estas ventajas explican el empleo de estos motores en una gran variedad de aplicaciones. Entre las típicas pueden citarse: trituradoras, molinos y cintas transportadoras en la minería y las canteras; ventiladores, bombas y compresores en la siderurgia; extrusoras en la industria del papel; astilladoras y descortezadoras en la transformación de la madera; bombas en el tratamiento de aguas residuales; compresores y ventiladores de alta capacidad en las industrias química y petroquímica; molinos y trituradoras en las fábricas de cemento; y bombas de inyección de agua en plataformas petrolíferas flotantes [2]. Otras ventajas de los MSIP son su baja inercia, alta eficiencia y confiabilidad [3]. Sin embargo, el MSIP tiene algunos inconvenientes, por ejemplo para su manejo se requiere emplear circuitos electrónicos sofisticados por lo que su costo se incrementa, [4] y [5]. Otra desventaja es el efecto de dentado en el eje del motor, que se produce por la atracción entre los magnetos y los polos del estator en la posición de reposo. El rotor se resiste al giro porque el

magneto intenta permanecer con el polo anterior, hasta que el magneto sobrepasa la mitad de la distancia entre los polos, donde la atracción del siguiente polo es más fuerte que la del polo anterior, lo que produce un golpeteo o un efecto de salto a baja velocidad, este efecto puede ser entendido como un tipo de perturbación periódica dependiente de la posición, además de que este efecto produce la necesidad de un gran par para iniciar la rotación [6].

Los controladores electrónicos comúnmente usados para el funcionamiento de este tipo de motores son los inversores trifásicos con bus de voltaje [7], [8], [9],[10] y [11]. Los inversores son utilizados en el campo de la electrónica de potencia para la conversión de energía eléctrica y su función principal es generar una señal sinusoidal con amplitud y/o frecuencia variable a partir de fuentes de CD [12]. El inversor trifásico consiste de tres ramas de medio puente, donde el interruptor superior y el inferior se controlan complementariamente. Como el tiempo de apagado del dispositivo es mayor que el tiempo de encendido, se debe esperar un tiempo entre el apagado de uno de los transistores del medio puente y el encendido del otro para evitar que ambos estén encendidos al mismo tiempo y se produzca un cortocircuito [13]. A este tiempo de espera comúnmente se le llama tiempo muerto, y es muy importante para la operación segura del inversor. Se han hecho estudios sobre el análisis de los convertidores CD/CA y las técnicas de modulación que han ocupado para su correcto funcionamiento. En [12] se presenta un análisis de las principales variaciones de los algoritmos de modulación por ancho de pulso (Pulse Width Modulation,PWM), aplicados a inversores trifásicos dentro del esquema de accionamientos eléctricos para motores de CA. En [14], [15] y [16] se propone un inversor trifásico fuente de voltaje de tres ramas, el cual está compuesto por 6 dispositivos de conmutación cada uno con un diodo de conexión inversa para reducir la corriente reactiva de retorno a la fuente para finalmente hacer el estudio de las diferentes técnicas de conmutación.

Debido al interés de aprovechar las ventajas de este motor se han empleado diversas técnicas de control de posición y velocidad.

1.1. Estado del arte

A manera de resolver el problema del control de posición y velocidad del MSIP, diferentes autores han aplicado varias técnicas de control, tales como control H_∞ [17] y [18], control por modos deslizantes [19] y [20], control adaptable [21] y [22], control backstepping [20],[23],[24] y [25], backstepping adaptable [26],[27] y [28], control de lógica difusa [21], [25],[28] y [29], control robusto [30], controladores clásicos [29] y [31], el principio de máximo torque por ampere control (MTPA) [32], control basado en pasividad [33], por linealización entrada salida [24],[27] y [34], control basado en planitud [35], rechazo activo de perturbaciones [38], control por debilitamiento de

flujo [39], control por campo orientado [40] y [41], etcetera.

En Lee *et. al.* [17] desarrollan un control para el seguimiento de la posición angular del MSIP mediante un controlador adaptable H_∞ , por medio de resultados de simulación y experimentales validan la eficiencia del controlador propuesto. Ghafari *et. al.* [18] considera a la carga como una perturbación externa y el control no lineal H_∞ es utilizado para minimizar esta influencia en la posición del rotor, el control por modos deslizantes es utilizado para proporcionar robustez al controlador en presencia de la variación de parámetros del motor. Otro controlador usado para este tipo de motor ha sido el control por modos deslizantes, como es el caso de Wai [19], donde desarrolla un control por modos deslizantes para el control de la posición angular, y utilizando un observador por red neuronal difusa ajustan las incertidumbres y el caso de Qian *et. al.* [20] donde unen la técnica de control backstepping con el control por modos deslizantes para controlar el seguimiento de la velocidad angular del MSIP, demostrando la estabilidad del controlador, en ambos trabajos muestran resultados a nivel simulación y experimental. El control adaptable también es utilizado por Jung *et. al.*[21] y Hicham *et. al.*[22] para el control de la velocidad, en [21] proponen un control adaptable difuso y verifican analíticamente la estabilidad global del sistema, Hicham y Pierre [22] controlan la velocidad de un MSIP de 5 pares de polos y utilizan un observador para aproximar las perturbaciones de fricción y par de carga, en ambos trabajos se presentan resultados experimentales.

Uno de los controles comúnmente usados para el control de la velocidad y posición ha sido el control por lógica difusa, Wang *et. al.* [25] por ejemplo, aplican la técnica de control difuso y backstepping adaptable para el control del MSIP, utilizan la lógica difusa para aproximar las funciones no lineales desconocidas y los términos de fricción no lineales para contrarrestar las incertidumbres y dinámicas no modeladas, el trabajo se realiza a nivel simulación. Los trabajos [29] y [28] muestran resultados experimentales del control de la velocidad y posición respectivamente mediante el control difuso, en Elmas *et. al.*[29] aplican un controlador neuro-difuso, y comparan este controlador con un controlador clásico PI obteniendo mejores resultados con el propuesto cuando un par de 1Nm se aplica, mientras que Jinpeng *et. al.*[28] controlan la posición del MSIP mediante la técnica de control backstepping adaptable y sistemas de lógica difusa para determinar las no linealidades. También Shyu *et al.* [30] diseñaron un control robusto de posición del motor síncrono empleando un control de estructura variable y un método lineal-cuadrático, mostrando con resultados experimentales que la aproximación que proponen proporciona una buena respuesta y es robusta a la variación de parámetros y a la perturbación de carga, sin embargo, el rango de operación que muestran es tan solo de 0 a 0.5 rad.

Otro controlador muy utilizado en la industria es el control proporcional integral derivativo (PID), por ejemplo García *et al.* [31] presentan un nuevo tipo de PID adaptable para controlar la posición de un MSIP, pero en lugar de actualizar las ganancias del PID, la salida del controlador es multiplicada por un factor de corrección

adaptable, el cual es estimado por una red neuronal lineal adaptiva (ADALINE, por sus siglas en inglés). Utilizando el principio MTPA y la técnica de moldeo de energía, Haisheng et al. [32] desarrollan un modelo y el control de posición de un MSIP. Otro caso del empleo de una técnica de control por pasividad es el de Duran [33], donde se realiza un seguimiento de trayectoria de velocidad y posición del rotor. En este trabajo se hace una comparativa a nivel de simulación entre esta técnica y los controladores clásicos de campo orientado, concluyendo que la técnica por pasividad tiene un mejor desempeño. En ciertas aplicaciones se necesita que el motor se eleve por encima de su velocidad nominal, esto fue logrado mediante la técnica de control por debilitamiento de flujo. Por ejemplo Chen y Chin [39], desarrollan un controlador para la velocidad utilizando un control por debilitamiento de flujo, expandiendo así el rango de operación de la velocidad cuando ocurre la saturación del voltaje. Sin embargo, al ampliar el rango de operación de la velocidad disminuye el rango de operación del par de carga, los resultados de simulación y experimentales muestran que cuando se necesita una velocidad por encima de la nominal, la corriente i_d toma un valor diferente de cero. Como se ha visto anteriormente, en ocasiones es necesario utilizar un observador para estimar las entradas de perturbación exógenos y endógenos que afectan la dinámica del sistema, como en el trabajo presentado por Sira *et. al.* [38], donde por medio de un control mediante rechazo activo de perturbaciones logran controlar el seguimiento de la velocidad angular de un MSIP, y utilizando un observador de alta ganancia GPI estiman las perturbaciones que afectan al sistema, mostrando la efectividad del controlador por medio de los resultados de simulación. Delaleau y Stanković [35], presentan un control de posición basado en un control por planitud diferencial, en donde a partir del modelo en el marco de referencia $d-q$ utilizan la linealización entrada-salida y aplican un observador del par para estimar las perturbaciones del sistema, mostrando resultados a nivel simulación. También se ha utilizado en el control de la velocidad del MSIP al control por campo orientado, en el caso particular de Vindel *et. al.* [40], muestran resultados a nivel simulación y experimental sobre el control de velocidad utilizando un resolver para medir la posición del rotor e implementan el control en un equipo dSPACE.

En 1996 Bojan *et. al.* [34], presenta un trabajo en el cual, basándose en el modelo del MSIP en el marco de referencia $d-q$, aplican una linealización en forma exacta, y aplicando un controlador lineal realizan el seguimiento de la posición angular del motor. Para finalizar utilizan un observador del par de carga. Muestran resultados a nivel experimental. De forma similar en [24] y [27] se basan en el modelo del motor en el marco de referencia $d-q$ para aplicar el método de linealización entrada-salida y aplican la técnica backstepping para seguimiento de la posición y velocidad respectivamente, los resultados a nivel simulación muestran que el esquema de control es robusto ante incertidumbre de parámetros y perturbaciones del par de carga.

Backstepping es una técnica para el diseño de controladores desarrollada recientemente para el control de sistemas no lineales, ha sido aplicado satisfactoriamente

en el control de los MSIP tanto para el control de posición como para control de velocidad, como en el trabajo presentado por Liu et al. [23], donde comparan esta técnica con un esquema convencional de control proporcional derivativo (PD) obteniendo mejores resultados con la técnica de control backstepping. Por otro lado Rahman *et. al.*[26] diseñan un controlador backstepping adaptable para el control de seguimiento de la velocidad angular con el cual compensan las incertidumbres del sistema, los resultados de simulación y experimentales afirman que el controlador es robusto ante perturbaciones de par de carga.

En la Universidad Tecnológica de la Mixteca (UTM), son pocos los trabajos realizados en relación al motor síncrono de imanes permanentes. En el año 2011 Ramírez et al. [41] trabajaron en el control por campo orientado de un MSIP en el programa de simulación Simmon. Actualmente, el estudiante de Maestría en Electrónica de la UTM, Carlos Escobar Noriega, está trabajando de forma experimental en el control del MSIP, aplicando un control de velocidad basado en pasividad sin la necesidad de medir la posición del rotor.

1.2. Planteamiento del problema

El control de posición no es una tarea sencilla, debido a que cuando se trabaja al motor a velocidades muy bajas se produce un efecto de dentado que puede verse como una perturbación del sistema. En aplicaciones industriales tales como: robótica, vehículos eléctricos etc. se requiere de una gran precisión y al mismo tiempo seguridad de ahí que un control de posición sensorless no aplica, además de que el modelo es un sistema multivariable, acoplado y altamente no lineal.

Aplicando las características eléctricas del MSIP, se elige la técnica backstepping para el diseño de un controlador de la posición angular del MSIP, ya que de acuerdo a la literatura consultada esta metodología consigue ser un control de gran desempeño y robustez, dinámico bajo perturbaciones internas y externas. No obstante, se requiere de una matemática extensa en el diseño de este controlador en sistemas de cuarto orden, por esta razón se plantea idear una ley de control de la posición angular del motor síncrono de imanes permanentes en coordenadas $d - q$ que permita realizar seguimiento de trayectorias a pesar del fenómeno de dentado, que sea robusta a cambios de carga seccionalmente constantes, considerando para ello que se posee un sensor físico para conocer la posición del motor en todo momento y que pueda ser verificable experimentalmente.

1.3. Hipótesis

Dado que el modelo del MSIP en coordenada $d - q$ puede ser linealizado en forma exacta tomando a la corriente i_d y a la posición θ como salidas linealizantes, [34], el

sistema es plano y estas variables son las salidas planas. Entonces podemos plantear la siguiente hipótesis:

- *A partir del modelo del sistema del MSIP linealizado en forma exacta, se puede facilitar la obtención de una ley de control robusta utilizando la metodología Backstepping y realizar tareas de seguimiento de trayectorias sobre la posición angular del motor.*
- *Es posible diseñar un controlador robusto de seguimiento de la posición a variaciones súbitas de par de carga mediante la metodología anterior y un observador de orden reducido.*

1.4. Objetivos

Objetivo general

Realizar el control directo de la posición angular de un MSIP en presencia de pares de carga seccionalmente constantes.

Objetivos particulares

1. Diseñar una interfaz con la plataforma dSPACE para la adquisición y generación de señales para el control del MSIP.
2. Integrar una plataforma experimental para el control de la posición del MSIP y realizar pruebas en lazo abierto.
3. Estudiar la dinámica de los MSIP y diseñar el control de la posición angular mediante la técnica Backstepping.
4. Realizar pruebas experimentales del control de posición angular para el MSIP.
5. Documentar y publicar los resultados de esta investigación.

1.5. Metas

1. Implementar la interfaz Hardware-Software.
2. Implementación de un controlador Backstepping para el seguimiento de la posición angular de un MSIP, empleando el software Matlab/Simulink-PSIM.
3. Implementación experimental del controlador en lazo cerrado de la plataforma del sistema.
4. Publicar los resultados experimentales en un artículo científico.

1.6. Justificación

Actualmente, se están reemplazando los motores de corriente directa y motores de corriente alterna asíncronos por motores síncronos de imanes permanentes en aplicaciones de baja potencia debido a las características con las que éstos cuentan. Es por ello que una investigación en este tipo de motores y el desarrollo de nuevas aplicaciones y tecnología al respecto es de gran relevancia. Puntualizando, algunos aspectos que justifican este tema de tesis son:

- *Necesidad de un controlador de posición para los MSIP.* El control del MSIP a velocidades bajas es difícil, sin embargo, a fin de aprovechar las características de este motor es necesario desarrollar técnicas de control para este tipo de motores en estas condiciones.
- *La técnica de control presentada.* Aunque el procedimiento de diseño del controlador presentado es en ocasiones bastante complejo, se ha visto en la literatura que los controladores obtenidos por esta técnica pueden ser combinados para proporcionar mayor robustez al sistema de control.
- *Se presentan resultados experimentales.* Además de mostrar resultados a nivel simulación, se muestran resultados experimentales, los cuales permiten hacer una comparativa entre lo real y lo simulado.

1.7. Estructura de la tesis

El presente trabajo de tesis está estructurado de la siguiente forma: en el primer capítulo se ha presentado una revisión del estado del arte sobre el control de los motores síncronos de imanes permanentes (MSIP), se ha definido el planteamiento del problema y los objetivos de esta investigación. En el capítulo 2 se muestra el modelo matemático del MSIP, así como los fundamentos para la obtención de su controlador no lineal por Backstepping y en la parte final se introduce la noción de estabilidad entrada al estado que permitirá determinar la estabilidad del sistema completo en lazo cerrado. En el tercer capítulo se obtiene el modelo del MSIP en su forma normal de Brunovski, el cual es utilizado para diseñar la ley de control Backstepping y un observador de orden reducido para la estimación del par de carga. También se analiza la estabilidad del esquema completo. En el cuarto capítulo se presentan resultados a nivel de simulación, así como una descripción de la plataforma experimental, también se muestra el análisis de los resultados obtenidos a nivel experimental. En el capítulo final se presentan las conclusiones del trabajo de tesis, algunas sugerencias de cómo mejorar los resultados y trabajos futuros al respecto.

Capítulo 2

FUNDAMENTOS PARA EL CONTROL DEL MOTOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES

2.1. Introducción

Los motores eléctricos pueden clasificarse de acuerdo al tipo de corriente que manejan, esto es, de CA o CD. Dentro de los motores de CA se encuentran los de tipo síncrono y asíncrono. Los motores síncronos a su vez pueden clasificarse por el tipo de rotor que emplean, si este es de tipo devanado o de imanes permanentes. Los MSIP pueden ser de polos salientes (interiores) o de polos superficiales. El motor utilizado en esta investigación es un MSIP de polos superficiales, modelo BSM80N-275AA de la marca Baldor. En la siguiente sección se abordará el desarrollo del modelo de este motor.

2.2. Modelo dinámico del motor síncrono de imanes permanentes

Para obtener el modelo matemático del motor síncrono, se harán las siguientes suposiciones:

- Los devanados de estator son devanados distribuidos sinusoidalmente, desfasados uno de otro 120° entre sí.
- No existe un efecto térmico sobre las resistencias del estator ni sobre el imán permanente.

- Los imanes permanentes del rotor están hechos de un material magnético lineal, es decir, no existe un efecto de saturación.

Entonces las ecuaciones del voltaje del estator pueden escribirse de forma matricial como, [42].

$$\mathbf{V}_{abc s} = \mathbf{R}_s \cdot \mathbf{I}_{abc s} + p\lambda_{abc s} \quad (2.1)$$

donde

$$\mathbf{V}_{abc s} = \begin{bmatrix} v_{as} \\ v_{bs} \\ v_{cs} \end{bmatrix}; \mathbf{R}_s = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & R_s \end{bmatrix}; \mathbf{I}_{abc s} = \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \end{bmatrix}; \lambda_{abc s} = \begin{bmatrix} \lambda_{as} \\ \lambda_{bs} \\ \lambda_{cs} \end{bmatrix}$$

La resistencia de los devanados del estator es denotada por \mathbf{R}_s , p representa el operador diferencial $\frac{d}{dt}$. Las variables $\mathbf{V}_{abc s}$, $\mathbf{I}_{abc s}$ y $\lambda_{abc s}$ son los vectores de voltaje, corriente y del flujo ligado del estator por fase respectivamente. Los flujos ligados $\lambda_{abc s}$ son creados por los flujos $\lambda_{abc s(s)}$, debidos a las corrientes de estator, y por los flujos de los imanes permanentes del rotor $\lambda_{abc s(r)}$, como muestra la ecuación matricial (2.2). Los flujos $\lambda_{abc s(s)}$ se obtienen por medio de la matriz de auto inductancias (L_{aas} , L_{bbs} , L_{ccs}) e inductancias mutuas (L_{abs} , L_{acs} , L_{bas} , L_{bcs} , L_{cas} , L_{cbs}) y el vector de corrientes $\mathbf{I}_{abc s}$. El vector $\lambda_{abc s(r)}$ es función del flujo proveniente de los imanes del rotor, visto desde el estator con amplitud λ_m , y del ángulo eléctrico del rotor, θ_r .

$$\lambda_{abc s} = \lambda_{abc s(s)} + \lambda_{abc s(r)} \quad (2.2)$$

donde

$$\lambda_{abc s(s)} = \mathbf{L}_{abc s} \cdot \mathbf{I}_{abc s} = \begin{bmatrix} L_{aas} & L_{abs} & L_{acs} \\ L_{bas} & L_{bbs} & L_{bcs} \\ L_{cas} & L_{cbs} & L_{ccs} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{I}_{abc s} \quad (2.3)$$

$$\lambda_{abc s(r)} = \lambda_m \begin{bmatrix} \sin(\theta_r) \\ \sin\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Las autoinductancias e inductancias mutuas de las bobinas del estator son mostradas en (2.5) y (2.6) respectivamente. Nótese que estas inductancias son también función del ángulo eléctrico del rotor.

$$\begin{aligned} L_{aas} &= L_{ls} + L_A - L_B \cos 2\theta_r \\ L_{bbs} &= L_{ls} + L_A - L_B \cos\left(2\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) \\ L_{ccs} &= L_{ls} + L_A - L_B \cos\left(2\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}
L_{abs} &= L_{bas} = -\frac{1}{2}L_A - L_B \cos\left(2\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) \\
L_{acs} &= L_{cas} = -\frac{1}{2}L_A - L_B \cos\left(2\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) \\
L_{bcs} &= L_{cbs} = -\frac{1}{2}L_A - L_B \cos 2\theta_r
\end{aligned} \tag{2.6}$$

La autoinductancia L_{l_s} es debida primordialmente al flujo disperso de las últimas vueltas del devanado. Ésta es la misma en las tres fases del estator y los términos L_A y L_B son las inductancias de las bobinas dadas por:

$$\begin{aligned}
L_A &= \left(\frac{N_s}{2}\right)^2 \pi \mu_0 r l \varepsilon_1 \\
L_B &= \frac{1}{2} \left(\frac{N_s}{2}\right)^2 \pi \mu_0 r l \varepsilon_2
\end{aligned} \tag{2.7}$$

donde N_s es el número de vueltas de las bobinas de cada fase, r es el radio desde el centro de la máquina hasta la circunferencia interior del estator, l es la longitud axial del entrehierro de la máquina y μ_0 es la permeabilidad del aire. El grosor mínimo y máximo del entrehierro, denotados por ε_1 y ε_2 están definidos como:

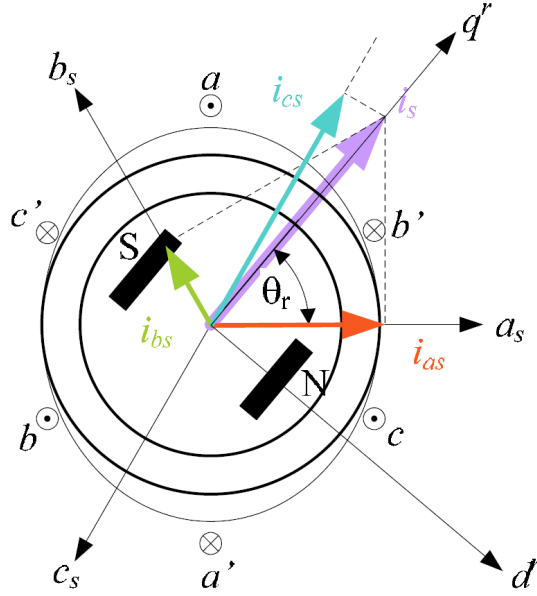
$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{g_{\min}} + \frac{1}{g_{\max}} \right) \\
\varepsilon_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{g_{\min}} - \frac{1}{g_{\max}} \right)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

donde g_{\min} y g_{\max} son la longitud mínima y máxima del entrehierro. Finalmente sustituyendo los términos correspondientes en la ecuación (2.1) se obtiene las ecuaciones del motor en forma matricial,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} v_{as} \\ v_{bs} \\ v_{cs} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & R_s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{aas} & L_{abs} & L_{acs} \\ L_{bas} & L_{bbs} & L_{bcs} \\ L_{cas} & L_{cbs} & L_{ccs} \end{bmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \end{bmatrix} \\
&+ \lambda_m \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \sin(\theta_r) \\ \sin\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Nótese que la ecuación (2.9) es no lineal y dependiente del ángulo θ_r , lo cual complica su análisis y el cálculo del par de carga. La figura 2.1 muestra como las corrientes sinusoidales que se aplican a cada fase del estator dependen de este ángulo.

A fin de facilitar el diseño de un controlador, la dependencia de las ecuaciones respecto a θ_r puede ser eliminada. Este problema es resuelto modificando la ecuación (2.9) mediante las transformaciones de Clark y Park, explicadas en el siguiente apartado.

Figura 2.1: Representación del vector \mathbf{I}_{abc} .

2.2.1. Transformaciones de Clarke y Park

La figura 2.2 muestra el vector de corrientes I_s , cuyas componentes sinusoidales a, b y c son en este caso no ortogonales entre sí. La *transformación de Clarke* convierte un sistema no ortogonal en un sistema ortogonal. Al aplicar la transformación de Clarke a $\mathbf{I}_{\alpha\beta}$ se lleva este vector de un plano de referencia trifásico abc a un sistema de referencia ortogonal $\alpha\beta$. La matriz de transformación de Clarke (2.10), es una matriz unitaria cuya inversa coincide con su transpuesta. La multiplicación de \mathbf{I}_{abc} con \mathbf{P} convierte este vector a un vector $\mathbf{I}_{\alpha\beta}$ de dos componentes (2.11). Sin embargo esta transformación no resuelve el problema de la dependencia del ángulo θ_r .

$$\mathbf{P} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{I}_{\alpha\beta} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{I}_{abc} ; \mathbf{I}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

La dependencia del ángulo se elimina haciendo girar a todo el sistema de referencia $\alpha\beta$ a la par del ángulo θ_r . Esto se logra aplicando una matriz de rotación (2.12), la cual hace girar los ejes de referencia α y β con el valor del ángulo θ_r , obteniendo así el sistema en el marco de referencia $d-q$ (2.13). La figura 2.2 muestra los nuevos

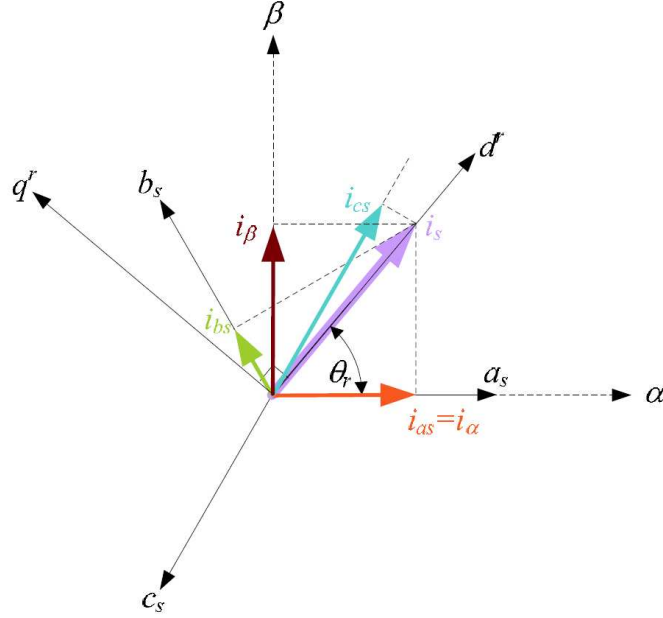


Figura 2.2: Efecto de la transformación de Clarke.

ejes de trabajo d^r y q^r , que son los ejes magnéticos del rotor.

$$\rho(\theta_r) = \begin{bmatrix} \cos \theta_r & \sin \theta_r & 0 \\ -\sin \theta_r & \cos \theta_r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{I}_{dq0s}^r = \rho(\theta_r) \cdot \mathbf{I}_{\alpha\beta} \quad (2.13)$$

La figura 2.3 muestra claramente que la transformación de Clarke convierte un sistema trifásico sinusoidal balanceado a un sistema de dos fases sinusoidal, y que al aplicar la operación de rotación a este sistema bifásico los voltajes se vuelven constantes.

La combinación de la transformada de Clarke y la operación de rotación se le conoce como *transformada de Park*. Esta transformada convierte un sistema trifásico estacionario en un sistema trifásico ortogonal que gira en sincronismo con el ángulo θ_r del rotor. Sustituyendo (2.11) en (2.13) obtenemos la transformación de Park (2.14).

$$\mathbf{I}_{dq0s}^r = \rho(\theta_r) \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{I}_{abc s} = \mathbf{T}(\theta_r) \cdot \mathbf{I}_{abc s} \quad (2.14)$$

$$\begin{bmatrix} i_d^r \\ i_q^r \\ i_0^r \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\theta_r) & \cos(\theta_r - \frac{2}{3}\pi) & \cos(\theta_r + \frac{2}{3}\pi) \\ -\sin(\theta_r) & -\sin(\theta_r - \frac{2}{3}\pi) & -\sin(\theta_r + \frac{2}{3}\pi) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

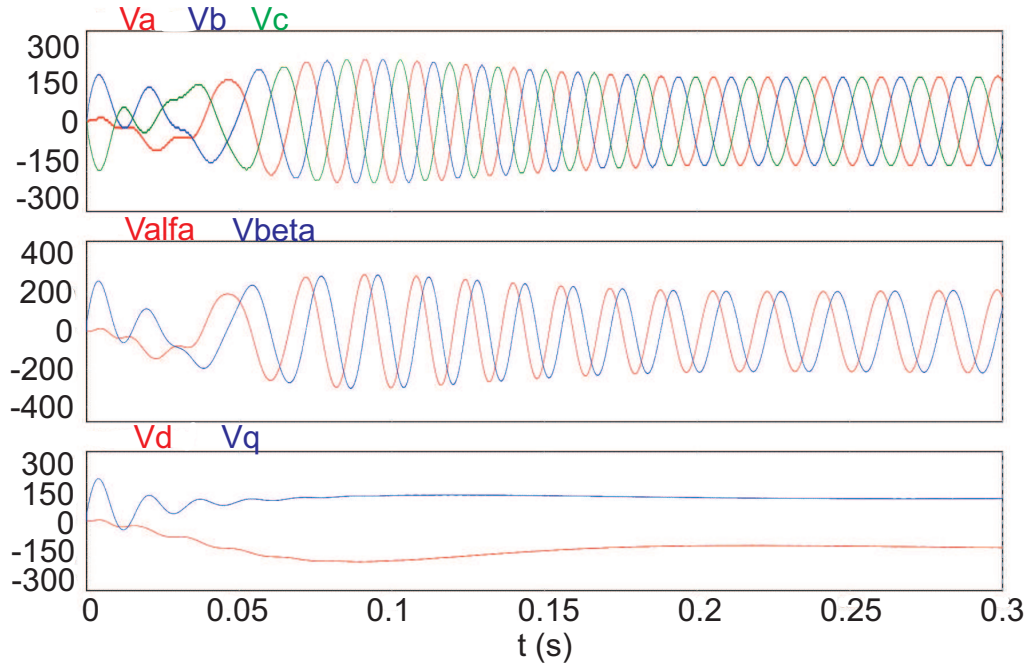


Figura 2.3: Voltajes del estator en diferentes marcos de referencia relacionados a través de las transformaciones de Clarke y Park.

donde i_d^r e i_q^r son las corrientes en el eje directo y de cuadratura, respectivamente. Como se mencionó en la sección anterior las ecuaciones del motor están dadas por (2.1):

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{abc s} &= \mathbf{R}_s \cdot \mathbf{I}_{abc s} + \frac{d}{dt} \lambda_{abc s} \\ &= \mathbf{R}_s \cdot \mathbf{I}_{abc s} + \frac{d}{dt} (\mathbf{L}_{abc s} \cdot \mathbf{I}_{abc s}) + \frac{d}{dt} (\lambda_{abc s(r)}) \end{aligned}$$

aplicando la transformación de Park a la ecuación anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\theta_r) \cdot \mathbf{V}_{abc s} &= \mathbf{T}(\theta_r) \cdot \mathbf{R}_s \cdot \mathbf{I}_{abc s} + \mathbf{T}(\theta_r) \cdot \frac{d}{dt} (\mathbf{L}_{abc s} \cdot \mathbf{I}_{abc s}) \\ &\quad + \mathbf{T}(\theta_r) \cdot \frac{d}{dt} (\lambda_{abc s(r)}) \end{aligned}$$

buscando que la ecuación resulte en una forma acorde a lo que se necesita, se mul-

tiplica la matriz identidad a algunos términos sin afectar la ecuación, resultando:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(\theta_r) \cdot \mathbf{V}_{abc s} &= \mathbf{T}(\theta_r) \cdot \mathbf{R}_s \cdot \mathbf{T}(\theta_r)^{-1} \cdot \mathbf{T}(\theta_r) \cdot \mathbf{I}_{abc s} \\ &+ \mathbf{T}(\theta_r) \cdot \frac{d}{dt}(\mathbf{L}_{abc s} \cdot \mathbf{T}(\theta_r)^{-1} \cdot \mathbf{T}(\theta_r) \cdot \mathbf{I}_{abc s}) \\ &+ \mathbf{T}(\theta_r) \cdot \frac{d}{dt}(\lambda_{abc s(r)})\end{aligned}$$

de la ecuación anterior se puede observar que los vectores han sido transformados al marco de referencia $d - q$,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{dq0s}^r &= \mathbf{T}(\theta_r) \cdot \mathbf{R}_s \cdot \mathbf{T}(\theta_r)^{-1} \cdot \mathbf{I}_{dq0s}^r \\ &+ \mathbf{T}(\theta_r) \cdot \frac{d}{dt}(\mathbf{L}_{abc s} \cdot \mathbf{T}(\theta_r)^{-1} \cdot \mathbf{I}_{dq0s}^r) \\ &+ \frac{d}{dt}\lambda_{dq0s(r)}^r\end{aligned}$$

desarrollando la derivada en el tiempo en esta expresión se tiene,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{dq0s}^r &= \mathbf{T}(\theta_r) \cdot \mathbf{R}_s \cdot \mathbf{T}(\theta_r)^{-1} \cdot \mathbf{I}_{dq0s}^r + \mathbf{T}(\theta_r) \cdot \frac{d}{dt}(\mathbf{L}_{abc s}) \cdot \mathbf{T}(\theta_r)^{-1} \cdot \mathbf{I}_{dq0s}^r \\ &+ \mathbf{T}(\theta_r) \cdot \mathbf{L}_{abc s} \cdot \frac{d}{dt}(\mathbf{T}(\theta_r)^{-1}) \cdot \mathbf{I}_{dq0s}^r \\ &+ \mathbf{T}(\theta_r) \cdot \mathbf{L}_{abc s} \cdot \mathbf{T}(\theta_r)^{-1} \cdot \frac{d}{dt}(\mathbf{I}_{dq0s}^r) + \frac{d}{dt}\lambda_{dq0s(r)}^r\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(\theta_r) \cdot \mathbf{R}_s \cdot \mathbf{T}(\theta_r)^{-1} &= \mathbf{R}_s = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & R_s \end{bmatrix} \\ \frac{d}{dt}\lambda_{0dq s(r)}^r &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_r \lambda_m \end{bmatrix} \\ \mathbf{T}(\theta_r) \cdot \frac{d}{dt}(\mathbf{L}_{abc s}) \cdot \mathbf{T}(\theta_r)^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\omega_r L_B \\ 0 & 3\omega_r L_B & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{T}(\theta_r) \cdot \mathbf{L}_{abc s} \cdot \frac{d}{dt}(\mathbf{T}(\theta_r)^{-1}) &= \omega_r \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\pi_1 \\ 0 & \pi_2 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{T}(\theta_r) \cdot \mathbf{L}_{abc s} \cdot \mathbf{T}(\theta_r)^{-1} &= \begin{bmatrix} L_{ls} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_1 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

donde $\pi_1 = \frac{3L_A}{2} + \frac{3L_B}{2} + L_{ls}$ y $\pi_2 = \frac{3L_A}{2} - \frac{3L_B}{2} + L_{ls}$. Finalmente obtenemos un sistema lineal de ecuaciones que no dependen del ángulo θ_r ,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_{0s}^r \\ v_{ds}^r \\ v_{qs}^r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & R_s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{0s}^r \\ i_{ds}^r \\ i_{qs}^r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{ls} & 0 & 0 \\ 0 & L_d & 0 \\ 0 & 0 & L_q \end{bmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{0s}^r \\ i_{ds}^r \\ i_{qs}^r \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_r L_q \\ 0 & \omega_r L_d & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{0s}^r \\ i_{ds}^r \\ i_{qs}^r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_r \lambda_m \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde $L_d = L_{ls} + \frac{3}{2}(L_A + L_B)$, $L_q = L_{ls} + \frac{3}{2}(L_A - L_B)$ y ω_r es la derivada de θ_r . Las ecuaciones (2.16) describen la dinámica eléctrica del MSIP. Esta representación facilita el estudio del sistema y la obtención de la expresión del par equivalente del motor.

2.2.2. Expresión de par eléctrico del motor

El modelo eléctrico equivalente del MSIP obtenido en la sección anterior, puede reescribirse como:

$$v_{0s}^r = r_s i_{0s}^r + L_{ls} \frac{d}{dt} i_{0s}^r \quad (2.17)$$

$$v_{ds}^r = r_s i_{ds}^r + L_d \frac{d}{dt} i_{ds}^r - \omega_r L_q i_{qs}^r \quad (2.18)$$

$$v_{qs}^r = r_s i_{qs}^r + L_q \frac{d}{dt} i_{qs}^r + \omega_r L_d i_{ds}^r + \omega_r \lambda_m \quad (2.19)$$

Los circuitos equivalentes del estator y del rotor del motor, descritos por las ecuaciones anteriores, se muestran en la figura 2.4. El subíndice s se refiere a los voltajes y corrientes del estator, y el superíndice r indica que todo está referenciado a la posición del rotor θ_r .

El par de un motor se obtiene mediante el análisis de la potencia, véase [42]. Esta potencia es obtenida multiplicando cada corriente y cada tensión de cada fase $d - q$ respectivamente. Dado que la corriente y el voltaje en el eje 0 son cero, la potencia instantánea desarrollada por el motor es en este caso

$$p_e = \frac{3}{2} (v_{ds}^r i_{ds}^r + v_{qs}^r i_{qs}^r) \quad (2.20)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.17)-(2.19) en (2.20), la expresión de la potencia puede

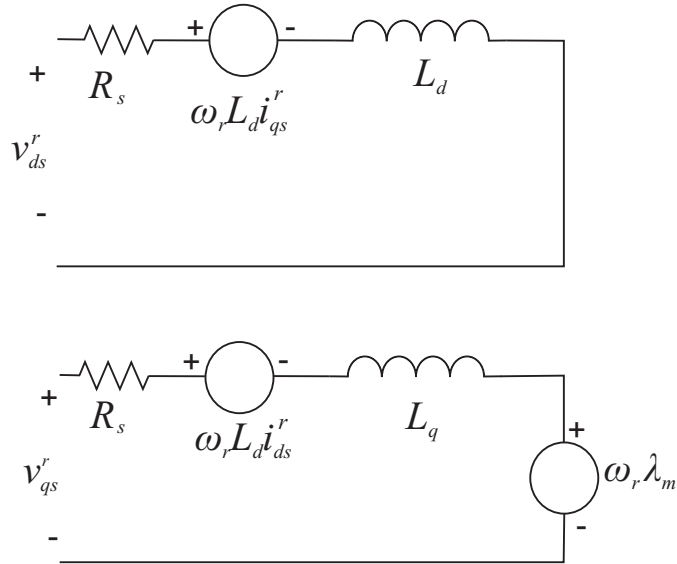


Figura 2.4: Modelo del circuito equivalente del motor MSIP

reescribirse en diversos factores como sigue:

$$\begin{aligned}
 p_e = & \underbrace{\frac{3}{2} \left(R_s (i_{ds}^r)^2 + R_s (i_{qs}^r)^2 \right)}_{\text{p\u00e9rdidas en los conductores}} + \underbrace{\frac{3}{2} \left(L_d \frac{d}{dt} \frac{(i_{ds}^r)^2}{2} + L_q \frac{d}{dt} \frac{(i_{qs}^r)^2}{2} \right)}_{\text{variaci\u00f3n de la energ\u00eda almacenada}} \\
 & + \underbrace{\frac{3}{2} \left(\omega_r (\lambda_m i_{qs}^r + (L_d - L_q) i_{ds}^r i_{qs}^r) \right)}_{\text{conversi\u00f3n de energ\u00eda}} \quad (2.21)
 \end{aligned}$$

de la ecuaci\u00f3n (2.21), se tiene que el primer t\u00e9rmino es referente a las p\u00e9rdidas en los conductores y el segundo t\u00e9rmino indica la variaci\u00f3n de la energ\u00eda almacenada en el campo magn\u00e9tico. El tercer t\u00e9rmino se refiere a la conversi\u00f3n de la energ\u00eda el\u00e9ctrica a energ\u00eda mec\u00e1nica. La expresi\u00f3n del par del motor ser\u00e1 deducida a partir de este \u00faltimo t\u00e9rmino.

Sea (2.22) la fracci\u00f3n de la potencia convertida por el motor y (2.23) la relaci\u00f3n de velocidades el\u00e9ctrica y mec\u00e1nica del MSIP

$$p_{em} = \frac{3}{2} \left(\omega_r (\lambda_m i_{qs}^r + (L_d - L_q) i_{ds}^r i_{qs}^r) \right) \quad (2.22)$$

$$\omega_r = \frac{n}{2} \omega_m \quad (2.23)$$

donde ω_m es la velocidad mec\u00e1nica angular del rotor y n es el n\u00famero de polos de la m\u00e1quina. La potencia electromec\u00e1nica debe ser igual a la potencia de salida del eje

del motor, es decir, a la multiplicación de la velocidad angular del eje del rotor ω_m con el torque producido por la máquina. Dicho lo anterior, la ecuación (2.22) puede escribirse como:

$$\omega_m T_e = \frac{3}{2} (\omega_r (\lambda_m i_{qs}^r + (L_d - L_q) i_{ds}^r i_{qs}^r)) \quad (2.24)$$

sustituyendo ω_r de (2.23) en (2.24), se obtiene la expresión del torque electromagnético del MSIP en coordenadas dq como:

$$T_e = \frac{3n}{2} (\lambda_m i_{qs}^r + (L_d - L_q) i_{ds}^r i_{qs}^r) \quad (2.25)$$

Note que el torque que produce el MSIP se compone de 2 partes, un torque creado por el flujo magnético del imán y otro formado por la reluctancia (o reluctante).

2.2.3. Modelo del motor síncrono de imanes permanentes de polos superficiales

El análisis anterior es para el caso general de un motor de polos salientes. Tomando en cuenta que el motor de interés es un motor de polos lisos o superficiales, es necesario particularizar este análisis. Para el MSIP de polos superficiales la ε_2 es cero, por lo tanto $L_d = L_q = L_s$ (véase la ecuación 2.16). De esta manera podemos reescribir la ecuación (2.25) como:

$$T_e = \frac{3n}{2} \lambda_m i_{qs}^r \quad (2.26)$$

Obsérvese que el par eléctrico de este motor solo depende de la corriente i_q , de tal manera que al controlar esta corriente podemos obtener el par de carga deseado. Las ecuaciones (2.16) se simplifican y junto con la ecuación de par (2.26) conforman un modelo previo del motor

$$\begin{aligned} u_d &= R_s i_d + L_s \dot{i}_d - \omega_r L_s \\ u_q &= R_s i_q + L_s \dot{i}_q + \omega_r L_s - \omega_r L_s + \omega_r \lambda_m \\ T_e &= \frac{3n}{2} \lambda_m i_q \end{aligned}$$

Dejando el sistema en términos de la velocidad mecánica ω_m , n_p es el número de pares de polos ($n_p = n/2$), y tomando la igualdad $\omega_r = n_p \omega_m$ las ecuaciones se

modifican para dar paso al modelo dinámico del motor en coordenadas dq :

$$L_s \frac{di_d}{dt} = -R_s i_d + n_p \omega_m L_s i_q + u_d \quad (2.27)$$

$$L_s \frac{di_q}{dt} = -R_s i_q - n_p \omega_m L_s i_d - K_m \omega_m + u_q \quad (2.28)$$

$$J \frac{d\omega_m}{dt} = \frac{3}{2} K_m i_q - \tau_L \quad (2.29)$$

$$\frac{d\theta_m}{dt} = \omega_m \quad (2.30)$$

donde u_d es el voltaje directo, u_q es el voltaje de cuadratura, i_d es la corriente directa, i_q es la corriente de cuadratura, θ_m y ω_m corresponden a las variables mecánicas de posición y velocidad angular del rotor. La resistencia y la inductancia de estator son denotadas por R_s y L_s respectivamente y J es el momento de inercia del motor. El término K_m es una constante de fuerza electromotriz inducida, donde $K_m = n_p \lambda_m$, siendo λ_m el flujo mútuo o ligado pico debido al imán permanente, el par de carga τ_L se considera externo y desconocido.

2.3. Controlador backstepping

Backstepping es un método basado en la teoría de estabilidad de Lyapunov, en las siguientes secciones se realizará una breve revisión de los conceptos fundamentales de esta teoría. La información que se presenta es basada en los libros de Slotine, [43] y Márquez, [44].

2.3.1. Estabilidad en el sentido de Lyapunov

Un sistema dinámico no lineal usualmente se puede representar por un conjunto de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (2.31)$$

donde \mathbf{f} es un vector de $n \times 1$ funciones no lineales y x es el vector de $n \times 1$ estados. El número n es llamado el orden del sistema. Una solución de la ecuación (2.31) corresponde a una trayectoria en el espacio de estados, donde $t \in [0, \infty)$. Esta curva es generalmente conocida como *trayectoria de estado* o *trayectoria del sistema*. Específicamente, en el caso de los sistemas dinámicos retroalimentados, la dinámica de la planta puede expresarse de la siguiente manera:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (2.32)$$

para la cual se selecciona una ley de control de la forma:

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \quad (2.33)$$

entonces, sustituyendo (2.33) en (2.32) se obtiene la siguiente dinámica:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), t) \quad (2.34)$$

Los sistemas no lineales son clasificados en *autónomos* y *no autónomos*.

Definición 1 *El sistema no lineal (2.31) se dice **autónomo** si \mathbf{f} no depende explícitamente del tiempo, es decir, si las ecuaciones de estado del sistema pueden ser escritas como*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (2.35)$$

*en caso contrario, el sistema es llamado **no autónomo**.*

También, es posible que una trayectoria del sistema corresponda únicamente a un simple punto, al cual se le denomina *punto de equilibrio*. Muchos problemas de estabilidad son formulados con respecto a los puntos de equilibrio.

Definición 2 *Un estado \mathbf{x}^* es un **estado de equilibrio** (o **punto de equilibrio**) del sistema si una vez que $\mathbf{x}(t)$ es igual a \mathbf{x}^* , sigue siendo \mathbf{x}^* para todo el tiempo futuro.*

A continuación se presentan definiciones de la teoría de Lyapunov para la *estabilidad local* y *global*. Para una explicación más detallada se puede consultar [43].

Definición 3 *El estado de equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se dice **estable** si para cualquier $R > 0$, existe $r > 0$ de tal manera que si $\|\mathbf{x}(0)\| < r$ entonces $\|\mathbf{x}(t)\| < R$ para todo $t \geq 0$. De lo contrario el punto de equilibrio es **inestable**.*

Definición 4 *Un punto de equilibrio estable $\mathbf{0}$ es **asintóticamente estable** si este es estable y si además existe un $r > 0$ tal que $\|\mathbf{x}(0)\| < r$ implica que $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ cuando $t \rightarrow \infty$.*

Definición 5 *Un punto de equilibrio $\mathbf{0}$ es **exponencialmente estable** si existen dos números estrictamente positivos α y λ de manera que:*

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \alpha \|\mathbf{x}(0)\| e^{-\lambda t}, \forall t > 0 \quad (2.36)$$

Las definiciones anteriores sobre estabilidad caracterizan el comportamiento local de los sistemas, es decir, cómo se desarrolló el estado después de comenzar cerca del punto de equilibrio. Las propiedades locales dicen poco de cómo se comportará el sistema cuando el estado inicial está a cierta distancia cerca del equilibrio. Para deducir el comportamiento del sistema cuando el estado está lejos del punto de equilibrio se requieren conceptos globales.

Definición 6 Si la estabilidad asintótica o exponencial se mantiene para cualquier estado inicial, los puntos de equilibrio se dicen ser asintóticamente (o exponencialmente) estables **en lejanías**. Entonces el sistema es llamado **globalmente asintóticamente** (o **exponencialmente**) **estable**.

Método directo de Lyapunov

La filosofía básica del método directo de Lyapunov es la extensión matemática de una observación física: *si la energía total de un sistema mecánico (o eléctrico) es continuamente disipada entonces el sistema, sea lineal o no lineal, eventualmente debe establecerse en un punto de equilibrio* [43].

Antes de continuar, debe definirse lo que es una región cercana al origen: Sea \mathbf{B}_R la región esférica (o bola) definida por $\|x\| < R$ en el espacio de estado, y \mathbf{S}_R la esfera en sí misma, definida por $\|x\| = R$.

Definición 7 Una función escalar continua $V(x)$ se dice ser **definida positiva localmente** si $V(\mathbf{0}) = 0$ y, en una esfera \mathbf{B}_{R_0}

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \implies V(\mathbf{x}) > 0$$

Si $V(\mathbf{0}) = 0$ y la propiedad anterior se mantiene sobre el espacio de estados completo, entonces $V(\mathbf{x})$ se dice que es **globalmente definida positiva**.

Definición 8 Si en una esfera \mathbf{B}_{R_0} , la función $V(\mathbf{x})$ es definida positiva y tiene derivadas parciales continuas, y si su derivada en el tiempo a lo largo de cualquier trayectoria de estado del sistema (2.35) es semidefinida negativa, esto es

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$$

entonces $V(x)$ se dice ser una **función de Lyapunov** para el sistema (2.35).

Teoremas de Lyapunov para estabilidad global y local.

Mediante el siguiente conjunto de teoremas se determina de forma precisa la relación que existe entre la función de Lyapunov y la estabilidad del sistema. Estos teoremas suelen tener versiones locales y globales [43].

Teorema 1 (Estabilidad local): Si en una esfera \mathbf{B}_{R_0} , existe una función escalar $V(\mathbf{x})$ con sus primeras derivadas parciales continuas tal que:

- $V(\mathbf{x})$ es definida positiva (localmente en \mathbf{B}_{R_0})
- $\dot{V}(\mathbf{x})$ es semidefinida negativa (localmente en \mathbf{B}_{R_0})

entonces el punto de equilibrio $\mathbf{0}$ es estable, de hecho si la derivada $\dot{V}(\mathbf{x})$ es definida negativa localmente en B_{R_0} , entonces la estabilidad es asintótica.

Teorema 2 (Estabilidad global): Suponga que existe una función escalar $V(\mathbf{x})$, con derivadas de primer orden continuas tal que:

- $V(\mathbf{x})$ es definida positiva
- $\dot{V}(\mathbf{x})$ es definida negativa
- $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ cuando $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$

entonces el equilibrio en el origen es globalmente asintóticamente estable.

Para el análisis de convergencia, una poderosa herramienta es el siguiente teorema dado por Lasalle y Yoshizawa [47].

Teorema 3 (LaSalle-Yoshizawa): Sea $x = 0$ un punto de equilibrio de (2.31) y suponiendo que f es localmente Lipschitz en x uniformemente en t . Sea $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ una función continuamente diferenciable, definida positiva y radialmente no acotada $V(x)$ tal que

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}(x)f(x, t) \leq -W(x) \leq 0, \quad \forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

donde W es una función continua. Entonces, todas las soluciones de (2.31) son globalmente uniformemente acotadas y satisfacen

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(x(t)) = 0.$$

Además, si $W(x)$ es definida positiva, entonces el equilibrio $x=0$ es globalmente uniforme asintóticamente estable.

Teorema 4 (LaSalle): Sea Ω un conjunto positivamente invariante de (2.35). Sea $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ una función continuamente diferenciable $V(x)$ tal que $\dot{V}(x) \leq 0$, $\forall x \in \Omega$. Sea $E = \{x \in \Omega | \dot{V}(x) = 0\}$, y sea M el conjunto más grande contenido en E . Entonces, cada solución acotada $x(t)$ que inicia en Ω converge a M cuando $t \rightarrow \infty$.

Las definiciones y teoremas anteriores serán utilizados en el diseño del controlador mediante el método Backstepping.

2.3.2. Integrador Backstepping

El nombre Backstepping se refiere a la naturaleza recursiva del procedimiento de diseño. Primero, solo se considera un pequeño subsistema, para el cual se construye una ley de control virtual. Entonces el diseño se extiende en varios pasos hasta que una ley de control para el sistema completo se haya construido. Junto con la ley de control, una función de Lyapunov para el sistema controlado se construye sucesivamente. Se dice que si existe una función de control de Lyapunov, se puede encontrar una ley de control que hace que el sistema sea globalmente asintóticamente estable [45].

Para comprender esta técnica de diseño se analizará el caso especial del *integrador backstepping*. El desarrollo de esta sección está basado en [44], [46] y [47], y parte de la siguiente suposición:

Suposición 1 *Considere el sistema*

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad f(0) = 0, \quad (2.37)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el estado y $u \in \mathbb{R}$ es la entrada de control. Existe una ley de control retroalimentado continuamente diferenciable

$$u = \alpha(x), \quad \alpha(0) = 0, \quad (2.38)$$

y una suave, definida positiva, radialmente no acotada función $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x) [f(x) + g(x)\alpha(x)] \leq -W(x) \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.39)$$

donde $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es semidefinida positiva.

Bajo esta suposición, el control (2.38), aplicado al sistema (2.37), garantiza la acotación global de $x(t)$, y via el teorema de LaSalle-Yoshikawa (Teorema 3), la regulación de $W(x(t))$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(x(t)) = 0. \quad (2.40)$$

Un buen resultado de convergencia se obtiene usando el teorema de LaSalle (Teorema 4) con $\Omega = \mathbb{R}^n : x(t)$ converge para el conjunto invariante más grande M contenido en el conjunto $E = \{x \in \mathbb{R}^n | W(x) = 0\}$. Es evidente que si $W(x)$ es definida positiva, el control (2.38) hace que $x = 0$ sea un equilibrio globalmente asintóticamente estable de (2.37).

Lema 1 Integrador Backstepping *Aumentando el sistema (2.37) por un integrador*

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\xi \quad (2.41a)$$

$$\dot{\xi} = u, \quad (2.41b)$$

y suponga que (2.41a) satisface la Suposición 1 con $\xi \in \mathbb{R}$ como el control.

(i) Si $W(x)$ es definida positiva, entonces

$$V_a(x, \xi) = V(x) + \frac{1}{2} [\xi - \alpha(x)]^2 \quad (2.42)$$

es una función de control de Lyapunov del sistema completo (2.41), es decir, existe un control de retroalimentación $u = \alpha_a(x, \xi)$ el cual hace que $x = 0$, $\xi = 0$ sea el equilibrio globalmente asintóticamente estable de (2.41). Tal que el control es

$$u = -c(\xi - \alpha(x)) + \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x) [f(x) + g(x)\xi] - \frac{\partial V}{\partial x}(x)g(x), \quad c > 0. \quad (2.43)$$

(ii) Si $W(x)$ es solamente semidefinida positiva, entonces existe un control de retroalimentación el cual hace que $\dot{V}_a \leq -W_a(x, \xi) \leq 0$, tal que $W_a(x, \xi) > 0$ siempre que $W_a(x) > 0$ o $\xi \neq \alpha(x)$. Esto garantiza la acotación global y convergencia de $\begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix}$ para el conjunto invariante más grande M_a contenido en el conjunto $E_a = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid W(x) = 0, \xi = \alpha(x) \right\}$.

La prueba de este lema puede consultarse en el apéndice C

2.3.3. Sistemas estrictamente retroalimentados

Consideremos un sistema de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x) \xi_1 \\ \dot{\xi}_1 &= f_1(x, \xi_1) + g_1(x, \xi_1) \xi_2 \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{k-1} &= f_{k-1}(x, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}) + g_{k-1}(x, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}) \xi_k \\ \dot{\xi}_k &= f_k(x, \xi_1, \dots, \xi_k) + g_k(x, \xi_1, \dots, \xi_k) u \end{aligned} \quad (2.44)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ y ξ_1, \dots, ξ_k son escalares. La razón de referirse a ξ -subsistemas como “estrictamente retroalimentados” es que las no linealidades de f_i, g_i en la $\dot{\xi}_i$ -ecuación ($i = 1, \dots, k$) dependen solamente de x, ξ_1, \dots, ξ_i , es decir, de las variables de estados que se “retroalimentan”.

El subsistema- x satisface la Suposición 1 con ξ_i como su entrada de control. El diseño recursivo inicia con el subsistema

$$\dot{x} = f(x) + g(x) \xi_1 \quad (2.45)$$

$$\dot{\xi}_1 = f_1(x, \xi_1) + g_1(x, \xi_1) \xi_2. \quad (2.46)$$

Si $f_1 \equiv 0$, y $g_1 \equiv 1$, el Lema 1 del integrador Backstepping sería directamente aplicable a (2.46), tratando a ξ_2 como el control. En presencia de $f_1(x, \xi_1)$ y $g_1(x, \xi_1)$, se procede de la misma manera mediante la construcción de $V_1(x, \xi_1)$ para (2.46) como

$$V_1(x, \xi_1) = V(x) + \frac{1}{2} [\xi_1 - \alpha(x)]^2, \quad (2.47)$$

donde $\alpha(x)$ es una retroalimentación estabilizante que satisface (2.39) para el subsistema- x . Tales leyes de control intermedias serán llamadas *funciones estabilizadoras*. Para encontrar una función estabilizadora $\alpha_1(x, \xi_1)$ para ξ_2 , el control virtual de (2.46), se tiene que hacer que la derivada de \dot{V}_1 sea no positiva cuando $\xi_2 = \alpha_1$:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq -W(x) + [\xi_1 - \alpha(x)] \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial x}(x)g(x) + f_1(x, \xi_1) + g_1(x, \xi_1)\xi_2 \\ -\frac{\partial \alpha}{\partial x}(x) [f(x) + g(x)\xi_1] \end{array} \right\} \\ &= -W(x) + [\xi_1 - \alpha(x)] \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial x}(x)g(x) + f_1(x, \xi_1) + g_1(x, \xi_1)\alpha_1(x, \xi_1) + \\ g_1(x, \xi_1) [\xi_2 - \alpha_1(x, \xi_1)] - \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x) [f(x) + g(x)\xi_1] \end{array} \right\} \\ &= -W(x, \xi_1) + \frac{\partial V_1}{\partial \xi_1}(x, \xi_1)g_1(x, \xi_1) [\xi_2 - \alpha_1(x, \xi_1)], \end{aligned} \quad (2.48)$$

donde $W_1(x, \xi_1) > 0$ cuando $W(x) > 0$ o $\xi_1 \neq \alpha(x)$. Si $g_1(x, \xi_1) \neq 0$ para toda x y ξ_1 , una opción para α_1 es

$$\alpha_1(x, \xi_1) = \frac{1}{g_1(x, \xi_1)} \left\{ -c_1 [\xi_1 - \alpha(x)] - \frac{\partial V}{\partial x}(x)g(x) - f_1(x, \xi_1) + \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x) [f(x) + g(x)\xi_1] \right\} \quad (2.49)$$

con $c_1 > 0$, que produce $W_1(x, \xi_1) = W(x) + c_1 [\xi_1 - \alpha(x)]^2$. Con $\alpha_1(x, \xi_1)$ determinado, el siguiente paso es aumentar (2.46) con la ξ_2 -ecuación de (2.44). En una notación compacta, se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= F_1(X_1) + G_1(X_1)\xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= f_2(X_1, \xi_2) + g_2(X_1, \xi_2)\xi_3, \end{aligned} \quad (2.50)$$

donde $f_2(X_1, \xi_2)$, $g_2(X_1, \xi_2)$ representan $f_2(x, \xi_1, \xi_2)$, $g_2(x, \xi_1, \xi_2)$ y

$$X_1 = \begin{bmatrix} x \\ \xi_1 \end{bmatrix}, F_1(X_1) = \begin{bmatrix} f(x) + g(x)\xi_1 \\ f_1(x, \xi_1) \end{bmatrix}, G_1(X_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ g_1(x, \xi_1) \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

La estructura de (2.50) es idéntica a la de (2.46). Por lo tanto, repitiendo el mismo paso introduciendo

$$\begin{aligned} V_2(X_1, \xi_2) &= V_1(X_1) + \frac{1}{2} [\xi_2 - \alpha_1(X_1)]^2 \\ &= V(x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (\xi_i - \alpha_{i-1}(X_{i-1}))^2, \end{aligned} \quad (2.52)$$

donde, por conveniencia de notación, se usa $X_0 = x$ y $\alpha_0(X_0) = \alpha(x)$. La función de estabilización $\alpha_2(X_2)$, $X_2^T = [X_1^T \ \xi_2]^T$, para el control virtual ξ_3 es entonces determinada como

$$\dot{V}_2 \leq -W_2(X_1, \xi_2) + \frac{\partial V_2}{\partial \xi_2}(X_1, \xi_2) g_2(X_1, \xi_2) [\xi_3 - \alpha_2(X_2)], \quad (2.53)$$

con $W_2(X_1, \xi_2) > 0$ cuando $W_1(x, \xi_1) > 0$ o $\xi_2 \neq \alpha(X_1)$. Es evidente que este procedimiento terminará en el k -ésimo paso, en el cual todo el sistema (2.44) llega a ser estabilizado por el control real u . En notación compacta, (2.44) es reescrito como

$$\begin{aligned} \dot{X}_{k-1} &= F_{k-1}(X_{k-1}) + G_{k-1}(X_{k-1})\xi_k \\ \dot{\xi}_k &= f_k(X_{k-1}, \xi_k) + g_k(X_{k-1}, \xi_k)u \end{aligned} \quad (2.54)$$

donde

$$\begin{aligned} X_{k-1} &= \begin{bmatrix} X_{k-2} \\ \xi_{k-1} \end{bmatrix}, \quad F_{k-1}(X_{k-1}) = \begin{bmatrix} F_{k-2}(X_{k-2}) + G_{k-2}(X_{k-2})\xi_{k-1} \\ f_{k-1}(X_{k-2}, \xi_{k-1}) \end{bmatrix}, \\ G_{k-1}(X_{k-1}) &= \begin{bmatrix} 0 \\ g_{k-1}(X_{k-2}, \xi_{k-1}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.55)$$

Una vez más, esta es la forma de (2.46) y (2.50), y la función de Lyapunov para (2.54) es

$$\begin{aligned} V_k(x, \dots, \xi_k) &= V_{k-1}(X_{k-1}) + \frac{1}{2} [\xi_k - \alpha_{k-1}(X_{k-1})]^2 \\ &= V(x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k [\xi_i - \alpha_{i-1}(X_{i-1})]^2 \end{aligned} \quad (2.56)$$

El significado de las funciones estabilizadoras $\alpha_i(X_i)$ diseñadas como controles intermedios, son ahora más claras para (2.56). Estas posibles leyes de control son, de hecho, las herramientas para construir una función de Lyapunov para el sistema estrictamente retroalimentado (2.44). La función de V_k en (2.56) es sin duda una función de Lyapunov, porque u puede ser elegido para hacer $\dot{V}_k \leq -W_k \leq 0$, con

$W_k > 0$ cuando $W_{k-1} > 0$ ó $\xi_k \neq \alpha_{k-1}$:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_k &= \dot{V}_{k-1} + (\xi_k - \alpha_{k-1}) \left[f_x + g_k u - \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial X_{k-1}} (F_{k-1} + G_{k-1} \xi_k) \right] \\
&\leq -W_{k-1}(X_{k-2}, \xi_{k-1}) + \frac{\partial V_{k-1}}{\partial \xi_{k-1}} g_{k-1} (\xi_k - \alpha_{k-1}) \\
&\quad + (\xi_k - \alpha_{k-1}) \left[f_x + g_k u - \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial X_{k-1}} (F_{k-1} + G_{k-1} \xi_k) \right] \\
&= -W_{k-1}(X_{k-2}, \xi_{k-1}) + (\xi_k - \alpha_{k-1}) \left[\begin{array}{l} \frac{\partial V_{k-1}}{\partial \xi_{k-1}} g_{k-1} + f_x + g_k u \\ -\frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial X_{k-1}} (F_{k-1} + G_{k-1} \xi_k) \end{array} \right] \\
&\leq -W_k(X_{k-1}, \xi_k) \leq 0
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Si la condición de no singularidad

$$g_k(x, \dots, \xi_k) \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \xi_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, k, \tag{2.58}$$

es satisfecha, entonces la mas simple elección de u es

$$u = \frac{1}{g_k} \left[-c_k (\xi_k - \alpha_{k-1}) - \frac{\partial V_{k-1}}{\partial \xi_{k-1}} g_{k-1} - f_x + \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial X_{k-1}} (F_{k-1} + G_{k-1} \xi_k) \right], \tag{2.59}$$

con $c_k > 0$, que produce $W_k = W_{k-1} + c_k (\xi_k - \alpha_{k-1})^2$.

2.4. Linealización entrada salida

2.4.1. Derivadas de Lie

Cuando se habla de estabilidad en el sentido de Lyapunov se hace uso frecuentemente de la noción de *derivada temporal de una función escalar V a lo largo de las trayectorias del sistema $\dot{x} = f(x)$* [48]. Como es sabido, dado $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ y $\dot{x} = f(x)$, se tiene que

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) = \nabla V f(x) = L_f V(x).$$

Una definición ligeramente más abstracta conduce al concepto de la derivada de Lie.

Definición 1 *Considere una función escalar $h : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y un campo vectorial $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. La derivada de Lie de h con respecto a f , denotada $L_f h$, está dada por*

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x). \tag{2.60}$$

Así, regresando a las funciones de Lyapunov, \dot{V} es simplemente la derivada de Lie de V con respecto a $f(x)$. La notación de la derivada de Lie normalmente se utiliza siempre que derivadas de orden superior necesiten ser calculadas. Nótese que dados dos vectores de campo $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se tiene que:

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x), \quad L_g h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} g(x)$$

y

$$L_g L_f h(x) = L_g [L_f h(x)] = \frac{\partial(L_f h)}{\partial x} g(x)$$

y en el caso especial $f = g$,

$$L_f L_f h(x) = L_f^2 h(x) = \frac{\partial(L_f h)}{\partial x} f(x).$$

2.4.2. Corchetes de Lie

Definición 2 Considere los vectores de campo $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Los corchetes de Lie de f y g , denotados como $[f, g]$, es el vector de campo definido por:

$$[f, g](x) = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x) \quad (2.61)$$

Ejemplo 1 Dado

$$f(x) = \begin{bmatrix} -x_2 \\ -x_1 - \mu(1 - x_1^2)x_2 \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} [f, g](x) &= \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_2 \\ -x_1 - \mu(1 - x_1^2)x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 + 2\mu x_1 x_2 & 1 - \mu(1 - x_1^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ -2\mu x_1^2 x_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

El siguiente notación, usada frecuentemente en la literatura, es útil cuando se calculan corchetes repetitivos:

$$[f, g](x) \stackrel{def}{=} ad_f g(x)$$

y

$$\begin{aligned} ad_f^0 g &= g \\ ad_f^i g &= [f, ad_f^{i-1} g]. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} ad_f^2 g &= [f, ad_f g] = [f, [f, g]] \\ ad_f^3 g &= [f, ad_f^2 g] = [f, [f, [f, g]]]. \end{aligned}$$

El siguiente lema resume varias propiedades utiles de los corchetes de Lie.

Lema 2 Dado $f_{1,2} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, se tiene

1. *Bilinealidad:*

$$\begin{aligned} \text{a) } [\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g] &= \alpha_1 [f_1, g] + \alpha_2 [f_2, g]. \\ \text{b) } [f, \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2] &= \alpha_1 [f, g_1] + \alpha_2 [f, g_2]. \end{aligned}$$

2. *Conmutatividad*

$$[f, g] = -[g, f].$$

3. *Identidad de Jacobi:* Dados los vectores de campo f y g , y una funcion h de valor real, se obtiene

$$L_{[f,g]}h = L_f L_g h(x) - L_g L_f h(x).$$

donde $L_{[f,g]}h$ representa la derivada de Lie de h con respecto al vector $[f, g]$.

2.4.3. Grado relativo

Un estudio más profundo del concepto de grado relativo y de linealización exacta por realimentación para sistemas de múltiples entradas múltiples salidas (MEMS) puede consultarse en Qiang Lu [48]. Considerando un sistema no-lineal de m entradas y m salidas

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{X}) + \mathbf{g}_1(\mathbf{X})u_1 + \mathbf{g}_2(\mathbf{X})u_2 + \dots + \mathbf{g}_m(\mathbf{X})u_m \\ y_1(t) &= h_1(\mathbf{X}) \\ &\dots\dots\dots \\ y_m(t) &= h_m(\mathbf{X}) \end{aligned} \tag{2.62}$$

donde $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$; $\mathbf{f}(\mathbf{X})$ y $\mathbf{g}_i(\mathbf{X})$, $i = 1, 2, \dots, m$ son vectores de campo n -dimensionales suaves, u_i es la i -ésima variable de control, $y_i(t)$ es la i -ésima salida, $h_i(\mathbf{X})$ es una función escalar de \mathbf{X} . El *grado relativo* es conocido como el número de veces que se deriva una salida $y(t)$ hasta que la entrada de control $u(t)$ aparece en la derivada. En el caso de los sistemas de múltiples entradas - múltiples salidas se tienen m salidas, por lo que se debe obtener m grados relativos. La suma de estos grados

relativos parciales proporciona el grado relativo del sistema completo, esto es, que seleccionando una salida $y_i(t) = h_i(\mathbf{X})$ con grado relativo r_i , los grados relativos de un sistema MEMS forma un conjunto

$$r = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$$

Cada grado relativo parcial satisface las tres condiciones siguientes en una vecindad de \mathbf{X}^0 ,

1.

$$\begin{aligned} L_{g_1} L_f^k h_i(\mathbf{X}) &= 0 \\ L_{g_2} L_f^k h_i(\mathbf{X}) &= 0 \\ &\dots\dots \\ L_{g_m} L_f^k h_i(\mathbf{X}) &= 0 \\ k &< r_i - 1 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} L_{g_1} L_f^{r_i-1} h_i(\mathbf{X}) \\ L_{g_2} L_f^{r_i-1} h_i(\mathbf{X}) \\ \dots\dots \\ L_{g_m} L_f^{r_i-1} h_i(\mathbf{X}) \\ i = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

donde no todos los términos son iguales a cero.

3. La matriz

$$\mathbf{B}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(\mathbf{X}) & L_{g_2} L_f^{r_1-1} h_1(\mathbf{X}) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(\mathbf{X}) \\ L_{g_1} L_f^{r_2-1} h_2(\mathbf{X}) & L_{g_2} L_f^{r_2-1} h_2(\mathbf{X}) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_2-1} h_2(\mathbf{X}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(\mathbf{X}) & L_{g_2} L_f^{r_m-1} h_m(\mathbf{X}) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(\mathbf{X}) \end{bmatrix}$$

es no singular en la vecindad de \mathbf{X}^0 .

Definición 3 Para sistemas MEMS, si las condiciones siguientes permanecen en una vecindad \mathbf{X}^0 , es decir, para $k_i < r_i - 1$,

$$L_{g_j} L_f^{k_i} h_i(\mathbf{X}) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, m$$

y la matriz $m \times m$

$$\mathbf{B}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(\mathbf{X}) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(\mathbf{X}) \\ L_{g_1} L_f^{r_2-1} h_2(\mathbf{X}) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_2-1} h_2(\mathbf{X}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(\mathbf{X}) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(\mathbf{X}) \end{bmatrix}$$

es no singular cerca de \mathbf{X}^0 , entonces $r = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ es un conjunto relativo del sistema, y cada grado relativo parcial r_i corresponde a la salida $y_i(t) = h_i(\mathbf{X})$.

2.4.4. Linealización exacta por realimentación

Con el propósito de simplificar este concepto y sin pérdida de generalidad, se considerará el caso particular de un sistema de dos entradas y dos salidas,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{X}(t)) + \mathbf{g}_1(\mathbf{X}(t))u_1 + \mathbf{g}_2(\mathbf{X}(t))u_2 \\ y_1(t) &= h_1(\mathbf{X}(t)) \\ y_2(t) &= h_2(\mathbf{X}(t)) \end{aligned} \quad (2.63)$$

Suponiendo que los grados relativos satisfacen $r = r_1 + r_2 = n$, donde n es la dimensión del vector de estados $\mathbf{X}(t)$. Bajo esta condición, el mapeo coordenado $\mathbf{Z} = \Phi(\mathbf{X})$ se debe seleccionar como:

$$\begin{aligned} z_1 &= \varphi_1(\mathbf{X}) = h_1(\mathbf{X}) \\ z_2 &= \varphi_2(\mathbf{X}) = L_f h_1(\mathbf{X}) \\ &\vdots \\ z_{r_1} &= \varphi_{r_1}(\mathbf{X}) = L_f^{r_1-1} h_1(\mathbf{X}) \\ z_{r_1+1} &= \psi_1(\mathbf{X}) = h_2(\mathbf{X}) \\ z_{r_1+2} &= \psi_2(\mathbf{X}) = L_f h_2(\mathbf{X}) \\ z_n &= \psi_{r_2}(\mathbf{X}) = L_f^{r_2-1} h_2(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (2.64)$$

Del mapeo anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \dot{\mathbf{X}} = \frac{\partial h_1(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} (\mathbf{f}(\mathbf{X}) + \mathbf{g}_1(\mathbf{X})u_1 + \mathbf{g}_2(\mathbf{X})u_2) \\ &= L_f h_1(\mathbf{X}) + L_{g_1} h_1(\mathbf{X})u_1 + L_{g_2} h_1(\mathbf{X})u_2 \end{aligned} \quad (2.65)$$

de acuerdo a la definición 3, si $r_1 > 1$, entonces

$$L_{g_1} h_1(\mathbf{X}) L_{g_2} h_1(\mathbf{X}) = 0$$

Por lo que (2.65) puede simplificarse a

$$\dot{\varphi}_1 = L_f h_1(\mathbf{X}) = \varphi_2 \quad (2.66)$$

Así de forma similar para las derivadas subsecuentes hasta

$$\dot{\varphi}_{r_1-1} = \varphi_{r_1} \quad (2.67)$$

donde $L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(\mathbf{X})$ y $L_{g_2} L_f^{r_1-1} h_1(\mathbf{X})$ no son todos ceros, por lo que la derivada $\dot{\varphi}_{r_1}$ queda dada por

$$\dot{\varphi}_{r_1} = L_f^{r_1} h_1(\mathbf{X}) + L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(\mathbf{X}) u_1 + L_{g_2} L_f^{r_1-1} h_1(\mathbf{X}) u_2 \quad (2.68)$$

De forma similar para la segunda salida se tiene

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \dot{\psi}_2 \\ &\dots\dots \\ \dot{\psi}_{r_2-1} &= \psi_{r_2} \\ \dot{\psi}_{r_2} &= L_f^{r_2} h_2(\mathbf{X}) + L_{g_1} L_f^{r_2-1} h_2(\mathbf{X}) u_1 + L_{g_2} L_f^{r_2-1} h_2(\mathbf{X}) u_2 \end{aligned} \quad (2.69)$$

Dado lo anterior, cuando los grados relativos satisfacen $r = r_1 + r_2 = n$, bajo la transformación de coordenadas (2.64), el sistema (2.63) puede ser transformado en la forma normal siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= \varphi_2 \\ &\dots\dots \\ \dot{\varphi}_{r_1-1} &= \varphi_{r_1} \\ \dot{\varphi}_{r_1} &= L_f^{r_1} h_1(\mathbf{X}) + L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(\mathbf{X}) u_1 + L_{g_2} L_f^{r_1-1} h_1(\mathbf{X}) u_2 \\ \dot{\psi}_1 &= \psi_2 \\ &\dots\dots \\ \dot{\psi}_{r_2-1} &= \psi_{r_2} \\ \dot{\psi}_{r_2} &= L_f^{r_2} h_2(\mathbf{X}) + L_{g_1} L_f^{r_2-1} h_2(\mathbf{X}) u_1 + L_{g_2} L_f^{r_2-1} h_2(\mathbf{X}) u_2 \end{aligned} \quad (2.70a)$$

con salidas

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \varphi_1(\mathbf{X}(t)) \\ y_2(t) &= \psi_1(\mathbf{X}(t)) \end{aligned} \quad (2.70b)$$

La ecuación de arriba (2.70) es llamada primera forma normal no lineal afín de los sistemas MEMS. Esto corresponde a que la condición de la suma de los grados relativos de cada salida $r = r_1 + r_2 + \dots + r_m = n$. Si para un sistema como

el mostrado en (2.63) se tiene que la suma de los grados relativos de cada salida $r = r_1 + r_2 < n$, entonces después de escoger una transformación coordenadas como (2.64), las últimas coordenadas $(n - r)$ pueden encontrarse como

$$\begin{aligned}\eta_1 &= \eta_1(\mathbf{X}) \\ &\dots\dots \\ \eta_{n-r} &= \eta_{n-r}(\mathbf{X})\end{aligned}\tag{2.71}$$

tal que la matriz Jacobiana de la función de vectorial

$$\Phi(\mathbf{X}) = [\varphi_1(\mathbf{X}), \dots, \varphi_{r_1}(\mathbf{X}); \psi_1(\mathbf{X}), \dots, \psi_{r_2}(\mathbf{X}); \eta_1(\mathbf{X}), \dots, \eta_{n-r}(\mathbf{X})]^T \tag{2.72}$$

es no singular en $\mathbf{X} = \mathbf{X}^0$. Bajo esta condición, $(n - r)$ deberán ser agregadas al sistema descrito en nuevas coordenadas (2.70a), es decir

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_1 &= L_f \eta_1(\mathbf{X}) + L_{g_1} \eta_1(\mathbf{X}) u_1 + L_{g_2} \eta_1(\mathbf{X}) u_2 \\ &\dots\dots \\ \dot{\eta}_{n-r} &= L_f \eta_{n-r}(\mathbf{X}) + L_{g_1} \eta_{n-r}(\mathbf{X}) u_1 + L_{g_2} \eta_{n-r}(\mathbf{X}) u_2\end{aligned}\tag{2.73}$$

Por lo tanto, el sistema después de la transformación es:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_1 &= \varphi_2 \\ &\dots\dots \\ \dot{\varphi}_{r_1-1} &= \varphi_{r_1} \\ \dot{\varphi}_{r_1} &= L_f^{r_1} h_1(\mathbf{X}) + L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(\mathbf{X}) u_1 + L_{g_2} L_f^{r_1-1} h_1(\mathbf{X}) u_2 \\ \dot{\psi}_1 &= \psi_2 \\ &\dots\dots \\ \dot{\psi}_{r_2-1} &= \psi_{r_2} \\ \dot{\psi}_{r_2} &= L_f^{r_2} h_2(\mathbf{X}) + L_{g_1} L_f^{r_2-1} h_2(\mathbf{X}) u_1 + L_{g_2} L_f^{r_2-1} h_2(\mathbf{X}) u_2 \\ \dot{\eta}_1 &= L_f \eta_1(\mathbf{X}) + L_{g_1} \eta_1(\mathbf{X}) u_1 + L_{g_2} \eta_1(\mathbf{X}) u_2 \\ &\dots\dots \\ \dot{\eta}_{n-r} &= L_f \eta_{n-r}(\mathbf{X}) + L_{g_1} \eta_{n-r}(\mathbf{X}) u_1 + L_{g_2} \eta_{n-r}(\mathbf{X}) u_2\end{aligned}\tag{2.74a}$$

junto con las salidas

$$\begin{aligned}y_1 &= \varphi_1 \\ y_2 &= \psi_1\end{aligned}\tag{2.74b}$$

Las ecuaciones (2.74) son el segundo tipo de forma normal.

Puede verificarse que, si el conjunto de vectores de campo $\{\mathbf{g}_1(\mathbf{X}), \mathbf{g}_2(\mathbf{X}), \dots, \mathbf{g}_m(\mathbf{X})\}$ mostrado en (2.62) es involutivo, entonces $n-r$ mapeos de coordenadas $\eta_1(\mathbf{X}), \eta_2(\mathbf{X}), \dots, \eta_{n-r}(\mathbf{X})$ asegura que:

$$\begin{aligned} L_{g_1}\eta_i(\mathbf{X}) &= 0 \\ L_{g_2}\eta_i(\mathbf{X}) &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ L_{g_m}\eta_i(\mathbf{X}) &= 0 \quad i = 1, 2, \dots, n-r \end{aligned} \tag{2.75}$$

Así, (2.74) puede ser transformada en

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= \varphi_2 \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{\varphi}_{r_1-1} &= \varphi_{r_1} \\ \dot{\varphi}_{r_1} &= L_f^{r_1}h_1(\mathbf{X}) + L_{g_1}L_f^{r_1-1}h_1(\mathbf{X})u_1 + L_{g_2}L_f^{r_1-1}h_1(\mathbf{X})u_2 \\ \dot{\psi}_1 &= \psi_2 \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{\psi}_{r_2-1} &= \psi_{r_2} \\ \dot{\psi}_{r_2} &= L_f^{r_2}h_2(\mathbf{X}) + L_{g_1}L_f^{r_2-1}h_2(\mathbf{X})u_1 + L_{g_2}L_f^{r_2-1}h_2(\mathbf{X})u_2 \\ \dot{\eta}_1 &= L_f\eta_1(\mathbf{X}) \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{\eta}_{n-r} &= L_f\eta_{n-r}(\mathbf{X}) \end{aligned} \tag{2.76a}$$

con las salidas

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1 \\ y_2 &= \psi_1 \end{aligned} \tag{2.76b}$$

En (2.76), $\eta_1(\mathbf{X}), \eta_2(\mathbf{X}), \dots, \eta_{n-r}(\mathbf{X})$ son las soluciones parciales de el conjunto de ecuaciones diferenciales (2.75). Las ecuaciones (2.76) representan el tercer tipo de forma normal.

Capítulo 3

DISEÑO DEL CONTROLADOR NO LINEAL BACKSTEPPING

3.1. Linealización exacta por realimentación del modelo del motor

Si se escoge como salidas del sistema a $y_1(x) = h_1(x) = i_d(t)$ y a $y_2 = h_2(x) = \theta_m(t)$, el modelo (2.27)-(2.30) puede ser linealizado en forma exacta como se muestra en [34] y [35], por lo que i_d y θ_m son las salidas planas del sistema, ya que parametrizan diferencialmente a las demás variables de estado e incluso a las entradas de control.

Para llevar a cabo esta linealización, el modelo es reescrito de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ \omega_m \\ \theta_m \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (-R_s i_d + n_p \omega_m L_s i_q) / L_s \\ (-R_s i_q - n_p \omega_m L_s i_d - K_m \omega) / L_s \\ (\frac{3}{2} K_m i_q) / J \\ \omega_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L_s} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_d \\ &+ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_s} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_q + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\tau_L \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ó bien

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x &= f(x) + \sum_{i=1}^2 g_i(x) u_i + \mathbf{d} \\ x &\in X \subset \mathbf{R}^4, u \in \mathbf{R}^2, f(0) = 0, \\ x_i &= h_i(x); i = 1, 2; h_i(0) = 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde $f(\cdot)$, $g_1(\cdot)$ y $g_2(\cdot)$ son campo de vectores suaves en el conjunto abierto U en \mathbf{R}^4 , $h_i(\cdot)$ es una función suave mapeada en X dentro de \mathbf{R} , y \mathbf{d} es el vector de entrada de perturbación que incluye solamente el par de carga, y dentro de él los términos de fricción no modelados. Las entradas de control, $u_1 = u_d$ y $u_2 = u_q$.

El método de linealización entrada-salida comienza a partir de omitir el vector de entrada de perturbación, \mathbf{d} . Por tanto, la relación entrada-salida (3.1) se deduce a través de las derivadas sucesivas de las dos salidas planas $x_i = h_i(x)$, tal que al menos una entrada u_i aparezca en la expresión para la derivada de orden superior $x_i^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots$). Simultáneamente la notación $L_f h_i = \nabla h_i f$; $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ adopta para la derivada de Lie direccional de h a lo largo del campo vectorial f . De aquí, se obtiene el sistema linealizado para la primer salida plana x_1 :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= i_d \\ x_1^{(1)}(t) &= L_f h_1 + \sum_{i=1}^2 L_{g_i} L_f^0 h_1 u_i \\ &= \alpha_1(x) + \beta_1(x) u_d = -\frac{R_s}{L_s} i_d + n_p i_q \omega_m + \frac{u_d}{L_s} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Por otro lado, se obtiene el resto del sistema linealizado a través de las derivadas sucesivas de la segunda salida plana y_2

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \theta_m \\ x_2^{(1)}(t) &= L_f h_2 + \sum_{i=1}^2 L_{g_i} L_f^0 h_2 u_i \\ &= \omega_m \\ x_2^{(2)}(t) &= L_f^2 h_2 + \sum_{i=1}^2 L_{g_i} L_f^1 h_2 u_i \\ &= \frac{3K_m}{2J} i_q \\ x_2^{(3)}(t) &= L_f^3 h_2 + \sum_{i=1}^2 L_{g_i} L_f^2 h_2 u_i \\ &= \alpha_2(x) + \beta_2(x) u_q \\ &= -\frac{3(K_m R_s i_q + n_p L_s K_m \omega_m i_d + K_m^2 \omega_m)}{2J L_s} + \frac{3K_m u_q}{2J L_s} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Por tanto, el nuevo vector de estado se define como:

$$x = \left(i_d, \theta_m, \omega_m, \frac{K_m}{J} i_q \right)^T = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in X \subset \mathbf{R}^4, u \in \mathbf{R}^2$$

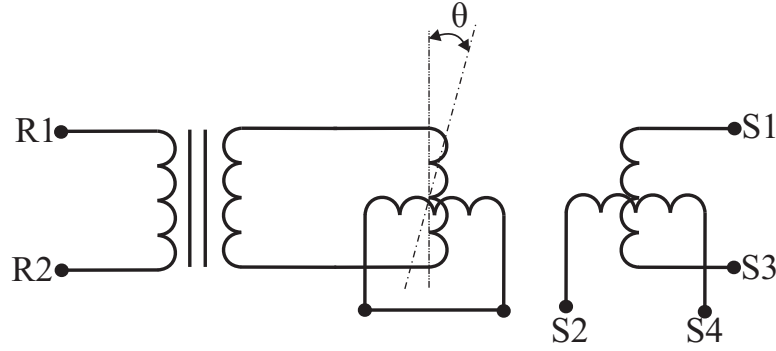


Figura 3.1: El sensor *resolver* es un transductor de posición absoluto basado en un transformador rotatorio.

Así la *forma normal de Brunovsky desacoplada* del sistema multivariable del MSIP que incluye el vector de entrada de perturbación desconocida, pero acotada, es dada por:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1(x) \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_d \\ u_q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\tau_L}{J} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Un desarrollo más completo se muestra en el Apéndice A

3.2. Observador de posición

Aún existiendo técnicas de control donde no es necesario un sensor (sensorless), en ocasiones se requiere un nivel de seguridad alto, por esta razón se utilizan diferentes tipos de sensores para lograr este objetivo. Para la elaboración de esta tesis se cuenta con un transductor de posición angular llamado *resolutor* o *resolver*.

Físicamente un resolutor o resolver es una máquina de corriente alterna miniatura cuyo embobinado se excita a través de una señal de bajo voltaje (5V) a una frecuencia de 10 kHz. Esta máquina tiene dos devanados de estator desfasados a 90° mecánicos en los cuales se inducen dos voltajes, ver figura 3.1. Dada la señal de excitación

$v = V \cos \omega_e t$. Los voltajes del resolutor son dados por:

$$\begin{aligned} v_\alpha &= V \cos \theta \cos \omega_e t \\ v_\beta &= V \sin \theta \cos \omega_e t \end{aligned} \quad (3.5)$$

como se observa estos voltajes son modulados en amplitud sobre una señal portadora de frecuencia ω_e . La amplitud de dichos voltajes describe la posición del rotor. El algoritmo que realiza la extracción de la posición y velocidad a partir de v_α y v_β se le conoce como convertidor resolutor a digital (CRD). La mayoría de los CRD's emplean un lazo de amarre de fase (PLL) de algún tipo, con las señales del resolutor demoduladas mediante un *Filtro Pasa Bajos* (ver [36]) con sus amplitudes normalizadas a la unidad, como:

$$v_\alpha^{dem} = \cos n_p \theta \quad (3.6)$$

$$v_\beta^{dem} = \sin n_p \theta \quad (3.7)$$

con estos voltajes se calcula una señal de error como la siguiente:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= v_\beta^{dem} \cos n_p \hat{\theta} - v_\alpha^{dem} \sin n_p \hat{\theta} \\ &= \sin n_p (\theta - \hat{\theta}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde $\hat{\theta}$ es la posición estimada.

A partir de la señal de error ε , se diseña el estimador de posición y velocidad usando el siguiente observador:

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = \hat{\omega} + \lambda_1 \varepsilon \quad (3.9)$$

$$\frac{d\hat{\omega}}{dt} = \lambda_0 \varepsilon \quad (3.10)$$

donde λ_1 y λ_0 son las ganancias del estimador y $\hat{\omega}$ es la velocidad estimada. El diseño del estimador es similar al modelo equivalente de banda base de un PLL. Este observador es mostrado en la figura 3.2 (ver [37]).

Con la finalidad de facilitar la sintonización de este observador, se hace la suposición de que $\hat{\theta} \approx \theta$, es decir, se realiza una linealización alrededor del origen de la función dada por ε , por tanto el término $\sin n_p (\theta - \hat{\theta}) \approx n_p (\theta - \hat{\theta})$, de ahí que:

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = \hat{\omega} + \lambda'_1 (\theta - \hat{\theta}) \quad (3.11)$$

$$\frac{d\hat{\omega}}{dt} = \lambda'_0 (\theta - \hat{\theta}) \quad (3.12)$$

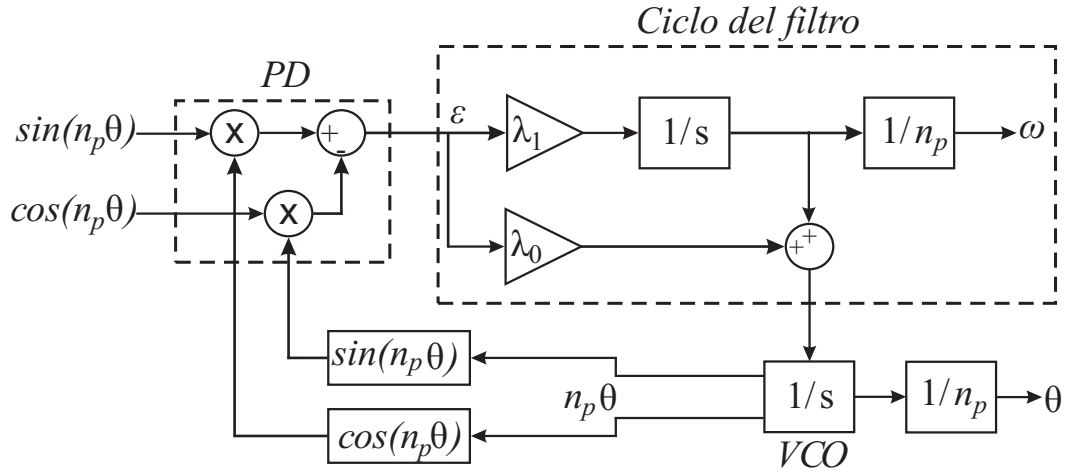


Figura 3.2: Observador PLL de la posición y velocidad angular del rotor

donde $\lambda'_1 = \lambda_1 n_p$ y $\lambda'_0 = \lambda_0 n_p$. Estas ganancias se sintonizan mediante un polinomio *Hurwitz* de orden dos dado como sigue:

$$p_d(s) = (s^2 + 2\sigma s + \sigma^2)$$

donde las dos raíces del polinomio se sitúan en el mismo lugar $s = -\sigma$, esto para evitar oscilaciones en la estimación, nivel de ruido alto y tener robustez en la estimación. Por lo tanto, las ganancias del estimador de posición y velocidad son: $\lambda_1 = 2\sigma/n_p$ y $\lambda_0 = \sigma^2/n_p$.

3.3. Observador del parámetro de par de carga

En esta subsección se diseña un observador de orden reducido para estimar el parámetro de par de carga junto con los términos de fricción y dinámicas no modeladas por el sistema. Para este diseño se toman las siguientes suposiciones:

- La entrada al observador de par a la variable de corriente de cuadratura $u_0 = i_q$.
- La variable de velocidad se toma como salida, ya que ésta es supuesta conocida porque es calculada por el estimador PLL, $y_0 = \hat{\omega}$.
- Los valores nominales de los parámetros, J y K_m son conocidos.
- El valor estimado del parámetro de par de carga, que incluye los términos de fricción y dinámicas no modeladas, se considera constante y desconocido, pero acotado.

A partir de la ecuación mecánica del MSIP dada por (2.29), se tiene que:

$$\tau_L = K_m u_0 - J \frac{dy_0}{dt} \quad (3.13)$$

como una medida indirecta del par de carga τ_L . Se propone el siguiente observador adaptable para τ_L como sigue:

$$\frac{d\hat{\tau}_L}{dt} = \lambda (\tau_L - \hat{\tau}_L) \quad (3.14)$$

donde $\lambda > 0$ es la ganancia del observador y $\hat{\tau}_L$ es el par estimado por el observador. Por lo tanto, la dinámica del error de estimación es dada por:

$$\frac{de_{\tau_L}}{dt} = -\lambda e_{\tau_L} \quad (3.15)$$

donde $e_{\tau_L} = \tau_L - \hat{\tau}_L$. Escogiendo a $\lambda \gg 0$, el error de observación e_{τ_L} , converge a cero exponencialmente cuando $t \rightarrow \infty$. Por lo tanto, se tiene el siguiente observador de orden reducido, después de usar la expresión para τ_L :

$$\frac{d\hat{\tau}_L}{dt} + \lambda J \frac{dy_0}{dt} = \lambda K_m u_0 - \lambda \hat{\tau}_L$$

definiendo a la variable $\eta = \hat{\tau}_L + \lambda J y_0$, se tiene lo siguiente,

$$\hat{\tau}_L = \eta - \lambda J y_0 \quad (3.16)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = -\lambda \eta + \lambda^2 J y_0 + \lambda K_m u_0 \quad (3.17)$$

Con la finalidad de minimizar los efectos del par de carga en el eje del MSIP, el valor estimado de este parámetro se adapta en línea a la ley de control de seguimiento suave de posición angular tratado a detalle en la siguiente subsección.

3.4. Diseño de la ley de control

En esta sección se diseña el controlador suave de posición angular basado en la técnica Backstepping, a partir del modelo linealizado en forma exacta (3.4) escogiendo como salidas a la corriente directa, i_d y a la posición angular, θ_m . Por otra parte, los valores estimados de la posición angular, velocidad angular y par de carga, se adaptan a la ley de control de seguimiento suave de posición angular.

Controlador Backstepping de seguimiento suave de posición angular

Partiendo de la forma normal de *Brunovsky* del MSIP 3.4, se diseñará la ley de control de seguimiento suave de posición angular, la cual adapta el valor estimado del parámetro de par de carga que incluye los términos de fricción no modelados. Antes de desarrollar el diseño del controlador se hacen las siguientes suposiciones:

- ▶ Las corrientes de fase i_a e i_b son medidas y transformadas al eje coordenado dq mediante el conocimiento de la variable de posición θ_m .
- ▶ Las variables de posición y velocidad angular son estimadas mediante un CRD o estimador basado en PLL, para este caso se justifica el suponer que las variables calculadas por el estimador basado en PLL no se distinguen de los valores reales medidos, es decir los valores estimados y los valores reales se consideran iguales.
- ▶ El valor del parámetro de par de carga y los términos de fricción no modelados se estiman mediante un observador de orden reducido, considerado constante y acotado. Este valor se adapta a la ley de control de seguimiento suave de posición angular.
- ▶ El siguiente conjunto de valores nominales de parámetros del motor se consideran conocidos: $\{K_m, L_s, n_p, R_s, J\}$.
- ▶ Solamente se calcula la trayectoria de referencia de posición angular junto con sus derivadas temporales mediante un polinomio Bézier, y se denotan como: $x_2^*(t) = \theta^*(t)$, $\dot{x}_2^*(t) = \dot{\theta}^*(t)$, $\ddot{x}_2^*(t) = \ddot{\theta}^*(t)$ y $\dddot{x}_2^*(t) = \dddot{\theta}^*(t)$. Mientras que la trayectoria de referencia de la corriente directa junto con sus derivadas se planean con un valor nominal igual a cero, y se denotan como: $x_1^*(t) = i_d^*(t) = 0$, $\dot{x}_1^*(t) = \frac{di_d^*(t)}{dt} = 0$. Esto debido a que se optimiza el valor nominal del par desarrollado internamente por el MSIP, restringiendo el valor nominal de la corriente directa i_d a cero.

Paso 1. Cálculo del controlador de seguimiento de la parte eléctrica u_d .

Como se vió en el capítulo anterior, el primer paso para el diseño del controlador de posición basado en Backstepping, es proponer la función candidata de Lyapunov la cual debe ser una función definida positiva y su derivada debe ser una función definida negativa, de esta manera se propone la siguiente función :

$$V_1(z_1) = \frac{1}{2}z_1^2 \quad (3.18)$$

donde, la variable z_1 denota el error de seguimiento de la primer salida plana

$$z_1 = x_1(t) - x_1^*(t) \quad (3.19)$$

La función candidata de Lyapunov cumple con ser definida positiva, escalar diferenciable no acotada, donde su derivada temporal es,

$$\dot{V}_1(z_1) = z_1 \dot{z}_1 \quad (3.20)$$

donde la rapidez del error de seguimiento de z_1 , es dado por:

$$\dot{z}_1(t) = \dot{x}_1(t) - \dot{x}_1^*(t) = \alpha_1(x) + \beta_1 u_d \quad (3.21)$$

Se sustituye (3.21) dentro de (3.20), y se obtiene lo siguiente

$$\dot{V}_1(z_1) = z_1 [\alpha_1(x) + \beta_1 u_d] \quad (3.22)$$

Por lo tanto, para probar que esta última ecuación, sea definida negativa se propone que la primera entrada u_d sea:

$$u_d = -\frac{1}{\beta_1} [\alpha_1(x) + c_1 z_1] \quad (3.23)$$

donde, $c_1 > 0$ es un valor constante, que define la sensibilidad proporcional del controlador de seguimiento de la corriente directa del MSIP. Sustituyendo (3.23) en (3.22), resulta

$$\dot{V}_1(z_1) = -c_1 z_1^2 \quad (3.24)$$

Por lo tanto, el error de seguimiento converge exponencialmente al valor cero. **Paso 2. Cálculo del controlador de seguimiento de la parte mecánica u_q .**

Siguiendo con la metodología, se propone una segunda función candidata de Lyapunov como sigue:

$$V_2(z_1, z_2) = \frac{1}{2} z_2^2 + V_1(z_1) \quad (3.25)$$

donde se define el error de seguimiento para la segunda salida plana como:

$$z_2(t) = x_2(t) - x_2^*(t) \quad (3.26)$$

La derivada temporal (3.25) es dada como:

$$\dot{V}_2(z_1, z_2) = z_2 \dot{z}_2 - c_1 z_1^2 \quad (3.27)$$

donde la derivada del error de seguimiento de z_2 es,

$$\dot{z}_2 = \dot{x}_2(t) - \dot{x}_2^*(t) = x_3(t) - \dot{x}_2^*(t) \quad (3.28)$$

Sustituyendo (3.28) en (3.27) se obtiene lo siguiente

$$\dot{V}_2(z_1, z_2) = z_2 [x_3(t) - \dot{x}_2^*(t)] - c_1 z_1^2 \quad (3.29)$$

Como paso intermedio se propone un error de seguimiento z_3 , el cual involucra a la variable virtual $\gamma_1(x)$ que consigue que la derivada temporal de $V_2(z_1, z_2)$ sea definida negativa,

$$z_3(t) = x_3(t) - \gamma_1(x) \iff x_3(t) = z_3(t) + \gamma_1(x) \quad (3.30)$$

La variable $x_3(t)$ de (3.30) se sustituye en la derivada temporal de $V_2(z_1, z_2)$ y queda como:

$$\dot{V}_2(z_1, z_2) = z_2 [z_3(t) + \gamma_1(x) - \dot{x}_2^*(t)] - c_1 z_1^2 \quad (3.31)$$

Aquí se puede proponer a la variable virtual o control virtual $\gamma_1(x)$ como:

$$\gamma_1(x) = \dot{x}_2^*(t) - c_2 z_2 \quad (3.32)$$

Por lo tanto, la derivada temporal de $V_2(z_1, z_2)$ es

$$\dot{V}_2(z_1, z_2) = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 + z_2 z_3 \quad (3.33)$$

donde $c_2 > 0$ se define como la sensibilidad proporcional del error de seguimiento de la variable z_2 . Para conseguir que la derivada temporal de $V_2(z_1, z_2)$ sea definida negativa, basta con elegir a $z_3(t) = 0$, para que los errores de seguimiento z_1 y z_2 convergan a cero exponencialmente.

$$\dot{V}_2(z_1, z_2) = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 \quad (3.34)$$

Se sigue el método proponiendo la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V_3(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{2} z_3^2 + V_2(z_1, z_2) \quad (3.35)$$

de ahí, la derivada temporal de la función $V_3(z_1, z_2, z_3)$ es dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(z_1, z_2, z_3) &= z_3 \dot{z}_3 + \dot{V}_2(z_1, z_2) \\ &= z_3 \dot{z}_3 + z_2 z_3 - c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 \\ &= z_3 (\dot{z}_3 + z_2) - c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 \end{aligned} \quad (3.36)$$

de (3.30) se calcula la derivada temporal de z_3

$$\dot{z}_3(t) = \dot{x}_3(t) - \dot{\gamma}_1(x) = x_4(t) - \frac{\tau_L}{J} + c_2 \dot{z}_2 - \ddot{x}_2^*(t) \quad (3.37)$$

Sustituyendo (3.37) en (3.36), la derivada temporal de $V_3(z_1, z_2, z_3)$ queda de la siguiente forma

$$\dot{V}_3(z_1, z_2, z_3) = z_3 \left(x_4 - \frac{\tau_L}{J} + c_2 \dot{z}_2 - \ddot{x}_2^* + z_2 \right) - c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 \quad (3.38)$$

Se propone el error de seguimiento z_4 , el cual involucra un segundo control virtual $\gamma_2(x)$ que consigue que la derivada temporal de $V_3(z_1, z_2, z_3)$ sea definida negativa, por lo tanto

$$z_4(t) = x_4(t) - \gamma_2(x) \iff x_4(t) = z_4(t) + \gamma_2(x) \quad (3.39)$$

Sustituyendo (3.39) en (3.38) se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(z_1, z_2, z_3) &= z_3 \left(z_4 + \gamma_2(x) - \frac{\tau_L}{J} + c_2 \dot{z}_2 - \ddot{x}_2^* + z_2 \right) \\ &\quad - c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 \end{aligned} \quad (3.40)$$

A partir de (3.40) se propone el segundo controlador virtual $\gamma_2(x)$ como:

$$\gamma_2(x) = \ddot{x}_2^* - c_2 \dot{z}_2 - c_3 z_3 - z_2 + \frac{\hat{\tau}_L}{J} \quad (3.41)$$

En este paso se adapta el parámetro del par de carga $\hat{\tau}_L$ al controlador virtual, y la ganancia $c_3 > 0$, se define como la sensibilidad proporcional del error de seguimiento de la variable z_3 . De ahí, se sustituye (3.41) en (3.40) y resulta que

$$\dot{V}_3(z_1, z_2, z_3) = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - c_3 z_3^2 - \underbrace{\frac{1}{J} (\tau_L - \hat{\tau}_L)}_{:=e_\tau} z_3 + z_3 z_4 \quad (3.42)$$

Para que la derivada temporal de $V_3(z_1, z_2, z_3)$ sea definida negativa se escoge a $z_4 = 0$, de ahí que los errores de seguimiento convergen a cero asintóticamente, mientras el error de estimación este acotado.

$$\dot{V}_3(z_1, z_2, z_3) = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - c_3 z_3^2 - e_\tau z_3 \quad (3.43)$$

Siguiendo con la metodología de la técnica *Backstepping* se propone la última función candidata de Lyapunov como sigue:

$$V_4(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{1}{2} z_4^2 + V_3(z_1, z_2, z_3) \quad (3.44)$$

donde su derivada temporal de (3.44) es,

$$\begin{aligned} \dot{V}_4(z_1, z_2, z_3, z_4) &= -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - c_3 z_3^2 + z_4 [\dot{z}_4 + z_3] \\ &\quad - e_\tau z_3 \end{aligned} \quad (3.45)$$

donde la derivada temporal de z_4 es dada por

$$\begin{aligned}\dot{z}_4(t) &= \dot{x}_4(t) - \dot{\gamma}_2(x) \\ &= \alpha_2(x) + \beta_2 u_q - \ddot{x}_2^* + c_2 \left(x_4 - \frac{1}{J} \tau_L - \ddot{x}_2^*\right) \\ &\quad + c_3 \left(x_4 - \frac{1}{J} \tau_L + c_2 \dot{z}_2 - \ddot{x}_2^*\right)\end{aligned}\quad (3.46)$$

Sustituyendo (3.46) en (3.45) se obtiene que:

$$\begin{aligned}\dot{V}_4(z_1, z_2, z_3, z_4) &= -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - c_3 z_3^2 - e_\tau z_3 \\ &\quad + z_4 [\alpha_2(x) + \beta_2 u_q - \ddot{x}_2^* \\ &\quad + c_2 \left(x_4 - \frac{1}{J} \tau_L - \ddot{x}_2^*\right) + z_3 \\ &\quad + c_3 \left(x_4 - \frac{1}{J} \tau_L + c_2 \dot{z}_2 - \ddot{x}_2^*\right)]\end{aligned}\quad (3.47)$$

La ley de control de seguimiento suave de la posición angular del MSIP es dada por:

$$\begin{aligned}u_q &= -\frac{1}{\beta_2} [\alpha_2(x) - \ddot{x}_2^* + c_2 \left(x_4 - \frac{1}{J} \hat{\tau}_L - \ddot{x}_2^*\right) \\ &\quad + c_3 \left(x_4 - \frac{1}{J} \hat{\tau}_L + c_2 \dot{z}_2 - \ddot{x}_2^*\right) + z_3 + c_4 z_4]\end{aligned}\quad (3.48)$$

Sustituyendo la ley de control (3.48) en (3.47) se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}\dot{V}_4(z_1, z_2, z_3, z_4) &= -\sum_{i=1}^4 c_i z_i^2 - e_\tau z_3 - [c_2 + c_3] e_\tau z_4 \\ &= -\mathbf{z}^T \mathbf{C} \mathbf{z} - \mathbf{z}^T \mathbf{M} e_\tau\end{aligned}\quad (3.49)$$

donde,

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ c_2 + c_3 \end{pmatrix}; \quad (3.50)$$

3.5. Estabilidad entrada al estado

Una prueba de estabilidad similar del esquema Backstepping con observador de oeden reducido se puede consultar en [49].

Para el análisis de la estabilidad del sistema se hace la siguiente proposición.

Proposición 1 *Se considera el sistema MSIP perturbado (3.4) con el controlador de seguimiento por retroalimentación Backstepping (3.23) y (3.48) entonces, la dinámica del error de seguimiento (3.49) define una estabilidad de entrada al estado mapeada, considerando e_τ como una entrada y \mathbf{z} como un estado.*

Prueba 1 *Considérese la siguiente función definida positiva candidata de Lyapunov*

$$V(\mathbf{z}) = V_4(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2 + \frac{1}{2}z_3^2 + \frac{1}{2}z_4^2 > 0$$

cuya derivada a lo largo de las trayectorias (3.21), (3.28), (3.37) y (3.46), está dada por

$$\dot{V}(\mathbf{z}) = -\mathbf{z}^T \mathbf{C} \mathbf{z} - \mathbf{z}^T \mathbf{M} e_\tau \quad (3.51)$$

donde \mathbf{C} y \mathbf{M} están definidas en (3.50). Note que la matriz diagonal constante es definida positiva, es decir $\mathbf{C} > \mathbf{0}$, entonces en el caso de que $e_\tau = 0$ implica que $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ es un punto de equilibrio globalmente exponencialmente estable, ya que

$$\dot{V}(\mathbf{z}) = -\mathbf{z}^T \mathbf{C} \mathbf{z} < \mathbf{0} \quad (3.52)$$

Por otro lado, si el error de estimación de los parámetros de par $e_\tau \neq 0$, entonces el término $\mathbf{z}^T \mathbf{M} e_\tau$, puede escribirse por desigualdad de Young, como

$$\mathbf{z}^T \mathbf{M} e_\tau \leq \lambda (\|\mathbf{z}^T\|)^2 + \frac{\gamma^2(c_2, c_3)}{4\lambda} e_\tau^2$$

donde, $\gamma^2(c_2, c_3) = c_2^2 + c_3^2 + 2c_2c_3 + 1 > 0$, $p = q = 2$ y $\varepsilon = 2\lambda$, en consecuencia (3.51), queda de la siguiente manera

$$\dot{V}(\mathbf{z}) = -\mathbf{z}^T \mathbf{C} \mathbf{z} - \mathbf{z}^T \mathbf{M} e_\tau \leq -\mathbf{z}^T \mathbf{C} \mathbf{z} + \frac{\gamma^2(c_2, c_3)}{4\lambda} e_\tau^2 \quad (3.53)$$

λ es la ganancia del estimador de par $c_2, c_3 > \lambda > 0$. Mediante el enfoque de estabilidad de entrada la ecuación (3.53) puede escribirse como sigue

$$\dot{V}(\mathbf{z}) \leq -(1 - \phi) \mathbf{z}^T \mathbf{C} \mathbf{z} - \phi \mathbf{z}^T \mathbf{C} \mathbf{z} + \frac{\gamma^2(c_2, c_3)}{4\lambda} e_\tau^2$$

con $\phi > 0$ es una constante positiva la cual pertenece al conjunto abierto $(0, 1)$.

Por lo tanto,

$$\dot{V}(\mathbf{z}) \leq -(1 - \phi) \mathbf{z}^T \mathbf{C} \mathbf{z}$$

para todo

$$|\mathbf{z}| \geq \frac{\gamma(c_2, c_3)}{4\lambda\phi [\lambda_{\min}(\mathbf{C})]} |e_\tau|$$

Entonces aplicando el Teorema 5.2 de [46] se demuestra que el mapeo

$$e_\tau \rightarrow \mathbf{z}$$

es estable de entrada al estado (ISS). Para obtener explícitamente la cota del vector de estado $\mathbf{z}(t)$, se considera la función $\mathbf{z}(t) e^{kt}$. Usando (3.53), se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (V(\mathbf{z}) e^t) &= \dot{V}(\mathbf{z}) e^t + V(\mathbf{z}) e^t \\ &\leq -(\mathbf{z}^T \mathbf{C} \mathbf{z}) e^t + \frac{\gamma^2(c_2, c_3)}{4\lambda} e_\tau^2 e^t + (\mathbf{z}^T \mathbf{C} \mathbf{z}) e^t \\ &= \frac{\gamma(c_2, c_3)^2}{4\lambda} e_\tau^2 e^t \end{aligned} \quad (3.54)$$

Integrando ambos lados a (3.54) en el intervalo cerrado $[0, t]$, se produce

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^2 e^t &\leq \mathbf{z}^2(0) + \frac{1}{4\lambda} \underbrace{\gamma^2(c_2, c_3) e_\tau^2}_{:= \sup_{0 \leq \tau \leq t} \Delta^2(\tau)} \int_0^t e^\tau d\tau \\ &= \mathbf{z}^2(0) + \frac{1}{4\lambda} \left[\sup_{0 \leq \tau \leq t} \Delta^2(\tau) \right] (e^t - 1) \end{aligned} \quad (3.55)$$

Multiplicando a (3.55) en ambos lados por el término e^{-t} , y utilizando el hecho de que $\sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b|$, se obtiene la cota del vector $\mathbf{z}(t)$:

$$\begin{aligned} |\mathbf{z}(t)| &\leq |\mathbf{z}(0)| e^{-t} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \left[\sup_{0 \leq \tau \leq t} |\Delta(\tau)| \right] (1 - e^{-t}) \\ &\leq |\mathbf{z}(0)| e^{-t} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \left[\sup_{0 \leq \tau \leq t} |\Delta(\tau)| \right] \end{aligned} \quad (3.56)$$

Desde que $\sup_{0 \leq \tau \leq t} |\Delta(\tau)| \leq \sup_{0 \leq \tau \leq \infty} |\Delta(\tau)| \triangleq |\Delta|_\infty$, (3.56) conduce a

$$|\mathbf{z}(t)| \leq |\mathbf{z}(0)| e^{-t} + \frac{|\Delta|_\infty}{2\sqrt{\lambda}}$$

lo cual muestra que el vector de seguimiento $\mathbf{z}(t)$ converge a un conjunto compacto \mathcal{R} definido como:

$$\mathcal{R} = \{z(t) : |z(t)| \leq \frac{|\Delta|_\infty}{2\sqrt{\lambda}}\}$$

y por lo tanto

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}\{z(t), \mathcal{R}\} = 0 \quad (3.57)$$

Capítulo 4

RESULTADOS

En este capítulo se hace una reseña de la plataforma experimental utilizada para después presentar los resultados experimentales obtenidos del control de posición con la técnica backstepping.

4.1. Resultados en simulación

En esta sección se muestra el desempeño del MSIP aplicando el controlador Backstepping diseñado en la sección anterior. Es importante resaltar que en el diseño del controlador no se toman en cuenta variaciones de parámetros y el par de carga aplicado se considera constante. Las simulaciones se realizaron en el entorno de simulación Matlab/Simulink-PSIM con un periodo de muestreo de 0.1ms. Los parámetros del MSIP utilizado con numero de serie BSM80N-275AF de *Baldor Electric Company* son mostrados en la tabla 4.1. También, la figura 4.1 muestra el diagrama del esquema de co-simulación implementado y distribuido de la siguiente manera:

- Modelo del MSIP en PSIM. Este bloque contiene el diagrama construido en el simulador PSIM, donde se incluye el modelo del motor dado por las ecuaciones (2.27)-(2.30). En este bloque de simulación se incluye también un circuito inversor fuente de voltaje trifásico de 2.4 KW con un bus de CD fijo a 50 V, un sensor resolver y un aditamento para aplicar par de carga al motor, así como la generacin de PWM's y el sensado de corrientes
- Observador PLL. Este bloque es el encargado de proporcionar la posición y la velocidad angular obtenidas del observador PLL que corresponde a dinámica de las ecuaciones (3.11)-(3.12).
- Transformaciones abc/dq y dq/abc . Estos bloques hacen las transformaciones

de los ejes coordenados correspondientes utilizando la matriz de transformación y de rotación dadas por las ecuaciones (2.10) y (2.12) respectivamente.

- Trayectoria deseada. Bloque encargado de proporcionar los valores deseados para la posición angular y sus derivadas mediante la ayuda de un polinomio de Bézier de décimo orden, con la finalidad de obtener una trayectoria suave que inicie en una referencia fija $\bar{\theta}_{ini}^* = 0$ [rad] y termine en una referencia fija $\bar{\theta}_{fin}^* = 7$ [rad].
- Observador de Par. En este bloque se encuentra el observador de par de primer orden que corresponde a la dinámica de las ecuaciones (3.16) y (3.17) donde se utilizó $\lambda = 20$.
- Controlador Backstepping. Aquí se encuentra el controlador Backstepping desarrollado en el Capítulo 3, el cual contiene los controles u_d y u_q dados por las ecuaciones (3.23)-(3.48). Las constantes del controlador son establecidas como $c_i = 600$, para $i = 1, 2, 3, 4$.

Parámetros	Valor
R_s	1,6 Ω
$L_d = L_q = L_s$	6.365 mH
$V_{pk}/krpm$	77.3 V
No. de polos P	4
Momento de inercia (J)	0.182E-3 kg-m ²
Constante mecánica (τ_{mech})	2.0919 s.
Coefficiente de fricción ($B = J/\tau_{mech}$)	8.7E-5 kg-m ² /s.
Velocidad típica calculada/300 bus de dc	419 rad/s.
Torque típico calculado/300 bus de dc	3.2 Nm

Tabla 4.1: Parámetros del MSIP

Las pruebas se realizan siguiendo una trayectoria deseada basada en un polinomio de Bézier de décimo orden, ver [38], la cual es diseñada para comenzar en $\theta_{ini}(1 s) = 0$ rad y finalizar en $\theta_{fin}(4 s) = 7$ rad. En esta prueba se hace un cambio súbito de carga de cero a $\tau_L(5 s) = 2$ Nm. En la figura 4.2 se puede apreciar dicha trayectoria y se puede observar que se logra una buena regulación de la posición a pesar del par de carga aplicado.

En la figura 4.3 se presenta el observador de par el cual estima el par sometido y desconocido a los 5 s y que aparece otra perturbación antes del par aplicado. Esto es debido a que el observador estima, además del par sometido, un par de carga generado por la fricción viscosa producida por el acoplamiento de otro motor al eje del MSIP, la cual no fue considerada en el modelo del motor. Ahora el par de carga

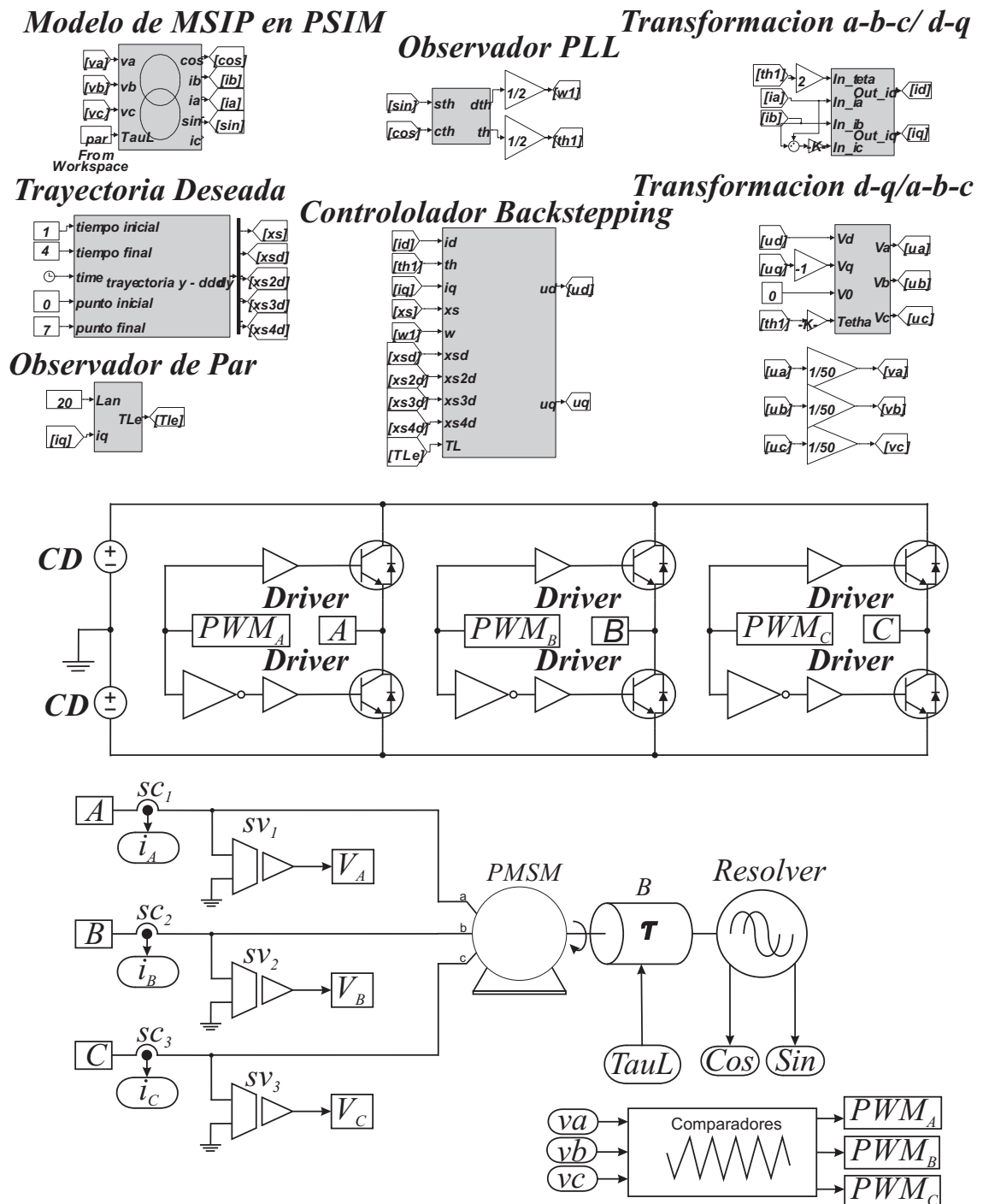


Figura 4.1: Diagrama a bloques del esquema de la co-simulación Matlab-Simulink/PSIM.

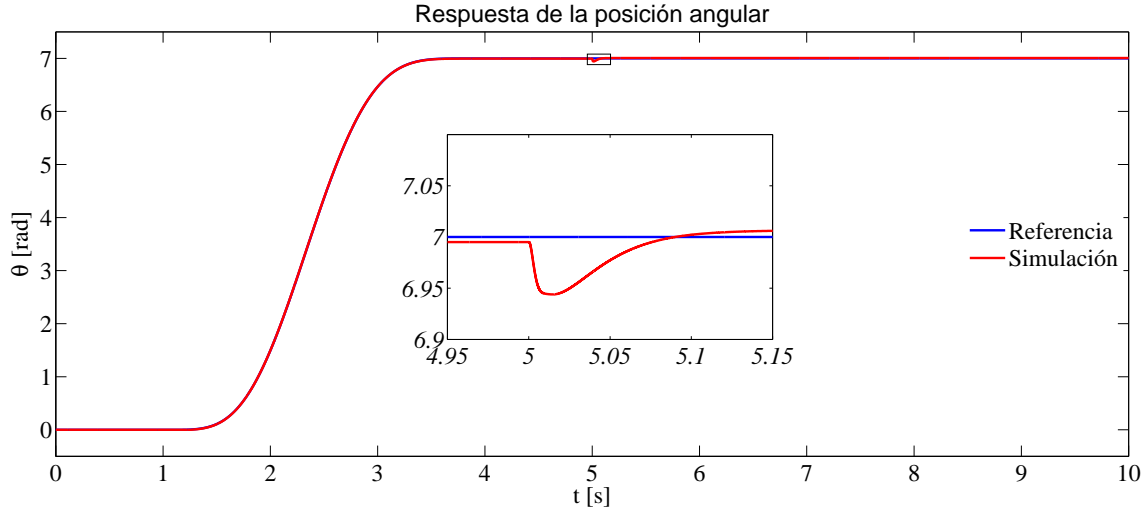


Figura 4.2: Respuesta del seguimiento de posición en presencia de un par aplicado en $t=5$ s.

es $\tau_{L(2)} = J_a \frac{d\omega}{dt} + B_a \omega + \tau_L$, donde J_a y B_a son la inercia y el coeficiente de fricción viscosa del segundo eje.

Este par de carga por acoplamiento de ejes se traduce como una variación de parámetros mecánicos del sistema lo que representa una perturbación acotada, es por ello que, aunque el observador fue diseñado para par de carga constante, el esquema compensa el efecto negativo sobre el seguimiento. La figura 4.4 muestra la corriente de cuadratura i_q y la corriente directa i_d , en donde se observa que la corriente directa sigue la trayectoria deseada ($i_d = 0$) aún después de que el par fue aplicado.

Estos resultados de simulación muestran que el control del MSIP, mediante la técnica de control Backstepping, proporciona un control robusto bajo pares de carga constantes mediante un observador de par de orden reducido.

En algunas ocasiones se considera utilizar criterios como el ISE (Integral of squared error) para evaluar el desempeño del controlador [51]. Este criterio es relativamente insensible a errores pequeños, los errores grandes contribuyen mucho al valor de la integral que da una respuesta con pequeños sobre impulsos, estabilidad relativamente baja y largos tiempos de establecimiento. En este trabajo se propusieron dos trayectorias normalizadas del índice de rendimiento ISE de la siguiente manera:

$$ISE_{\theta_m}(t) = \frac{1}{N_c} \int_0^t (\theta_m(t) - \theta^*(t))^2 dt$$

$$ISE_{\theta_m}(t) = \frac{1}{N_\lambda} \int_0^t (\theta_m(t) - \theta^*(t))^2 dt$$

donde los parámetros N_c y N_λ son los factores normalizantes de las funciones $ISE_{\theta_m}(t)$. La figura 4.5 muestra la evaluación de la robustez del controlador cuando

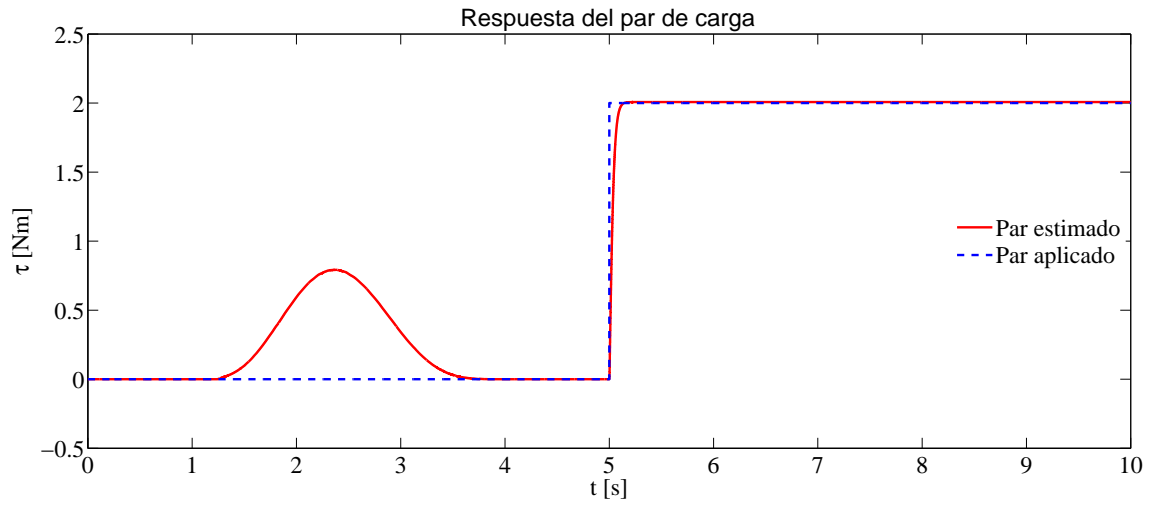
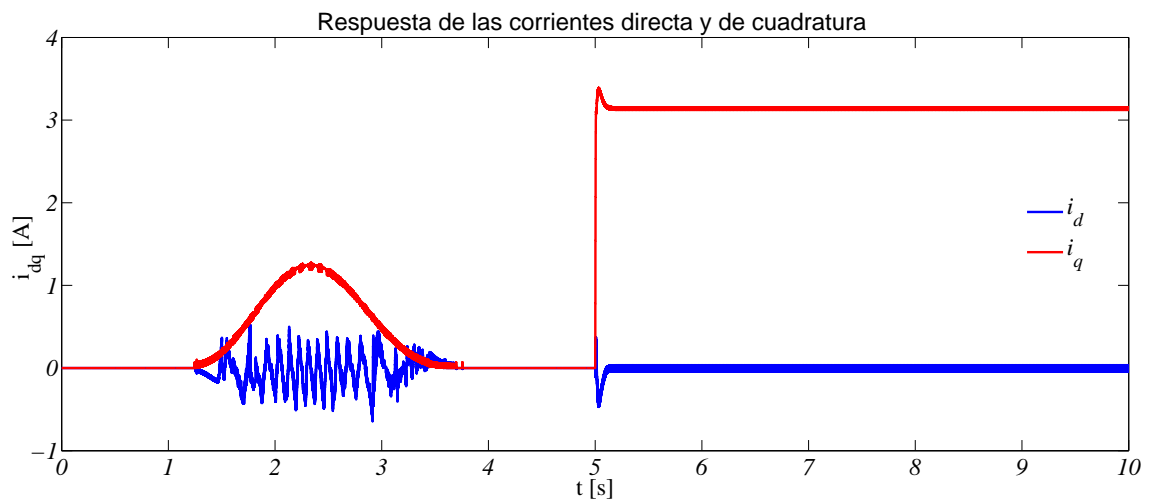


Figura 4.3: Respuesta del estimador de Par

Figura 4.4: Comportamiento de las corrientes i_d e i_q

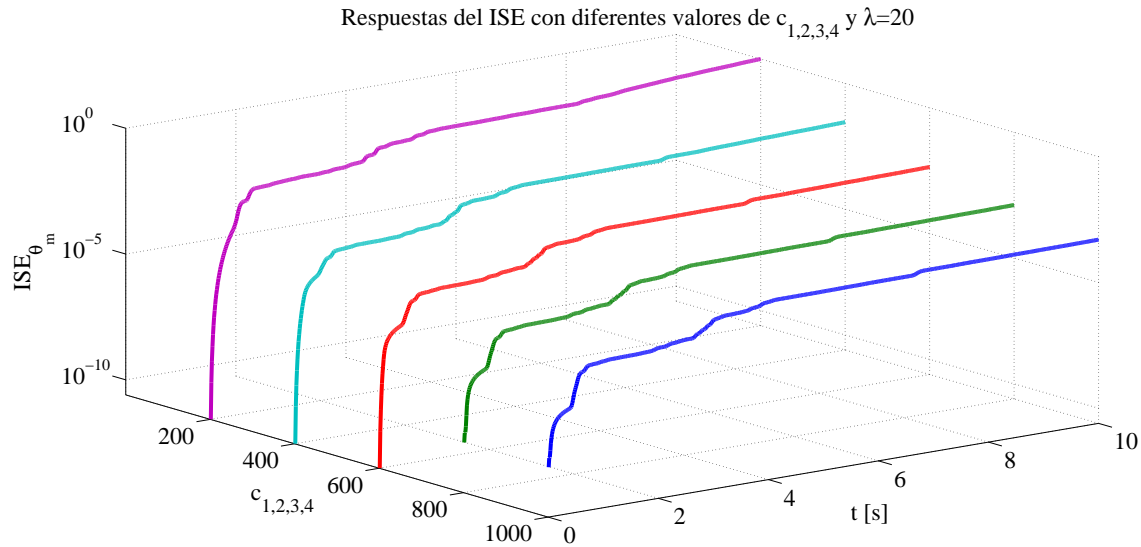


Figura 4.5: Comportamiento del ISE para la posición variando las constantes del controlador

se varía el valor de las constantes $c_{1,2,3,4}$ y tomando $\lambda = 20$. Se puede observar que cuando $c_{1,2,3,4} = 200$ el ISE es muy grande, y cuando se comienza a elevar estas ganancias se va obteniendo un mejor desempeño del control reduciendo así el ISE. La figura 4.6 muestra la evaluación en escala logarítmica de la robustez del controlador cuando se varía el valor de la constante λ y tomando $c_{1,2,3,4} = 600$. El estado estacionario de estas funciones indica que los errores correspondientes de seguimiento de la salida, son finalmente muy pequeños. Se puede observar que cuando $\lambda = 5$ el ISE es muy grande siendo este el valor menos indicado para obtener un buen comportamiento, y cuando se comienza a elevar estas ganancias se va obteniendo un mejor desempeño del control reduciendo así el ISE.

4.2. Descripción de la plataforma experimental

La figura 4.7 muestra el diagrama general a bloques de la planta experimental utilizada, la cual está constituida por un MSIP trifásico (BSM80N-275AA), donde sus parámetros están especificados en la tabla 4.1, un motor/dinamómetro modelo 8960-1X (utilizado para aplicar un par de carga al MSIP acoplado), un puente de diodos rectificador trifásico (3-PBD), un autotransformador de 10 A (ver figura 4.9), un inversor fuente de voltaje (VSI) de 2.4 kW integrado por dispositivos de conmutación IGBT's que cuentan con su etapa de optoacoplamiento y un transformador con 4 devanados para suministrar los voltajes necesarios al circuito, dos sensores de corriente (NT-50) incorporados a la plataforma para medir las corrientes

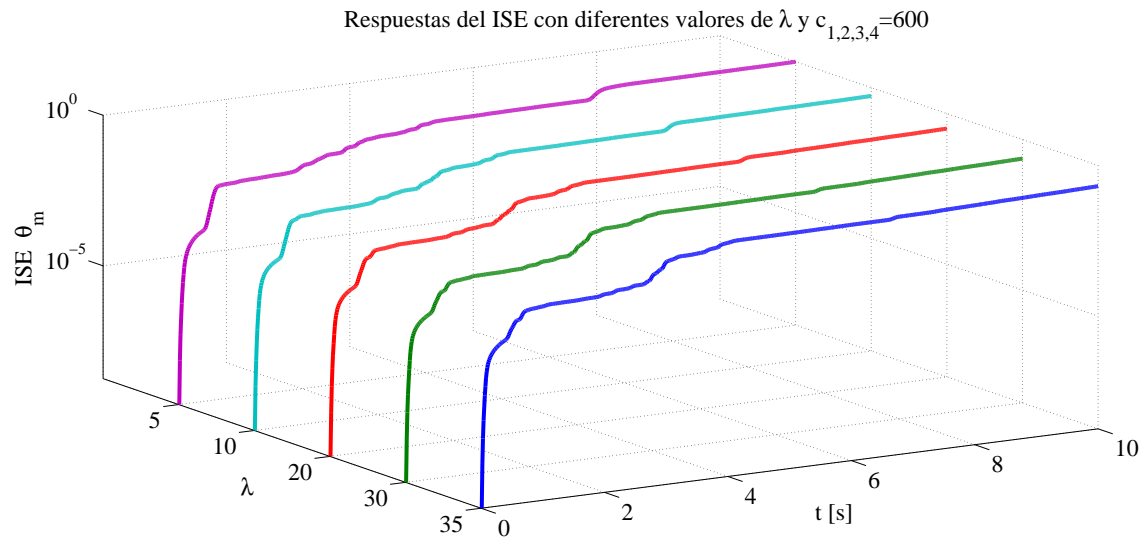


Figura 4.6: Comportamiento del ISE para la posición variando la constante del observador de par

de fase i_a (CS1) e i_b (CS2) y una tarjeta de control DS1104 dSPACE, donde están implementados los módulos siguientes:

- Dispositivo PWM
- Observador de posición (PLL)
- Observador de par de carga
- Trayectoria de referencia
- Transformaciones abc/dq y dq/abc
- Controlador robusto backstepping

Esta tarjeta proporciona un entorno gráfico interactivo y un conjunto de librerías que permiten diseñar, simular implementar, y adquirir una variedad de variables en tiempo real. Este sistema de prototipado rápido facilita la implementación del algoritmo de control, ya que combina las capacidades del Procesador Digital de Señales (DSP, Digital Signals Processor) y los de un microcontrolador. Las características que posee el módulo dSPACE son [50]:

- Procesador principal modelo MPC8240, núcleo PowerPC 603e, 250 MHz, memoria cache de 32 kB.

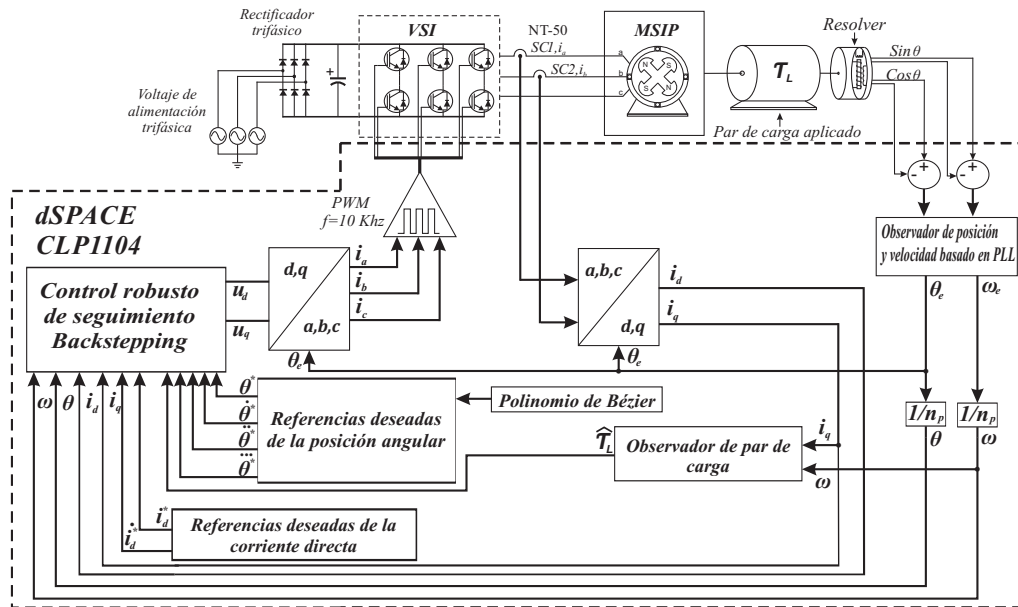


Figura 4.7: Diagrama general de la plataforma experimental.

- Memoria de 32 MB en SDRAM y memoria flash de 8 MB.
- Temporizadores de 32 bits (contador descendente), 4 temporizadores de propósito general y para conteo del tiempo de 64 bits.
- Interruptores controlados para el manejo de los temporizadores, encoders, puerto UART, DSP esclavo, PWM, ADC y conectores de entradas y salidas.
- Entradas analógicas conformadas por 4 ADC independientes y un ADC de 16 bits (multiplexado).
- 8 DACs como salidas analógicas (canales) de 16 bits.
- 20 entradas y salidas digitales.
- 2 encoders incrementales de entrada (TTL o RS422) de 24 bits.
- Interfaz serial UART.
- DSP esclavo TMS320F240.
- Conexión del módulo mediante un conector PCI de 32 bits.
- Tamaño físico del conector: 185 X 106.68 mm.
- Operación en un rango de temperatura: 0-55 C.



Figura 4.8: Señales entrada/salida en la interfaz del equipo dSPACE

- Fuente de alimentación de +5 a 2.5 A, +12 a 0.3 A y -12 a 0.2 A.
- Consumo de potencia: 18.5 W.

El algoritmo de control diseñado se programa en el equipo dSPACE CLP1104 mediante el uso del software Simulink de Matlab. En la figura 4.8 se muestra el módulo de terminales del equipo dSPACE. Las terminales ACDH# son entradas a los convertidores analógico-digital y las SPWM son terminales de salida PWM. La Tabla 4.2 da una descripción más detallada de las señales relacionadas con estas terminales.

La programación de la plataforma cuenta con los módulos mostrados en la figura 4.7. Los cuales continuación se describen brevemente:

- Dispositivo PWM: Genera 6 PWM's de 10 kHz de frecuencia. Estas señales están disponibles en el puerto SPWM(U) del equipo dSPACE, ver figura 4.8.
- Observador de posición PLL: Con el cual se obtiene la posición del rotor mediante las señales ADCH1(cos), ADCH2(sin) y la señal demoduladora ADCH3(trig).
- Observador de par de carga: Determina el valor del par de carga sometido, así como la dinámica no modelada.
- Trayectoria de referencia: Genera la trayectoria deseada de posición, empleando un polinomio de Bézier de décimo orden.
- Transformaciones abc/dq y dq/abc : Transforman de un eje coordinado trifásico a uno bifásico y viceversa. Requiere de las siguientes señales ADCH5(I_a) y ADCH6(I_b)

Terminal	Etiqueta	Descripción
ADCH1	\cos	Señal \cos que entrega el sensor de velocidad (resolver)
ADCH2	\sin	Señal \sin que entrega el sensor de velocidad (resolver)
ADCH3	trig	Señal que es utilizada para la demodulación de las señales recibidas del resolver
ADCH5	I_a	La señal I_a se obtiene del sensor de corriente implementado en la plataforma experimental. Este sensor tiene una sensibilidad de 0.02 V por cada Ampere, por lo que se requiere multiplicar internamente por un factor de 50
ADCH6	I_b	La señal I_b se obtiene del sensor de corriente. Se requiere multiplicar internamente por un factor de 50. Debido a que se trabaja con un sistema que se supone balanceado no es necesario el uso de 3 sensores
ADCH7	T_L	Señal del sensor de par de sometido. Esta señal es utilizada para hacer la comparación con la señal que proporciona el estimador de par
SPWM1	U	Señales de salida PWM de la plataforma experimental de software, las cuales son controladas por las salidas del controlador u_d y u_q del esquema de control diseñado. Dicha señal se acondiciona para que active los MOSFET's del inversor fuente de voltaje

Tabla 4.2: Descripción de señales de entrada-salida de la plataforma al equipo dSPACE.

- Controlador robusto backstepping: Este módulo contiene el programa del controlador backstepping para el seguimiento de la trayectoria de posición, el cual obtiene las señales $\alpha_1(x)$, $\beta_1(x)$, $\alpha_2(x)$, $\beta_2(x)$ u_d y u_q , a partir de las ecuaciones (3.2),(3.3),(3.23) y (3.48).
- Módulo Generador de la trayectoria: Genera la trayectoria de referencia deseada de posición, empleando un polinomio de Bézier de décimo orden.

Una vez implementada la plataforma experimental, se llevan a cabo las pruebas de desempeño de la técnica de control Backstepping.

El esquema de conexiones de la plataforma se muestra en la figura 4.7. La plataforma real es mostrada en la figura 4.9. Las pruebas se realizan programando una

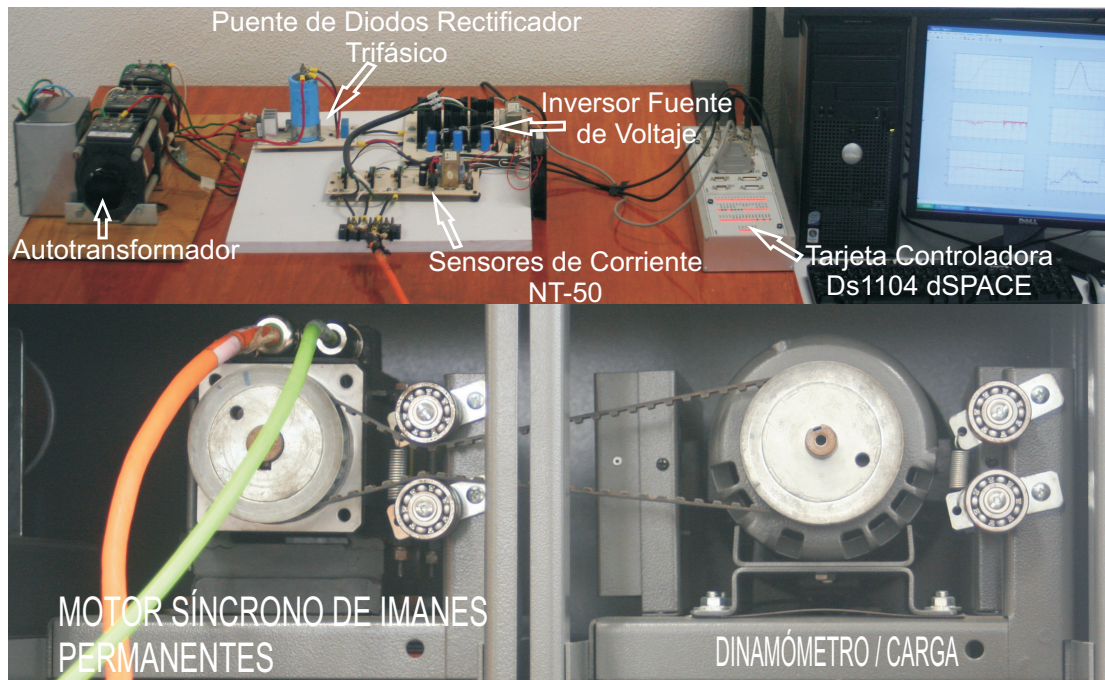


Figura 4.9: Plataforma experimental del control del MSIP

trayectoria de referencia deseada para la posición, aplicando un par de carga producida por el dinamómetro. La siguiente subsección abordará los resultados obtenidos experimentalmente.

4.3. Resultados experimentales

Las condiciones de funcionamiento de la plataforma experimental para realizar estas pruebas son las siguientes:

- Voltaje del bus de CD 50V
- Frecuencia de conmutación de los PWM's $f = 10 \text{ kHz}$
- Periodo de muestreo $0,1\text{ms}$
- Par de carga sometido $7Nm$
- Las constantes del control son fijadas en $c_i = 600$, para $i = 1, 2, 3, 4$.
- Para el observador de par se utilizó $\lambda = 20$.

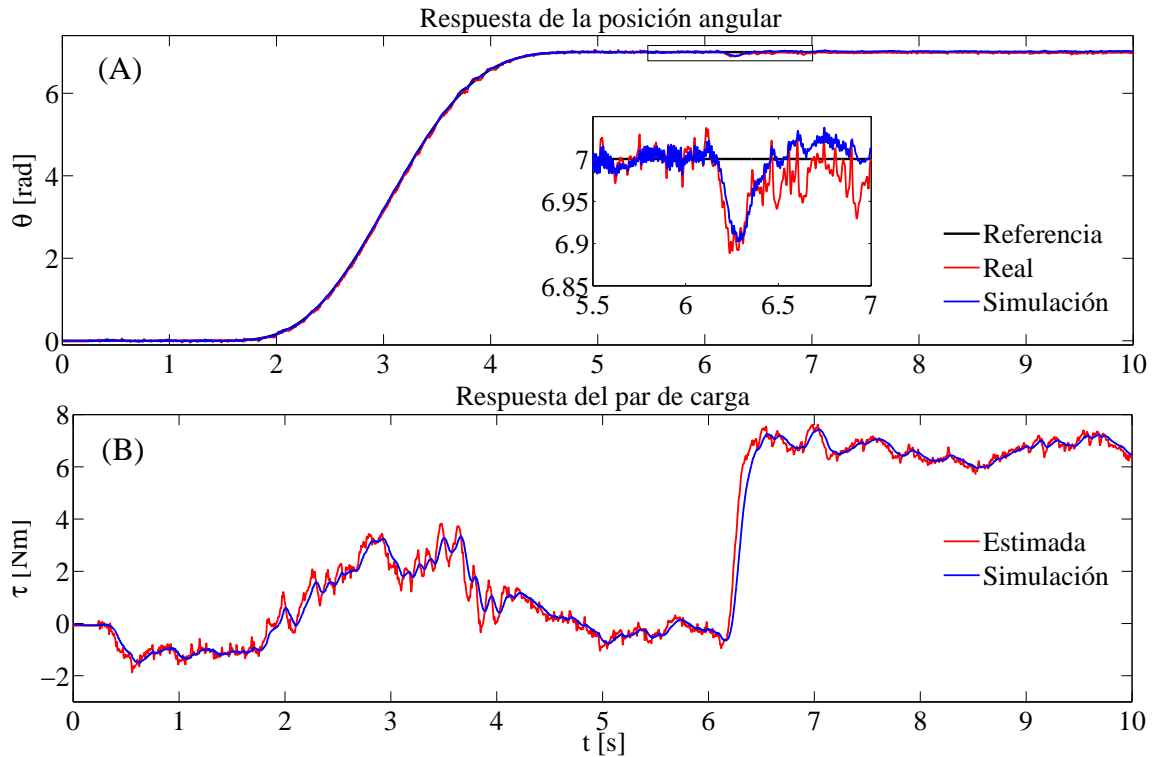


Figura 4.10: Resultados experimentales y de simulación: (A) Respuesta de la posición angular, (B) parámetro de par de carga

Cabe mencionar que el valor inicial y final de la trayectoria de referencia deseada esta definida como: $\bar{\theta}_{ini}^*(1,5) = 0$ [rad] y $\bar{\theta}_{fin}^*(4,5) = 7$ [rad] (ver figura 4.10) y los resultados son los siguientes:

La figura 4.10 muestra la señal experimental y de simulación de la respuesta de la posición angular del sistema en lazo cerrado para una trayectoria de referencia pre-especificada por la salida plana del sistema θ_r , basada en un polinomio Bézier de décimo orden, para el cálculo de la trayectoria de referencia deseada, ver [38]. Se puede apreciar que la posición proporciona una buena respuesta con la técnica de control backstepping tanto en simulación como experimental. La figura 4.10 muestra el desempeño del observador de par, el cual estima la dinámica no modelada y el par de carga sometido a los 6.3 s. Se puede observar que el resultado de simulación proporciona una buena predicción de lo que se espera a nivel experimental.

La figura 4.11 muestra la velocidad estimada mediante el observador PLL y se aprecia el efecto que ejerce el par sometido tanto en simulación como a nivel experimental.

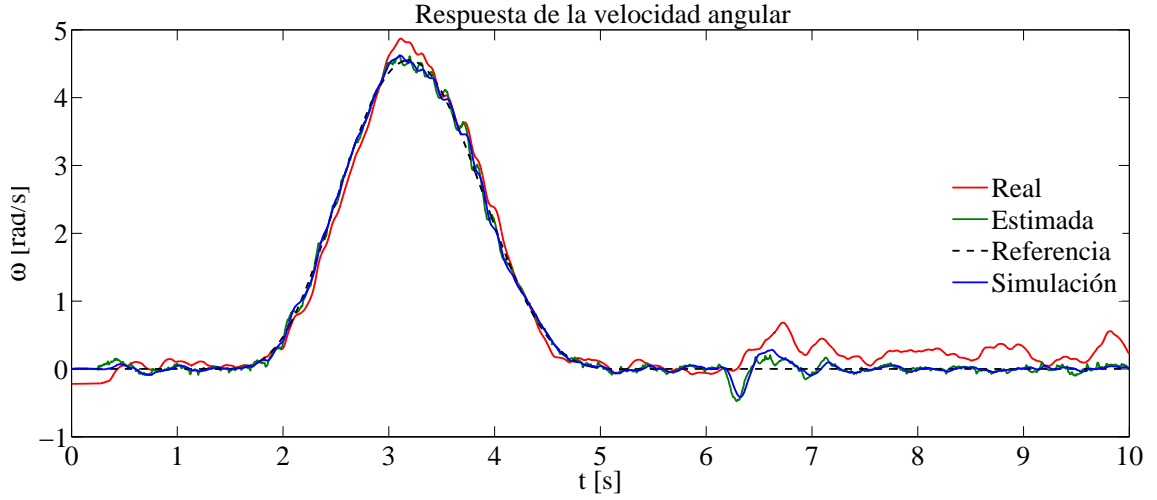


Figura 4.11: Respuesta del observador de velocidad

La respuesta de la posición angular muestra que la ley de control que se presenta tiene un desempeño robusto bajo condiciones de cambios súbitos de carga. La figura 4.12 muestra la respuesta de las corrientes i_d e i_q . En la figura 4.12(A), el valor de la corriente de cuadratura i_q alcanza 10 A, por encima de su valor nominal, mientras que la respuesta de la corriente continua i_d permanece cerca de cero, ver figura 4.12(B). Esto con el fin de trabajar el MSIP a bajas velocidades y optimizar el par de carga, por lo que propusimos una restricción de la i_d de la siguiente manera.

$$i_d^* = 0, \quad i_q^* = \frac{2J}{3K_m} \ddot{\theta}^*(t) + \frac{2}{3K_m} \hat{\tau}_L \quad (4.1)$$

La figura 4.13 muestra las respuestas de las entradas de control. Para obtener estas respuestas se utilizó el valor del bus de CD (VSI) a 50V. Este valor nominal fue necesario para desarrollar el mayor par del MSIP a velocidad baja. Con este nivel bajo del bus CD, se redujo al mínimo el ruido en el sistema. El ajuste de los observadores y las ganancias de los observadores fue hecha por separado. Esto es, las ganancias del observador PLL son:

$$\lambda_1 = 450 \quad (4.2)$$

$$\lambda_0 = 4,05 \times 10^5 \quad (4.3)$$

estos valores evitan y reducen al mínimo las oscilaciones y el ruido acústico de la posición y velocidad estimada. Mientras que la ganancia del observador de orden reducido para estimar el parámetro de par de carga:

$$\lambda = 20 \quad (4.4)$$

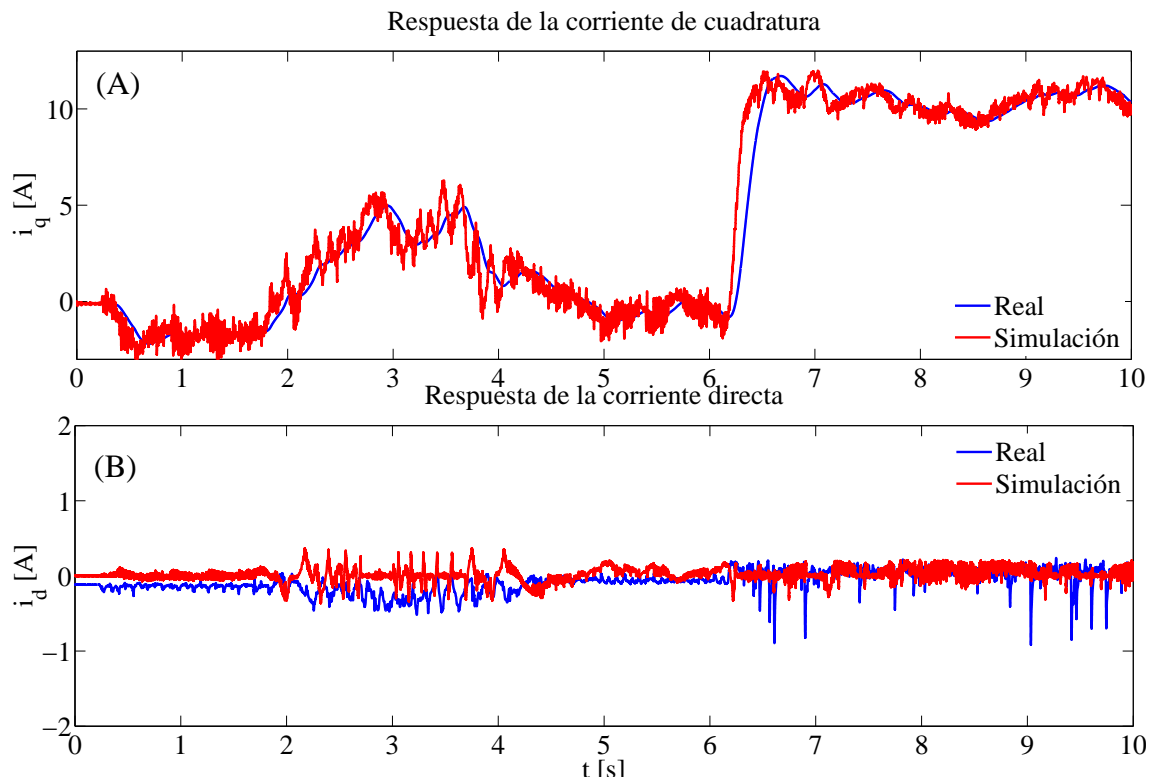


Figura 4.12: Resultados experimentales y de simulación: (A) respuesta de la corriente de cuadratura, (B) respuesta de la corriente directa (primera salida plana del sistema $y_1 = i_d$)

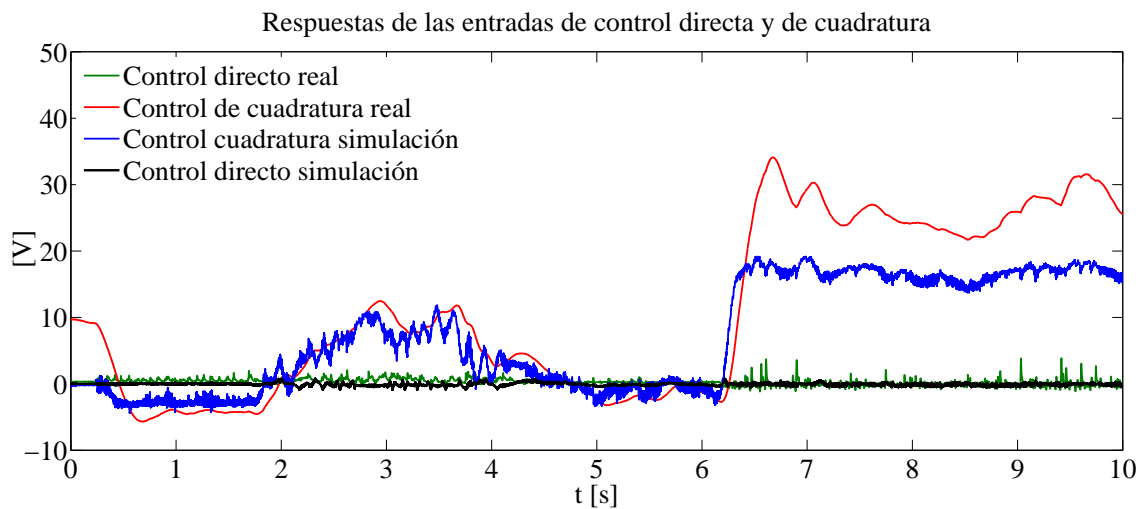


Figura 4.13: Resultados experimentales y de simulación: entradas de control para la trayectoria de control deseado

con este valor, se reduce al mínimo los efectos de las cargas súbitas aplicadas al eje del MSIP. La velocidad de convergencia del observador basado en PLL es más rápido que el observador de orden reducido, esto porque la reconstrucción de las variables de posición y de velocidad debe ser muy rápido, con el fin de estimar rápidamente el parámetro par de carga desconocido. Por otro lado, las ganancias del controlador backstepping para el seguimiento de la trayectoria, que proporcionan un buen seguimiento de la posición angular están dadas como:

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 600 \quad (4.5)$$

Capítulo 5

CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

En este capítulo se presentan las conclusiones referentes al control de posición de un MSIP mediante la técnica de control backstteping, además también se muestran propuestas sobre trabajos futuros.

5.1. Conclusiones

Las conclusiones del trabajo presentado:

- El modelo linealizado en forma exacta facilita la obtención de una ley de control Backstepping que fuerza la convergencia de los errores de seguimiento de trayectorias a cero siempre y cuando el error de estimación es cero y esto se cumple para pares de carga constantes.
- Una manera de hacer robusto el controlador backstepping propuesto, bajo pares de carga seccionalmente constantes, es mediante un observador de orden reducido.
- Las simulaciones en un entorno Matlab/Simulink-PSIM permiten incluir efectos de carga, medición, y modelos de elementos de conmutación realísticos, muestran también, que a pesar de que las funciones de salida del sensor de posición son de naturaleza no lineal, se consigue una estimación asintótica de θ_r y ω_r suficientemente exacta y robusta tal que se logra el seguimiento suave de trayectoria de posición angular del motor en presencia de pares de carga constantes desconocidos, pero acotados que incluyen términos de fricción.
- Debe conocerse perfectamente la posición del motor para generar adecuadamente los voltajes de control.

- Se obtuvieron buenos resultados aún en presencia del efecto de dentado que es más notorio cuando el motor posee pocos polos. Por lo que se recomienda utilizar para el control de posición motores con mas pares de polos.

5.2. Trabajo futuro

- Los resultados experimentales obtenidos, muestran que el esquema de control backstepping en conjunto con un observador de orden reducido para el parámetro del par de carga, presenta un buen desempeño ante perturbaciones súbitas. Sin embargo, también se pueden aplicar diversos controladores y observadores con la finalidad de realizar una comparativa entre éstos.
- Debe explorarse más a fondo las prestaciones del control backstepping a fin de aprovechar sus ventajas como la robustez a la incertidumbre de parámetros y otras perturbaciones.
- Exploración de técnicas sensorless para el control de posición del MSIP..
- El esquema de control presentado fue implementado en el equipo de adquisición dSPACE, sin embargo, se puede desarrollar en algún otro equipo, dígase FPGA's o sistemas xPC Target.
- Sería importante realizar pruebas en motores con un mayor número de pares de polos, ya que se reduciría el efecto de dentado y posiblemente el controlador de posición ofrecería un mejor desempeño.
- Una tarea a futuro importante es llevar estos trabajos de control del MSIP a una aplicación específica de posicionamiento o transporte.

Apéndice A

Linealización en forma exacta del MSIP

Partiendo del modelo del MSIP en el marco de referencia dq representado en su forma no lineal afín como sigue

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ \omega \\ \theta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_s}{L_s}i_d + n_p\omega i_q \\ -\frac{R_s}{L_s}i_q - n_p\omega i_d - \frac{K_m}{L_s}\omega \\ \frac{3K_m}{2J}i_q - \frac{1}{J}\tau_L \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_s} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_d + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_s} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_q \quad (\text{A.1})$$

y seleccionando como salidas a $h_1(x) = x_1 = i_d$, $h_2(x) = x_2 = \theta_m$, se puede comenzar con el proceso de linealización en forma exacta. Debido a que el término $\frac{1}{J}\tau_L$ corresponde a una perturbación exógena, para el desarrollo de la linealización exacta del modelo no se considera.

De acuerdo con la definición 3, se calcula primero

$$\begin{aligned} L_{g_1}L_f^0 h_1(x) &= \frac{\partial h_1(x)}{\partial x} g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/L_s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1/L_s \\ &= \beta_1(x) \neq 0 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$L_{g_2}L_f^0 h_1(x) = \frac{\partial h_1(x)}{\partial x} g_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/L_s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{A.3})$$

debido a que la primera derivada de Lie a lo largo de g_1 es diferente de cero, se tiene

que el primer grado relativo $r_1 = 1$. Siguiendo con el proceso se tiene

$$\begin{aligned} L_{g_1}L_f^0h_2(x) &= L_{g_1}h_2(x) = \frac{\partial h_2(x)}{\partial x}g_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/L_s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$L_{g_2}L_f^0h_1(x) = \frac{\partial h_1(x)}{\partial x}g_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/L_s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$L_{g_1}L_fh_2(x) = \frac{\partial L_fh_2(x)}{\partial x}g_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/L_s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$L_{g_2}L_fh_2(x) = \frac{\partial L_fh_2(x)}{\partial x}g_2(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/L_s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$L_{g_1}L_f^2h_2(x) = \frac{\partial L_f^2h_2(x)}{\partial x}g_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3K_m}{2J} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/L_s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} L_{g_2}L_f^2h_2(x) &= \frac{\partial L_f^2h_2(x)}{\partial x}g_2(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3K_m}{2J} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/L_s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3K_m}{2JL_s} \\ &= \beta_2(x) \neq 0 \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

la salida h_2 se ha derivado 3 veces y se ha obtenido que $L_{g_2}L_f^2h_2(x) \neq 0$, por esta razon tenemos que el grado relativo $r_2 = 3$. De esta manera, el grado relativo total $r = r_1 + r_2 = 4$ es igual al grado del sistema, por lo tanto el sistema es de grado completo y se puede representar en su forma linealizada en forma exacta.

Así el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= L_fh_1(x) + L_{g_1}L_f^0h_1(x)u_d + L_{g_2}L_f^0h_1(x)u_q \\ \dot{x}_2 &= L_fh_2(x) + L_{g_1}L_f^0h_2(x)u_d + L_{g_2}L_f^0h_2(x)u_q \\ \dot{x}_3 &= L_f^2h_2(x) + L_{g_1}L_fh_2(x)u_d + L_{g_2}L_fh_2(x)u_q \\ \dot{x}_4 &= L_f^3h_2(x) + L_{g_1}L_f^2h_2(x)u_d + L_{g_2}L_f^2h_2(x)u_q \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

puede escribirse como

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= L_f h_1(x) + L_{g_1} L_f^0 h_1(x) u_d \\
\dot{x}_2 &= L_f h_2(x) \\
\dot{x}_3 &= L_f^2 h_2(x) \\
\dot{x}_4 &= L_f^3 h_2(x) + L_{g_2} L_f^2 h_2(x) u_q
\end{aligned} \tag{A.11}$$

donde

$$\begin{aligned}
L_f^1 h_1(x) &= \frac{\partial h_1(x)}{\partial x} f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{R_s}{L_s} i_d + n_p \omega i_q \\ -\frac{R_s}{L_s} i_q - n_p \omega i_d - \frac{K_m}{L_s} \omega \\ \frac{3K_m}{2J} i_q \\ \omega \end{pmatrix} \\
&= -\frac{R_s}{L_s} i_d + n_p \omega i_q = \alpha_1(x)
\end{aligned} \tag{A.12}$$

$$\begin{aligned}
L_f h_2(x) &= \frac{\partial h_2(x)}{\partial x} f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{R_s}{L_s} i_d + n_p \omega i_q \\ -\frac{R_s}{L_s} i_q - n_p \omega i_d - \frac{K_m}{L_s} \omega \\ \frac{3K_m}{2J} i_q \\ \omega \end{pmatrix} \\
&= \omega = \dot{x}_2
\end{aligned} \tag{A.13}$$

$$\begin{aligned}
L_f^2 h_2(x) &= \frac{\partial L_f h_2(x)}{\partial x} f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{R_s}{L_s} i_d + n_p \omega i_q \\ -\frac{R_s}{L_s} i_q - n_p \omega i_d - \frac{K_m}{L_s} \omega \\ \frac{3K_m}{2J} i_q \\ \omega \end{pmatrix} \\
&= \frac{3K_m}{2J} i_q = x_4
\end{aligned} \tag{A.14}$$

$$\begin{aligned}
L_f^3 h_2(x) &= \frac{\partial L_f^2 h_2(x)}{\partial x} f(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3K_m}{2J} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{R_s}{L_s} i_d + n_p \omega i_q \\ -\frac{R_s}{L_s} i_q - n_p \omega i_d - \frac{K_m}{L_s} \omega \\ \frac{3K_m}{2J} i_q \\ \omega \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{3K_m}{2J} \right) \left(-\frac{R_s}{L_s} i_q - n_p \omega i_d - \frac{K_m}{L_s} \omega \right) = \alpha_2(x)
\end{aligned} \tag{A.15}$$

obteniendo el modelo del sistema (A.1) en su forma linealizada en forma exacta de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \alpha_1(x) + \beta_1(x) u_d = -\frac{R_s}{L_s} i_d + n_p \omega i_q + \frac{1}{L_s} u_d \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
\dot{x}_3 &= x_4 \\
\dot{x}_4 &= \alpha_2(x) + \beta_2(x) u_q = \left(\frac{3K_m}{2J} \right) \left(-\frac{R_s}{L_s} i_q - n_p \omega i_d - \frac{K_m}{L_s} \omega \right) + \frac{3K_m}{2J L_s} u_q
\end{aligned} \tag{A.16}$$

Apéndice B

Publicación realizada

1. Linares-Flores J., García-Rodríguez C., Ramírez-Cárdenas O.D., Escobar-Noriega C. y Contreras-Ordaz M.A., “Control Robusto de Seguimiento Suave de Posición Angular del Motor Síncrono de Imanes Permanentes”, Congreso Latinoamericano de Control Automático, Agosto, 2014.
2. Linares-Flores J., García-Rodríguez C., Sira-Ramírez H., Ramírez-Cárdenas O.D., “Robust Backstepping Tracking Controller for Low Speed PMSM positioning System: Design, Analysis, and Implementation”, 2015 IEEE International Conference on Industrial Technology de la IEEE Industrial Electronics Society, Diciembre, 2014.

Control Robusto de Seguimiento Suave de Posición Angular del Motor Síncrono de Imanes Permanentes

Linares-Flores Jesús * García-Rodríguez Carlos *
Ramírez-Cárdenas Oscar D. ** Escobar-Noriega Carlos **
Contreras-Ordaz Marco Antonio *

* *Instituto de Electrónica y Mecatrónica, Universidad Tecnológica de la
Mixteca, Oaxaca, México (e-mails: jlinares@mixteco.com.mx,
sofosmaster@mixteco.com.mx, marco.contreras@mixteco.utm.mx).*

** *División de Estudios de Postgrado, Universidad Tecnológica de la
Mixteca, Oaxaca, México (e-mails: oscar6ri@hotmail.com,
cen_root2623@hotmail.com)*

Resumen: Este artículo trata sobre el diseño y simulación de un controlador robusto de seguimiento suave de la posición angular de un motor síncrono de imanes permanentes (MSIP). Se propone un controlador Backstepping a partir de una linealización entrada-salida del sistema descrita en un marco de referencia $d-q$. A fin de minimizar los efectos del par de carga sobre la tarea de posicionamiento, se diseña un observador de orden reducido que ayuda al controlador a compensar esta perturbación. Para demostrar la estabilidad en lazo cerrado de esta propuesta se recurre al criterio de estabilidad de entrada al estado. Co-simulaciones Matlab/Simulink-Psim evidencian la efectividad del algoritmo de control propuesto.

Keywords: Motor Síncrono de Imanes Permanentes, Observador de Par de Orden Reducido, Control Backstepping, Estabilidad de Entrada al Estado.

1. INTRODUCCIÓN

Un motor síncrono de imanes permanentes (MSIP) tiene excelentes características físicas, tales como su estructura simple, su alta densidad de potencia y eficiencia, así como su bajo nivel de ruido y su casi nulo mantenimiento (ver Pillay and Krishnan [1985]). Dadas estas ventajas los MSIP han extendido su aplicación en máquinas y herramientas de control numérico, robots, aviación, etcétera. Métodos de control lineal tal como el esquema de control proporcional integral (PI) son ampliamente usados en motores de este tipo debido a su fácil implementación. Sin embargo, como el MSIP es un sistema no lineal con disturbios endógenos y exógenos no medibles (ver Kim and Youn [2002]), no es fácil obtener un excelente desempeño en el rango de operación completo cuando se utilizan métodos de control lineal (ver Grčar et al. [1996] y Wang et al. [2001]). Con los métodos de control no lineal se busca proporcionar una solución más natural a los problemas que presentan los MSIP como sistemas sustancialmente perturbados. El rápido desarrollo de la tecnología de los microprocesadores, especialmente de los procesadores digitales de señal (DSP) y de la electrónica de potencia ha permitido actualmente probar técnicas de control más sofisticadas sobre el MSIP, tales como el control adaptable (ver Li and Liu [2009]), el control robusto (ver Senjyu et al. [2010]), controladores por modos deslizantes (ver Wai [2001]), el control por linealización entrada-salida (ver Delaleau and Stanković [2004] y Grčar et al. [1996]), el control adaptable backstepping (ver Rahman et al. [2003]) y algunos otros esquemas como el

control mediante rechazo activo de perturbaciones (ver Li et al. [2014] y Sira-Ramírez et al. [2014]), etcétera. Dado que en aplicaciones industriales reales el MSIP se encuentra expuesto a pares de perturbación diversos (fuerzas de fricción, dinámica no modelada o cambios de carga, ver Li et al. [2014]), en este trabajo se propone un controlador de seguimiento suave de posición angular basado en la técnica de control *Backstepping* y un observador de orden reducido del par de perturbación. La adición del par estimado a la señal de control mejora el desempeño y exactitud del sistema en lazo cerrado.

Este artículo está organizado de la siguiente manera: en la sección 2 se presenta el modelo dinámico del motor síncrono de imanes permanentes que es considerado para el análisis y la formulación del problema. En la sección 3 es desarrollado el procedimiento de diseño del observador del parámetro de par de carga. Posteriormente, en la sección 4 se diseña el controlador de seguimiento backstepping y se muestra el análisis de estabilidad entrada al estado de la dinámica del error. Los resultados en simulación del desempeño del sistema en lazo cerrado son presentados en la sección 5. Finalmente, en la sección 6 se dan las conclusiones y trabajos futuros a desarrollar.

2. MODELO DINÁMICO DEL MSIP Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

El modelo dinámico del MSIP en el marco de referencia rotatorio $d-q$, cuando la inductancia correspondientes del eje d y del eje q se consideran iguales ($L_d = L_q = L_s$),

está dado por las siguientes ecuaciones diferenciales (ver Chiasson [2005]):

$$L_s \frac{di_d}{dt} = -R_s i_d + n_p \omega L_s i_q + u_d \quad (1)$$

$$L_s \frac{di_q}{dt} = -R_s i_q - n_p \omega L_s i_d - K_m \omega + u_q \quad (2)$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{2} K_m i_q - \tau_L \quad (3)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \quad (4)$$

donde u_d es el voltaje directo, u_q es el voltaje de cuadratura, i_d es la corriente directa, i_q es la corriente de cuadratura, θ y ω corresponden a las variables mecánicas de posición y velocidad angular del rotor. La resistencia y la inductancia de estator son denotadas por R_s y L_s respectivamente, n_p es el número de pares de polos y J es el momento de inercia del motor. El término K_m es una constante de fuerza electromotriz inducida, donde $K_m = n_p \lambda_m$, siendo λ_m el flujo mutuo o ligado pico debido al imán permanente. El par de carga desconocido es denotado por τ_L . Este artículo plantea los siguientes problemas a resolver.

Problema 1: Observador del parámetro de par de carga. Solamente la ecuación mecánica del sistema será empleada para el diseño de este observador. Las trayectorias a seguir serán a velocidades bajas por lo que el par de carga se considera desconocido, acotado y de naturaleza constante.

Problema 2: Diseñar una ley control backstepping para el seguimiento de posición angular del motor. Para simplificar el diseño de este controlador puede linealizarse el sistema (1)-(4) en forma exacta, considerando el par de carga como una entrada de perturbación externa. Esta ley de control debe adaptar el par de carga estimado para lograr un seguimiento casi perfecto de la posición angular.

3. OBSERVADOR DEL PARÁMETRO DE PAR DE CARGA

En este apartado se diseña un observador de orden reducido para estimar el parámetro de par de carga. Esta perturbación se considera desconocida pero acotada. Partiendo de la ecuación mecánica del modelo, (3), se define a la corriente de cuadratura, i_q , como una entrada de control, $u_0 = i_q$, y a la velocidad angular, como una salida, $y_0 = \omega$, para este subsistema dinámico. Los valores nominales de los parámetros, J y K_m se consideran conocidos. A partir de (3) se puede definir como una medida indirecta del par de carga τ_L , a

$$\tau_L = \frac{3}{2} K_m u_0 - J \frac{dy_0}{dt}$$

Se propone entonces el siguiente observador adaptable para τ_L ,

$$\frac{d\hat{\tau}_L}{dt} = \lambda(\tau_L - \hat{\tau}_L)$$

La dinámica del error de estimación está dada por:

$$\frac{de_{\tau_L}}{dt} = -\lambda e_{\tau_L}$$

donde $e_{\tau_L} = \tau_L - \hat{\tau}_L$. Escogiendo $\lambda \gg 0$, el error de estimación e_{τ_L} , converge a cero exponencialmente conforme

$t \mapsto \infty$. Puesto de otra manera, la norma del error de estimación $\|\tau_L - \hat{\tau}_L\|$ satisface la desigualdad

$$|e_{\tau_L}(t)| = |\tau_L - \hat{\tau}_L| \leq e_{\tau_L}(0) e^{-\lambda t} \quad \forall t \geq 0$$

donde el valor constante de λ es la razón de convergencia exponencial a cero del error de estimación, cuando $t \mapsto \infty$. Usando la expresión para τ_L , el observador puede ser reescrito como

$$\frac{d\hat{\tau}_L}{dt} + \lambda J \frac{dy_0}{dt} = \frac{3}{2} \lambda K_m u_0 - \lambda \hat{\tau}_L$$

definiendo a la variable $\eta = \hat{\tau}_L + \lambda J y_0$, se tiene el observador de orden reducido siguiente,

$$\hat{\tau}_L = \eta - \lambda J y_0 \quad (5)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = -\lambda \eta + \lambda^2 J y_0 + \frac{3}{2} \lambda K_m u_0 \quad (6)$$

El valor estimado del parámetro de par de carga, $\hat{\tau}_L$, se adapta en línea a la ley de control de seguimiento suave de posición angular, tratada en detalle en la siguiente sección.

4. CONTROLADOR SUAVE DE POSICIÓN ANGULAR Y RESULTADO PRINCIPAL

Como respuesta al segundo problema planteado en la sección 2 de este artículo, se procederá a diseñar el controlador suave de posición angular basado en la técnica Backstepping, a partir del modelo linealizado en forma exacta, escogiendo como salidas planas a la corriente directa, i_d , y a la posición angular, θ . Por otra parte, el valor estimado del par de carga se adapta a la ley de control de seguimiento suave de posición angular, para posteriormente probar la estabilidad del sistema en lazo cerrado mediante el enfoque de estabilidad entrada al estado.

4.1 Linealización entrada-salida del MSIP

Escogiendo como salidas del sistema (1)-(4) a $y_1(x) = h_1(x) = i_d(t)$, y a $y_2 = h_2(x) = \theta(t)$, el sistema puede ser linealizado de forma exacta, por lo que y_1 y y_2 son las salidas planas del sistema (ver Grčar et al. [1996] y Delaleau and Stanković [2004]). Por lo que el modelo no lineal puede ser reescrito en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x &= f(x) + \sum_{i=1}^2 g_i(x) u_i + \mathbf{d} \\ x &\in X \subset \mathbf{R}^4, u \in \mathbf{R}^2, f(0) = 0, \\ y_i &= h_i(x); i = 1, 2; h_i(0) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

donde $f(\cdot)$, $g_1(\cdot)$ y $g_2(\cdot)$ son campos de vectores suaves en un conjunto abierto U en \mathbf{R}^4 , $h_i(\cdot)$ es una función suave mapeada en X dentro de \mathbf{R} , y \mathbf{d} es el vector de entrada de perturbación o par de carga. Las entradas de control, $u_1 = u_d$ y $u_2 = u_q$, son los voltajes directo y de cuadratura en el eje coordenado $d-q$ del MSIP. El método de linealización entrada-salida comienza a partir de omitir el vector de entrada de perturbación, \mathbf{d} . Por tanto, la relación entrada-salida (7) se deduce a través de las derivadas sucesivas de las dos salidas planas $y_i = h_i(x)$, tal que al menos una entrada u_i aparezca en la expresión para la derivada de orden superior $y_i^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots$). Simultáneamente la notación $L_f h_i = \nabla h_i f$; $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ se adopta para la derivada de Lie direccional de h a lo largo del campo vectorial f . De ahí, se obtiene el sistema linealizado para la primer salida plana y_1 :

$$\begin{aligned}
 y_1(t) &= i_d \\
 y_1^{(1)}(t) &= L_f h_1 + \sum_{i=1}^2 L_{g_i} L_f^0 h_1 u_i \\
 &= \alpha_1(x) + \beta_1 u_d = -\frac{R_s}{L_s} i_d + n_p i_q \omega + \frac{u_d}{L_s} \quad (8)
 \end{aligned}$$

Por otro lado, se obtiene el resto del sistema linealizado a través de las derivadas sucesivas de la segunda salida plana y_2 , la cual se refiere a la posición angular del MSIP:

$$\begin{aligned}
 y_2(t) &= \theta \\
 y_2^{(1)}(t) &= L_f h_2 + \sum_{i=1}^2 L_{g_i} L_f^0 h_2 u_i \\
 &= \omega \\
 y_2^{(2)}(t) &= L_f^2 h_2 + \sum_{i=1}^2 L_{g_i} L_f^1 h_2 u_i \\
 &= \frac{3 K_m}{2 J} i_q \\
 y_2^{(3)}(t) &= L_f^3 h_2 + \sum_{i=1}^2 L_{g_i} L_f^2 h_2 u_i \\
 &= \alpha_2(x) + \beta_2 u_q \\
 &= -\frac{3(K_m R_s i_q + n_p L_s K_m \omega i_d + K_m^2 \omega)}{2 L_s} + \frac{3 K_m u_q}{2 J L_s} \quad (9)
 \end{aligned}$$

Por tanto, el nuevo vector de estado se define como: $x = (i_d, \theta, \omega, \frac{3K_m}{2J} i_q)^T = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in X \subset \mathbf{R}^4$, $u \in \mathbf{R}^2$, así la forma normal de *Brunovsky* desacoplada del sistema multivariable del MSIP que incluye el vector de entrada de perturbación desconocida, pero acotada, es dada por:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1(x) \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_2(x) \end{pmatrix} \\
 &+ \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_d \\ u_q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\tau_L}{J} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10)
 \end{aligned}$$

4.2 Controlador Backstepping de seguimiento suave de posición angular

Partiendo de la forma normal de *Brunovsky* del MSIP, se diseñará la ley de control de seguimiento suave de posición angular, la cual adapta el valor estimado del parámetro de par de carga. Antes de desarrollar el diseño del controlador se hacen las siguientes suposiciones:

- ▶ Las corrientes de fase i_a e i_b son medidas y transformadas al eje coordenado d-q mediante el conocimiento de la variable de posición θ .
- ▶ Las variables de posición y velocidad angular están disponibles por medición a través de los respectivos sensores.
- ▶ El valor del parámetro de par de carga, se estima mediante un observador de orden reducido, considerando a este término como constante y acotado. Este valor

se adapta a la ley de control de seguimiento suave de posición angular.

- ▶ El siguiente conjunto de valores nominales de parámetros del motor se consideran conocidos: $\{K_m, L_s, n_p, R_s, J\}$.
- ▶ Solamente se calcula la trayectoria de referencia de posición angular junto con sus derivadas temporales mediante un polinomio Bézier, y se denotan como: $x_2^*(t) = \theta^*(t)$, $\dot{x}_2^*(t) = \dot{\theta}^*(t)$, $\ddot{x}_2^*(t) = \ddot{\theta}^*(t)$ y $\dddot{x}_2^*(t) = \dddot{\theta}^*(t)$. Mientras que la trayectoria de referencia de la corriente directa junto con sus derivadas se planean con un valor nominal igual a cero, y se denotan como: $x_1^*(t) = i_d^*(t) = 0$, $\dot{x}_1^*(t) = \frac{di_d^*(t)}{dt} = 0$. Esto debido a que en una tarea de control de posición, las velocidades que se desarrollan son bajas, sin embargo, el par generado aplicado por el motor debe maximizarse, lo que lleva a restringir el valor nominal de la corriente directa i_d a cero.

Paso 1. Cálculo del controlador de seguimiento de la parte eléctrica u_d .

Como primer paso para el diseño del controlador de posición basado en Backstepping, se propone la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V_1(z_1) = \frac{1}{2} z_1^2 \quad (11)$$

donde, la variable z_1 denota el error de seguimiento de la primer salida plana

$$z_1 = x_1(t) - x_1^*(t) \quad (12)$$

La función candidata de Lyapunov cumple con ser definida positiva, escalar diferenciable no acotada, donde su derivada temporal es,

$$\dot{V}_1(z_1) = z_1 \dot{z}_1 \quad (13)$$

donde la rapidez del error de seguimiento de z_1 , es dado por:

$$\dot{z}_1(t) = \dot{x}_1(t) - \dot{x}_1^*(t) = \alpha_1(x) + \beta_1 u_d \quad (14)$$

Se sustituye (14) dentro de (13), y se tiene lo siguiente

$$\dot{V}_1(z_1) = z_1 [\alpha_1(x) + \beta_1 u_d] \quad (15)$$

Por tanto, para probar que esta última ecuación, sea definida negativa se propone que la primera entrada u_d sea:

$$u_d = -\frac{1}{\beta_1} [\alpha_1(x) + c_1 z_1] \quad (16)$$

donde c_1 es un valor constante mayor a cero, que define la sensibilidad proporcional del controlador de seguimiento de la corriente directa del MSIP. Sustituyendo (16) en (15), resulta

$$\dot{V}_1(z_1) = -c_1 z_1^2 \quad (17)$$

Paso 2. Cálculo del controlador de seguimiento de la parte mecánica u_q .

Siguiendo con la metodología, se propone una segunda función candidata de Lyapunov como sigue:

$$V_2(z_1, z_2) = \frac{1}{2} z_2^2 + V_1(z_1) \quad (18)$$

donde se define el error de seguimiento para la segunda salida plana como:

$$z_2(t) = x_2(t) - x_2^*(t) \quad (19)$$

La derivada temporal (18) es dada como:

$$\dot{V}_2(z_1, z_2) = z_2 \dot{z}_2 - c_1 z_1^2 \quad (20)$$

donde la derivada del error de seguimiento de z_2 es,

$$\dot{z}_2 = \dot{x}_2(t) - \dot{x}_2^*(t) = x_3(t) - \dot{x}_2^*(t) \quad (21)$$

Sustituyendo (21) en (20) se tiene lo siguiente

$$\dot{V}_2(z_1, z_2) = z_2 [x_3(t) - \dot{x}_2^*(t)] - c_1 z_1^2 \quad (22)$$

Como paso intermedio se propone un error de seguimiento z_3 , el cual involucra a la primer variable de estabilización $\gamma_1(x)$ que consigue que la derivada temporal de $V_2(z_1, z_2)$ sea definida negativa,

$$z_3(t) = x_3(t) - \gamma_1(x) \iff x_3(t) = z_3(t) + \gamma_1(x) \quad (23)$$

La variable $x_3(t)$ de (23) se sustituye en la derivada temporal de $V_2(z_1, z_2)$ y queda como:

$$\dot{V}_2(z_1, z_2) = z_2 [z_3(t) + \gamma_1(x) - \dot{x}_2^*(t)] - c_1 z_1^2 \quad (24)$$

A través de proponer a la primer variable de estabilización $\gamma_1(x)$ como:

$$\gamma_1(x) = \dot{x}_2^*(t) - c_2 z_2 \quad (25)$$

Por tanto la derivada temporal de $V_2(z_1, z_2)$ es

$$\dot{V}_2(z_1, z_2) = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 + z_2 z_3 \quad (26)$$

donde $c_2 > 0$ se define como la sensibilidad proporcional del error de seguimiento de la variable z_2 . Para conseguir que la derivada temporal de $V_2(z_1, z_2)$ sea definida negativa, basta con elegir a $z_3(t) = 0$, para que los errores de seguimiento z_1 y z_2 convergan a cero exponencialmente.

$$\dot{V}_2(z_1, z_2) = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 \quad (27)$$

Se sigue el método proponiendo la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V_3(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{2} z_3^2 + V_2(z_1, z_2) \quad (28)$$

de ahí, la derivada temporal de la función $V_3(z_1, z_2, z_3)$ es dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(z_1, z_2, z_3) &= z_3 \dot{z}_3 + \dot{V}_2(z_1, z_2) \\ &= z_3 \dot{z}_3 + z_2 z_3 - c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 \\ &= z_3 (\dot{z}_3 + z_2) - c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 \end{aligned} \quad (29)$$

de (23) se calcula la derivada temporal de z_3

$$\dot{z}_3(t) = \dot{x}_3(t) - \dot{\gamma}_1(x) = x_4(t) - \frac{\tau_L}{J} + c_2 \dot{z}_2 - \ddot{x}_2^*(t) \quad (30)$$

Sustituyendo (30) en (29), la derivada temporal de $V_3(z_1, z_2, z_3)$ queda de la siguiente forma

$$\dot{V}_3(z_1, z_2, z_3) = z_3 \left(x_4 - \frac{\tau_L}{J} + c_2 \dot{z}_2 - \ddot{x}_2^* + z_2 \right) - c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 \quad (31)$$

Se propone el error de seguimiento z_4 , el cual involucra un segunda variable de estabilización $\gamma_2(x)$ que consigue que la derivada temporal de $V_3(z_1, z_2, z_3)$ sea definida negativa, por tanto

$$z_4(t) = x_4(t) - \gamma_2(x) \iff x_4(t) = z_4(t) + \gamma_2(x) \quad (32)$$

Sustituyendo (32) en (31) se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(z_1, z_2, z_3) &= z_3 \left(z_4 + \gamma_2(x) - \frac{\tau_L}{J} + c_2 \dot{z}_2 - \ddot{x}_2^* + z_2 \right) \\ &\quad - c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 \end{aligned} \quad (33)$$

A partir de (33) se propone el segundo controlador virtual $\gamma_2(x)$ como:

$$\gamma_2(x) = \ddot{x}_2^* - c_2 \dot{z}_2 - c_3 z_3 + \frac{\hat{\tau}_L}{J} \quad (34)$$

En este paso se adapta el parámetro del par de carga $\hat{\tau}_L$ a la segunda variable de estabilización, y la ganancia $c_3 > 0$,

se define como la sensibilidad proporcional del error de seguimiento de la variable z_3 . De ahí, se sustituye (34) en (33) y resulta que

$$\dot{V}_3(z_1, z_2, z_3) = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - c_3 z_3^2 - \underbrace{\frac{1}{J} (\tau_L - \hat{\tau}_L)}_{:=e_\tau} z_3 + z_3 z_4 \quad (35)$$

Para que la derivada temporal de $V_3(z_1, z_2, z_3)$ sea definida negativa se escoge a $z_4 = 0$, de ahí que los errores de seguimiento convergen a cero asintóticamente, mientras el error de estimación este acotado.

$$\dot{V}_3(z_1, z_2, z_3) = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - c_3 z_3^2 - z_3 e_\tau \quad (36)$$

Siguiendo con la metodología de la técnica *Backstepping* se propone la última función candidata de Lyapunov como sigue:

$$V_4(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{1}{2} z_4^2 + V_3(z_1, z_2, z_3) \quad (37)$$

donde su derivada temporal de (37) es,

$$\begin{aligned} \dot{V}_4(z_1, z_2, z_3, z_4) &= -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - c_3 z_3^2 + z_4 [\dot{z}_4 + z_3] \\ &\quad - z_3 e_\tau \end{aligned} \quad (38)$$

donde la derivada temporal de z_4 está dada por

$$\begin{aligned} \dot{z}_4(t) &= \dot{x}_4(t) - \dot{\gamma}_2(x) \\ &= \alpha_2(x) + \beta_2 u_q - \ddot{x}_2^* + c_2 (x_4 - \frac{1}{J} \tau_L - \ddot{x}_2^*) \\ &\quad + c_3 (x_4 - \frac{1}{J} \tau_L + c_2 \dot{z}_2 - \ddot{x}_2^*) \end{aligned} \quad (39)$$

Sustituyendo (39) en (38) se tiene que:

$$\begin{aligned} \dot{V}_4(z_1, z_2, z_3, z_4) &= -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - c_3 z_3^2 - e_\tau z_3 \\ &\quad + z_4 [\alpha_2(x) + \beta_2 u_q - \ddot{x}_2^* \\ &\quad + c_2 (x_4 - \frac{1}{J} \tau_L - \ddot{x}_2^*) + z_3 \\ &\quad + c_3 (x_4 - \frac{1}{J} \tau_L + c_2 \dot{z}_2 - \ddot{x}_2^*)] \end{aligned} \quad (40)$$

La ley de control de seguimiento suave de la posición angular del MSIP está dada por:

$$\begin{aligned} u_q &= -\frac{1}{\beta_2} [\alpha_2(x) - \ddot{x}_2^* + c_2 (x_4 - \frac{1}{J} \hat{\tau}_L - \ddot{x}_2^*) \\ &\quad + c_3 (x_4 - \frac{1}{J} \hat{\tau}_L + c_2 \dot{z}_2 - \ddot{x}_2^*) - z_3 - c_4 z_4] \end{aligned} \quad (41)$$

Sustituyendo la ley de control (41) en (40) se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \dot{V}_4(z_1, z_2, z_3, z_4) &= -\sum_{i=1}^4 c_i z_i^2 - z_3 e_\tau - [c_2 + c_3] z_4 e_\tau \\ &= -\mathbf{z}^T \mathbf{C} \mathbf{z} - \mathbf{z}^T \mathbf{M} e_\tau \end{aligned} \quad (42)$$

donde,

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ c_2 + c_3 \end{pmatrix}; \quad (43)$$

Las expresiones (42) y (43) se utilizarán en el siguiente análisis de estabilidad en lazo cerrado del sistema MSIP perturbado.

Paso 3. Análisis de estabilidad en lazo cerrado.

Proposición 1: Se considera el sistema MSIP perturbado (10) con el controlador de seguimiento por retroalimentación backstepping (16) y (41) entonces, la dinámica del error de seguimiento (42) define una estabilidad de entrada al estado mapeada, considerando e_τ como una entrada y \mathbf{z} como un estado.

Prueba: Considérese la siguiente función definida positiva candidata de *Lyapunov*,

$$V(\mathbf{z}) = V_4(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2) > 0 - \{0\}$$

cuya derivada a lo largo de las trayectorias (14), (21), (30) y (39), está dada por

$$\dot{V}(\mathbf{z}) = -\mathbf{z}^T \mathbf{C} \mathbf{z} - \mathbf{z}^T \mathbf{M} e_\tau \quad (44)$$

donde \mathbf{C} y \mathbf{M} están definidas en (43). Note que la matriz diagonal constante es definida positiva, es decir $\mathbf{C} > \mathbf{0}$, entonces en el caso de que $e_\tau = 0$ implica que $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ es un punto de equilibrio globalmente exponencialmente estable, ya que

$$\dot{V}(\mathbf{z}) = -\mathbf{z}^T \mathbf{C} \mathbf{z} < \mathbf{0} \quad (45)$$

Por otro lado, si el error de estimación del parámetro de par de carga $e_\tau \neq 0$, de ahí el término $\mathbf{z}^T \mathbf{M} e_\tau$, se escribe por desigualdad de Young, como

$$\mathbf{z}^T \mathbf{M} e_\tau \leq \lambda (\mathbf{z}^T)^2 + \frac{\sqrt{c_2^2 + c_3^2 + 2c_2c_3 + 1}}{4\lambda} e_\tau^2$$

seleccionando a $p = q = 2$ y $\varepsilon^2 = 2\lambda$, en consecuencia (44), queda de la siguiente manera

$$\dot{V}(\mathbf{z}) = -\mathbf{z}^T \mathbf{C} \mathbf{z} - \mathbf{z}^T \mathbf{M} e_\tau \leq -\mathbf{z}^T \mathbf{C} \mathbf{z} + \frac{\gamma(c_2, c_3)}{4\lambda} e_\tau^2 \quad (46)$$

donde, la norma de la matriz $|M| = \gamma(c_2, c_3) = \sqrt{c_2^2 + c_3^2 + 2c_2c_3 + 1} > 0$, y λ corresponde al valor de la ganancia del estimador de par $c_2, c_3 > \lambda > 0$. Mediante el enfoque de estabilidad de entrada al estado (ISS) la ecuación (46) se escribe como sigue

$$\dot{V}(\mathbf{z}) = -(1 - \phi) \mathbf{z}^T \mathbf{C} \mathbf{z} - \phi \mathbf{z}^T \mathbf{C} \mathbf{z} + \frac{\gamma(c_2, c_3)}{4\lambda} e_\tau^2$$

con $\phi > 0$ es una constante positiva la cual pertenece al conjunto abierto $(0, 1)$.

Por lo tanto,

$$\dot{V}(\mathbf{z}) \leq -(1 - \phi) \mathbf{z}^T \mathbf{C} \mathbf{z}$$

para todo

$$|\mathbf{z}| \geq \frac{\sqrt{\gamma(c_2, c_3)}}{2\sqrt{\lambda\phi[\lambda_{\min}(\mathbf{C})]}} |e_\tau|$$

Entonces aplicando el *Teorema 5.2* de Khalil [1996] se demuestra que el mapeo

$$e_\tau \rightarrow \mathbf{z}$$

es estable de entrada al estado (ISS).

Para obtener explícitamente la cota del vector de estado $\mathbf{z}(t)$, se considera la función $\mathbf{z}(t) e^{kt}$. Usando (46), se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (V(\mathbf{z}) e^t) &= \frac{d}{dt} (V(\mathbf{z})) e^t + V(\mathbf{z}) e^t \\ &\leq -(\mathbf{z}^T \mathbf{C} \mathbf{z}) e^t + \frac{\gamma(c_2, c_3)}{4\lambda} e_\tau^2 e^t + (\mathbf{z}^T \mathbf{C} \mathbf{z}) e^t \\ &= \frac{\gamma(c_2, c_3)}{4\lambda} e_\tau^2 e^t \end{aligned} \quad (47)$$

Integrando ambos lados a (47) en el intervalo cerrado $[0, t]$, se produce

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^2 e^t &\leq \mathbf{z}^2(0) + \frac{\gamma(c_2, c_3)}{4\lambda} e_\tau^2 e^t \\ &\leq \mathbf{z}^2(0) + \frac{1}{4\lambda} \underbrace{\gamma(c_2, c_3)}_{:= \sup_{0 \leq \tau \leq t} \Delta^2(\tau)} e_\tau^2 \int_0^t e^\tau d\tau \\ &= \mathbf{z}^2(0) + \frac{1}{4\lambda} \left[\sup_{0 \leq \tau \leq t} \Delta^2(\tau) \right] (e^t - 1) \end{aligned} \quad (48)$$

Multiplicando a (48) en ambos lados por el término e^{-t} , y utilizando el hecho de que $\sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b|$, se obtiene la cota del vector $\mathbf{z}(t)$:

$$\begin{aligned} |\mathbf{z}(t)| &\leq |\mathbf{z}(0)| e^{-t} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \left[\sup_{0 \leq \tau \leq t} |\Delta(\tau)| \right] (1 - e^{-t})^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |\mathbf{z}(0)| e^{-t} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \left[\sup_{0 \leq \tau \leq t} |\Delta(\tau)| \right] \end{aligned} \quad (49)$$

Desde que $\sup_{0 \leq \tau \leq t} |\Delta(\tau)| \leq \sup_{0 \leq \tau \leq \infty} |\Delta(\tau)| \triangleq |\Delta|_\infty$, (49) conduce a

$$|\mathbf{z}(t)| \leq \mathbf{z}(0) e^{-t} + \frac{|\Delta|_\infty}{2\sqrt{\lambda}}$$

lo cual muestra que el vector de seguimiento $\mathbf{z}(t)$ converge a un conjunto compacto \mathcal{R} definido como:

$$\mathcal{R} = \{z(t) : |z(t)| \leq \frac{|\Delta|_\infty}{2\sqrt{\lambda}}\}$$

y por lo tanto

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}\{z(t), \mathcal{R}\} = 0 \quad (50)$$

5. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

Los parámetros del motor utilizados para simulación son: $n_p = 2$, $R_s = 1.6 \Omega$, $L_d = L_q = 6.365 \text{ mH}$. La constante de fuerza contra electromotriz de línea a línea del motor es $V_{pk}/krpm = 77.3$, $J = 0.182 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$, y su constante mecánica es $\tau_{mech} = 2.09195 \text{ s}$. Se considera que el motor posee un arreglo convertidor resolutor a digital (RTDC) basado en PLL que proporciona la posición absoluta del rotor en el intervalo de 0 a 360 grados, la velocidad es medida a través de un tacómetro. Se modela también un inversor fuente de voltaje trifásico de 2.4 kW. El voltaje de bus se fijó en 50 V, el periodo de muestro fue establecido en 0.1 ms, las constantes del control son fijadas en $c_i = 600$, para $i = 1, 2, 3, 4$. Para el observador de par se utilizó $\lambda = 20$. La Fig. 1 muestra la posición angular del sistema en lazo cerrado para una trayectoria de referencia deseada, basada en un polinomio Bézier de décimo orden, para el cálculo de la trayectoria de referencia deseada ver Sira-Ramírez et al. [2014]. La trayectoria a seguir comienza en $\theta_{ini}^*(1.5 \text{ s}) = 0 \text{ rad}$ y termina en $\theta_{fin}^*(4.5 \text{ s}) = 7 \text{ rad}$. En esta prueba se hace un cambio súbito de carga de cero a $\tau_L(6 \text{ s}) = 2 \text{ Nm}$. Como puede observarse se logra una buena regulación de la posición a pesar del par de carga aplicado. La Fig. 2 muestra la respuesta del sistema cuando al par anterior se le suma un par de carga que genera el acoplamiento de otro eje al eje del MSIP. Ahora el par de carga es $\tau_L(2) = J_a \frac{d\omega}{dt} + B_a \omega + \tau_L$, donde J_a y

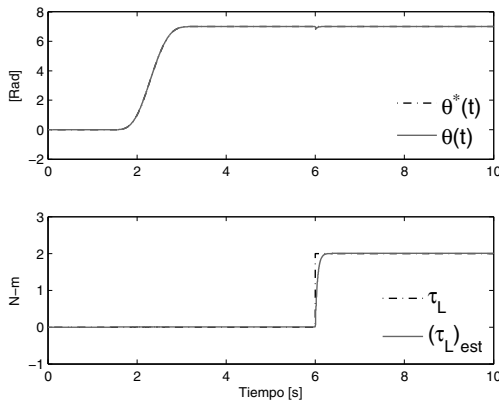


Figura 1. Seguimiento de trayectoria de la posición angular del motor en presencia de un par de carga aplicado súbitamente.

B_a son el momento de inercia y el coeficiente de fricción viscosa del segundo eje aplicado como carga. A pesar de que el observador fue diseñado para estimar pares de carga constantes, éste sin embargo estima el par de carga con el término de fricción producto del acoplamiento de ejes, el cual se traduce como una variación en los parámetros mecánicos del sistema lo que representa una perturbación claramente acotada. Es por ello que el esquema de control propuesto, proporciona una asistencia adecuada a través del observador con la finalidad de minimizar el efecto de la aplicación de par al eje con términos de fricción.

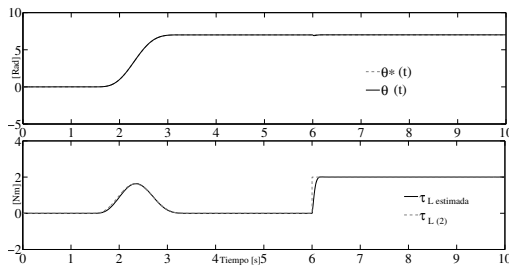


Figura 2. Respuesta del sistema a un par de carga por acoplamiento de otro eje en combinación con un aumento súbito del par a un valor constante.

6. CONCLUSIONES

Tomando como salidas a la corriente directa, i_d , y a la posición angular del rotor, θ , el modelo del MSIP puede linealizarse de forma exacta y además proponerse fácilmente una ley de control *backstepping* que logra la convergencia de los errores de seguimiento de trayectorias a cero. Esta ley de control es robusta bajo pares de carga constantes mediante un observador de orden reducido. Las simulaciones en un entorno Matlab/Simulink-PSIM han permitido incluir los efectos de carga, medición, y modelos de elementos de conmutación realísticos, permitiendo corroborar el seguimiento suave de la trayectoria de referencia de posición angular.

REFERENCIAS

- Chiasson, J. (2005). *Modeling and High-Performance Control of Electric Machines*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.
- Delaleau, E. and Stanković, A.M. (2004). Flatness-based hierarchical control of the pm synchronous motor. *Proc. American Control Conference*, 65–70.
- Grčar, B., Cafuta, P., Žnidarič, M., and Gausch, F. (1996). Nonlinear control of synchronous servo drive. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 4, 177–184.
- Khalil, H. (1996). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2nd edition.
- Kim, K.H. and Youn, M.J. (2002). A nonlinear speed control for a pm synchronous motor using a simple disturbance estimation technique. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 49, 524–535.
- Li, S., Yang, J., Chen, W., and Chen, X. (2014). *Disturbance Observer-Based Control Methods and Applications*. CRC Press.
- Li, S. and Liu, Z. (2009). Adaptive speed control for permanent magnet synchronous motor system with variations of load inertia. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 56, 3050–3059.
- Pillay, P. and Krishnan, R. (1985). Control characteristics and speed controller design of a high performance pmsm. *IEEE Industrial Applications Society Annual Meeting*, 627–633.
- Rahman, M.A., Vilathgamuwa, M., Tseng, K., and Uddin, M.N. (2003). Nonlinear control of interior permanent magnet synchronous motor. *IEEE Transactions on Industrial Applications*, 39, 408–415.
- Senjyu, T., Noguchi, Y., Urasaki, N., Howlander, A.M., Yona, A., and Sekine, H. (2010). Position sensorless control for interior permanent magnet synchronous motors using h_∞ flux observer. *IEEE XIX International Conference on Electrical Machines (ICEM)*, 1–6.
- Sira-Ramírez, H., Linares-Flores, J., García-Rodríguez, C., and Contreras-Ordaz, M.A. (2014). On the control of the permanent magnet synchronous motor: An active disturbance rejection control approach. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*.
- Wai, R.J. (2001). Total sliding-mode controller for pm synchronous servo motor drive using recurrent fuzzy neural network. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 48, 926–944.
- Wang, G., Fong, C., and Chang, K. (2001). Neural-network-based self tuning pi controller for precise motion control of pmac motors. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 48, 408–415.

Robust Backstepping Tracking Controller for Low Speed PMSM positioning System: Design, Analysis, and Implementation

J. Linares-Flores, C. García-Rodríguez, H. Sira-Ramírez, and O. D. Ramírez-Cárdenas.

Abstract—This article is concerned with the design and implementation of a robust position trajectory tracking controller for a permanent magnet synchronous motor (PMSM). The information on the angular position, provided by a classical resolver, is here complemented with an observer based phase lock loop (PLL) circuit which accurately renders the position and the angular velocity of the rotor. A Backstepping control law is designed from the input-output linearization of the PMSM model, written in d - q coordinates. This controller is adapted through a load torque and friction reduced order observer to ensure high closed loop performance of the motor. An input-state stability analysis of the entire system is also provided. Co-simulation via the MATLAB/Simulink-PSIM package, including realistic measurement disturbances, are used to investigate the stability and accuracy of the proposed control algorithm. The simulation results are examined and confirmed through laboratory experiments.

Keywords—Backstepping tracking controller, Load torque parameter estimation, Permanent magnet synchronous motor (PMSM).

I. INTRODUCTION

A permanent magnet synchronous motor (PMSM) has highest torque density and the highest efficiency among other electrical machines (See F. Betin et. al [2]). Given these advantages, the PMSM have extended their applications in machine tools, robotics, automotive applications, electrical mobility, more electric aircraft, renewable power generation, and home appliances (See [2]). The conventional proportional-integral-derivative (PID) control methods are still popular because they are very simple and they usually work well on some operation points (See B. Alecsa et. al [1]). However, as the PMSM is a nonlinear system with no measurable endogenous and exogenous disturbances (See K.-H. Kim et. al [14]), is not easy to obtain an excellent performance in the full range of operation, when linear control methods are used (See S. Li et. al [16] and G.-J. Wang et. al [28]). With nonlinear control methods seeks to provide a more natural solution to the problems posed by PMSM substantially disturbed systems. With the fast development of the semiconductor technologies, especially the Digital Signal Processors (DSP), power electronics, and modern control techniques, more a more advanced control methods are introduced to the PMSM control problem, e.g., robust control (See F. F. M. El-Sousy [7]), adaptive control (See X. Yue et. al [30]), sliding mode control (See J. Rivera et. al [26]), input-output linearization control (See B. Grčar et. al [9]), flatness-based hierarchical control (See E. Delaleau et. al [6]), adaptive backstepping control (See M. A. Rahman et. al [25] and M. Morawiec [21]), integrator backstepping control (See G. Prior et. al [23]), active disturbance rejection

control (See S. Li et. al [18] and H. Sira-Ramírez et. al [27]), etc. These nonlinear control techniques can improve the performance, robustness and the stability of the PMSM systems. In real industrial applications the PMSM systems always face with different disturbances, e.g., friction force, unmodeled dynamics, and load disturbances (See S. Li et. al [18] and W.-H. Zhu [31]), for this reason, in this article we propose a robust tracking angular position controller based on backstepping technique. Where, the estimation of load torque disturbances, friction forces and unmodeled dynamics unknown are estimated by means of a reduced order observer, while the desired reference trajectory of angular position is calculated through a Bézier polynomial. The angular position and speed are estimated through an observer based on PLL, which uses a resolver device. Thus, the estimated values for the observers are adapted online to robust Backstepping tracking controller.

This article is organized as follows: mathematical model of the PMSM and formulation of the problems, observer design based on PLL to estimate the angular position and speed, and the load torque observer are presented in section II. The robust backstepping tracking controller and main result is presented in section III. Section IV describes the experimental implementation of the proposed controller for a laboratory 2-hp PMSM using a digital signal processor (DSP) board DS1104. In section V, sample results are presented in both simulation and experiment at different operating conditions in order to verify the robustness and stability of the proposed controller. Finally, in section VI presents the conclusions of the article and some suggestions for further work.

II. MATHEMATICAL MODEL OF THE PMSM AND PROBLEM FORMULATION

A mathematical model of a PMSM, with surface-mounted permanent magnets, is adopted where the rotor can be considered to be magnetically round (i.e., no-salient poles) and which, also, has the same reluctance along the symmetry axis through the center of the machine. The model may be found in the work by N. Mohan in [20]. The model, written in a rotatory d - q reference frame, is given by J. Chiasson in [5]:

$$L_s \frac{di_d}{dt} = -R_s i_d + n_p \omega L_s i_q + u_d \quad (1)$$

$$L_s \frac{di_q}{dt} = -R_s i_q - n_p \omega L_s i_d - K_m \omega + u_q \quad (2)$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{2} K_m i_q - \tau_L \quad (3)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \quad (4)$$

where u_d is the direct voltage, u_q is the quadrature voltage, i_d is the direct current, i_q is the quadrature current, ω is the angular velocity, and θ is the angular position of the rotor. The resistance and inductance of the stator circuit are denoted by R_s and L_s respectively, n_p is the number of pole pairs, and J is the moment of inertia of the motor. The parameter K_m is the back-emf term, with $K_m = n_p \lambda_m$ and λ_m is the flux linkage of the stator d-winding due to flux produced by rotor magnets. τ_L is a unknown load torque that may also include friction torques.

In this work, we consider two fundamental problems:

Problem 1: Angular position and angular speed observer design.

We use an algorithm that extracts the angular speed and the angular position from the resolver voltages thus acting as a nonlinear observer. This scheme was originally proposed by Harnefors et al. in [10]. This observer is readily interpreted as a baseband equivalent PLL circuit and it has the virtue of having a tangent linearization coincident with a traditional Luenberger observer. A PLL circuit further corrects the locally estimated mechanical states provided by the resolver voltage functions. The first problem is formulated as follows:

Assuming that only the resolver voltages are available for measurement, design an observer; in the form of a baseband equivalent PLL circuit, that asymptotically reconstructs the rotor position and the rotor speed of the PMSM.

Problem 2: Load torque observer. It is desired to accurately estimate the load torque input to the PMSM on the basis of the measured currents and the angular velocity estimate obtained from the solution to the previous problem. The nominal values of the parameters, J and K_m are assumed to be known, and the unknown load torque perturbation input, including friction terms, is considered to be constant. A reduced order observer for the load torque with friction terms is then proposed which accurately yields the uncertain value of the constant load torque with friction terms (See J. Linares-Flores et. al [19]).

In the following two subsections, we, respectively, design the PLL based position and speed observer and a the reduced-order observer to estimate the constant load torque input along with the nonlinear friction perturbation.

A. PLL based Position and speed observer

In specific applications, such as electric vehicles, robotics, etc., it is customary to use a position sensor to operate the system. Due to safety and accuracy requirements such devices help in performing the tasks involved in motion control. Thus, in the case of the position control of PMSM system, we use a resolver device in order to achieve a good control performance. For instance, both stator voltages can be sampled at the same frequency ($\omega_r/(2\pi)$ Hz) where sampling is synchronized to the $v_r(t)$ by 90° phase angle in order to sample the maximum magnitudes (See S. Centinkunt [4]). Thus, the sampled resolver voltages are then

$$v_{s1} = V \sin \theta \sin \omega_r t, v_{s2} = V \cos \theta \sin \omega_r t \quad (5)$$

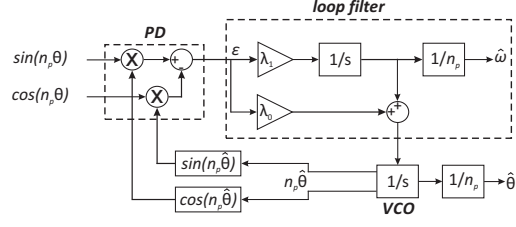


Fig. 1. PLL based angular position and speed observer (baseband equivalent).

This two signals are demodulated through a low-pass filter (LPF) to remove the high-frequency components at ω_r ,

$$v_{s1}^{dem} = \sin \theta, v_{s2}^{dem} = \cos \theta. \quad (6)$$

One calculates the error signal as

$$\varepsilon = \sin \theta \cos n_p \hat{\theta} - \cos \theta \sin n_p \hat{\theta} = \sin n_p (\theta - \hat{\theta}) \quad (7)$$

where θ is the actual angular position, $\hat{\theta}$ is the estimated angular position, and n_p is the number of pole pairs. Therefore, from (6), we design a nonlinear angular position and speed observer using the following algorithm:

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = \hat{\omega} + \lambda_1 \varepsilon \quad (8)$$

$$\frac{d\hat{\omega}}{dt} = \lambda_0 \varepsilon \quad (9)$$

where λ_1 and λ_0 are the gains of the nonlinear observer. The nonlinear observer (8)-(9) is similar to the baseband equivalent model of a PLL. This observer is illustrated in Fig. 1 (See L. Ben-Brahim [17]). This PLL-based nonlinear observer uses a fast tracking method, which reduces the noise level in the measurement of the angular position, and provides a higher degree of closed-loop stability (See L. Harnefors et. al [10] and C.-H. Yim et. al [29]).

Notice that if $\hat{\theta} \approx \theta$, i. e., the equation (7) of the error is linearized around zero as

$$\sin n_p (\theta - \hat{\theta}) \approx n_p (\theta - \hat{\theta}) \quad (10)$$

Thus, the equations of the nonlinear observer (8) and (9) can be rewritten as:

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = \hat{\omega} + \lambda'_1 (\theta - \hat{\theta}) \quad (11)$$

$$\frac{d\hat{\omega}}{dt} = \lambda'_0 (\theta - \hat{\theta}) \quad (12)$$

where $\lambda'_1 = \lambda_1 n_p$ and $\lambda'_0 = \lambda_0 n_p$. The linear differential equations (11) and (12) exhibit the following characteristic polynomial,

$$p(s) = s^2 + 2\lambda'_1 s + \lambda'_0$$

The choice of the design gains: λ'_1 and λ'_0 is made via straightforward term by term comparison with the following Hurwitz polynomial,

$$p_d(s) = (s^2 + 2\rho s + \rho^2)$$

In order to enhance the robustness and avoid oscillations, we propose both poles to be placed at the real location:

$s = -\rho$, where ρ is a positive real parameter. Thus, the gains of nonlinear observer are given by:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \rho/n_p \\ \lambda_0 &= \rho^2/n_p\end{aligned}$$

where, the nominal value n_p is assumed to be perfectly known.

B. Reduced Order Observer for the Unknown Load Torque Estimation

In this subsection, we design a reduced order observer to estimate the load torque parameter. For this design, the quadrature current $u_1 = i_q$ is taken to play the rôle of an input, while the estimated angular velocity is considered as an output $y_1 = \hat{\omega}$. The nominal values of the parameters, J and K_m are assumed to be known. The load torque input is considered to be constant but unknown, and the additive friction term is considered to be uniformly absolutely bounded. From the mechanical equation (31), we consider the expression:

$$\tau_L = K_m u_1 - \left[D y_1 + J \frac{d y_1}{d t} \right]$$

to represent an indirect measurement of the load torque τ_L . We thus propose the following adaptive observer for τ_L :

$$\frac{d \hat{\tau}_L}{d t} = \lambda (\tau_L - \hat{\tau}_L)$$

where $\lambda > 0$.

The estimation error involves,

$$\frac{d}{d t} e_{\tau_L} = -\lambda e_{\tau_L}$$

where $e_{\tau} = \tau_L - \hat{\tau}_L$. Clearly, for $\lambda \gg 0$, the observation error e_{τ} , converges to a neighborhood of zero in an asymptotically exponentially dominated fashion. Thus, we have the following reduced order observer after using the expression for τ_L :

$$\frac{d \hat{\tau}_L}{d t} + \lambda J \frac{d y_1}{d t} = \lambda K_m u_1 - \lambda D y_1 - \lambda \hat{\tau}_L$$

setting $\gamma = \hat{\tau}_L + \lambda J y_1$, we have

$$\begin{aligned}\hat{\tau}_L &= \gamma - \lambda J y_1 \\ \frac{d \gamma}{d t} &= -\lambda \gamma + \lambda (J \lambda - D) y_1 + \lambda K_m u_1\end{aligned}$$

The design of the load torque estimator is used for adaptation purposes in the backstepping tracking controller (see the next section). In this manner, the effects of sudden loads affecting the PMSM shaft motion will be minimized (see also Linares-Flores et al. [19]).

III. BACKSTEPPING AVERAGE CONTROLLER AND MAIN RESULT

This section deals with the design of a trajectory tracking backstepping controller based on the d-q model of the PMSM with surface-mounted permanent magnets. From the d-q model, we rewrite the system dynamics in the Brunovsky canonical form (See Isidori [11]), choosing as the system outputs the direct current $y_1 = i_d$ and the angular position $y_2 = \theta$. The estimated values of the angular position, angular speed, and load torque constant input are online adapted to the backstepping tracking controller. We proceed to prove the closed-loop stability of the system with the help of the input-to-state Lyapunov stability concept.

A. Affine nonlinear form

A nonlinear system is said to be in an *affine form* if it is expressed as

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + [g_1(x), \dots, g_m(x)]u + d(x) \\ y &= h(x), \quad x \in \mathbf{R}^n, u \in \mathbf{R}^m, y \in \mathbf{R}^m\end{aligned}$$

The mathematical model of a PMSM given by (1)-(4) may be expressed in its affine nonlinear form as follows:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d t} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ \omega \\ \theta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{R_s}{L_s} i_d + n_p \omega i_q \\ -\frac{R_s}{L_s} i_q - n_p \omega i_d - \frac{K_m}{L_s} \omega \\ \frac{3}{2} \frac{K_m}{J} i_q \\ \omega \end{pmatrix} + \\ &\begin{pmatrix} \frac{1}{L_s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_s} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_d \\ u_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\tau_L}{J} \\ 0 \end{pmatrix} \\ y &= [i_d, \theta]^T\end{aligned}\quad (13)$$

where the state vector $x = (i_d, i_q, \omega, \theta)^T \in \mathbf{R}^4$; $f(x)$ and $g_i(x)$, $i = 1, 2$ are 4-dimensional smooth vector fields; $u = [u_1, u_2]^T$ is the two dimensional control input, $y = h(x)$ represents the two-dimensional vector of output variables, $h(x)$ is a smooth function mapping x into \mathbf{R}^2 and d is a disturbance vector including only the unknown load torque parameter along with the nonlinear additive Coulomb's friction term. To obtain the input-output linearization of the affine nonlinear system (13), we exclude the disturbance vector from the considerations. This represents the standard procedure to obtain the unperturbed input-output linearization, which allows us to proceed with a robust, sensorless, decoupling linearizing control strategy for the PMSM nonlinear system.

B. Input-state linearization

Choosing as the the system outputs (13) $y_1(x) = h_1(x) = i_d(t)$, and $y_2 = h_2(x) = \theta(t)$, the PMSM nonlinear system can be transformed into a set of two completely controllable linear systems (or two independent chains of integration in Brunovsky's form). The outputs y_1 and y_2 are called linearizing outputs or flat outputs (See [9] and [6]). The input-to-flat output relation (13) is obtained with the help of the successive time derivatives of the components y_i of the vector y such that at in their relation with the control inputs u_i , $i = 1, 2$ a well defined *vector relative degree* (see Isidori [11]) is established. In this particular case, such a vector relative degree is found to be well defined, with no need for dynamic extensions of any of the input variables u_1 or u_2 . Thus, through the use of Lie's iterated directional derivative of the components of the vector function h , along the direction of the vector fields f and the components fields associated with the input gain matrix, one is lead to the following normal form for the system's outputs. The first output $y_1 = h_1(x) = i_d$ yields a relative degree one:

$$\begin{aligned}y_1(t) &= i_d \\ y_1^{(1)}(t) &= \alpha_1(x) + \beta_1 u_d = -\frac{R_s}{L_s} i_d + n_p i_q \omega + \frac{u_d}{L_s}\end{aligned}$$

On the other hand, for the second component of the vector function $h(x)$, i.e., for the system output (y_2), chosen as the

angular position of the PMSM one has:

$$\begin{aligned}
y_2(t) &= \theta \\
y_2^{(1)}(t) &= \omega \\
y_2^{(2)}(t) &= \frac{3}{2} \frac{K_m}{J} i_q \\
y_2^{(3)}(t) &= \alpha_2(x) + \beta_2 u_q \\
&= -\frac{3(K_m R_s i_q + n_p L_s K_m \omega i_d + K_m^2 \omega)}{2JL_s} + \frac{3K_m}{2JL_s} u_q
\end{aligned}$$

Thus, the vector relative degree components $r_1 = 1$ and $r_2 = 3$ satisfy: $r_1 + r_2 = 1 + 3 = 4$, which is the dimension of the state vector x . Therefore, the system is statically feedback linearizable (i.e., flat) and transformable, via a static change of state coordinates and partial static state feedback, to a Brunovsky normal form of PMSM. The perturbed version of such a normal form is given by:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1(x) \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_2(x) \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_d \\ u_q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\tau_L}{J} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (14)
\end{aligned}$$

Remark 1: The input-output feedback linearization of PMSM system facilitates the design of backstepping output tracking controller, since the normal form of the PMSM system naturally allows for the design of a backstepping tracking controller. In fact, there is not need to specify all the original parameters of the PMSM system in its development.

C. Backstepping tracking controller

From (14), we will design the backstepping tracking control law for the angular position of the PMSM perturbed system. In this feedback control law an adaption is carried out of the estimated values of position, speed, and load torque, along with the effects of un-modeled friction terms. Before developing the backstepping tracking controller (See M. Krstić et. al [15]), the following assumptions are made:

- The variables of position and speed are estimated by an Extended State Observer based on PLL. For this first case, we assume that the variables calculated by the observer are considered to be indistinguishable from the actual values, i.e., $\hat{\theta} \approx \theta$ and $\hat{\omega} \approx \omega$ within a finite amount of time after the initial time.
- The phase currents i_a and i_b are measured and transformed to $d - q$ coordinate axis, by means of the known angular position $\hat{\theta} \approx \theta$.
- The load torque parameter value, including friction terms, is estimated by means of a reduced order observer. This parameter is considered to be constant and unknown, but uniformly absolutely bounded.
- The set of nominal values $\{K_m, L_s, n_p, R_s, J\}$ are considered to be known.
- To optimize the internal developed torque by the PMSM, the task of tracking the angular position of the PMSM will be performed in the low speed range. Under this assumption, the operation of PMSM is

constrained by the current limit alone. The desired reference trajectory for the angular position, and its successive time derivatives, are explicitly calculated thanks to its specification as an interpolating polynomial, i.e., a Bézier polynomial. These references are denoted by: $x_2^*(t) = \theta^*(t)$, $\dot{x}_2^*(t) = \dot{\theta}^*(t)$, $\ddot{x}_2^*(t) = \ddot{\theta}^*(t)$, and $\dddot{x}_2^*(t) = \dddot{\theta}^*(t)$. While the reference trajectory for the d-current and its time derivative are planned to be constant with value equal to zero. This reference is denoted by: $x_1^*(t) = i_d^*(t) = 0$, and it, evidently, satisfies: $\dot{x}_1^*(t) = \frac{di_d^*(t)}{dt} = 0$.

Step 1. Tracking controller u_d for the electrical dynamics in the PMSM.

We first propose a Lyapunov function as:

$$V_1(z_1) = \frac{1}{2} z_1^2 \quad (15)$$

where, the variable z_1 denotes the tracking error of the linearizing output or the flat output

$$z_1 = x_1(t) - x_1^*(t) \quad (16)$$

The time derivative of V_1 is given by,

$$\dot{V}_1(z_1) = z_1 \dot{z}_1 \quad (17)$$

where, the speed of the tracking error, is given by:

$$\dot{z}_1(t) = \dot{x}_1(t) - \dot{x}_1^*(t) = \alpha_1(x) + \beta_1 u_d \quad (18)$$

Equation (18) is substituted into (17). We have,

$$\dot{V}_1(z_1) = z_1 [\alpha_1(x) + \beta_1 u_d] \quad (19)$$

Therefore, to force that (19) becomes negative definite, we propose the following direct control input, u_d , as:

$$u_d = -\frac{1}{\beta_1} [\alpha_1(x) + c_1 z_1] \quad (20)$$

where c_1 is a positive constant, which defines the proportional sensitivity of the direct input control. Substituting the expression (20) into (19), we obtain

$$\dot{V}_1(z_1) = -c_1 z_1^2 < 0 \quad (21)$$

Step 2. Calculation of a tracking controller for the mechanical dynamics in the PMSM u_q .

Continuing with the backstepping methodology, we propose a second Lyapunov function as follows:

$$V_2(z_1, z_2) = \frac{1}{2} z_2^2 + V_1(z_1) \quad (22)$$

with the tracking error for the second linearizing output, (or flat output) is given by:

$$z_2(t) = x_2(t) - x_2^*(t) \quad (23)$$

The time derivative of V_2 is just,

$$\dot{V}_2(z_1, z_2) = z_2 \dot{z}_2 - c_1 z_1^2 \quad (24)$$

where, the derivative of the tracking error of z_2 is,

$$\dot{z}_2 = \dot{x}_2(t) - \dot{x}_2^*(t) = x_3(t) - \dot{x}_2^*(t) \quad (25)$$

Substituting the expression (25) into (24) we obtain

$$\dot{V}_2(z_1, z_2) = z_2 [x_3(t) - \dot{x}_2^*(t)] - c_1 z_1^2 \quad (26)$$

We propose a tracking error z_3 , which involves the first stabilizing function $\gamma_1(x)$, so that it achieves a time derivative for $V_2(z_1, z_2)$ which is negative definite,

$$z_3(t) = x_3(t) - \gamma_1(x) \iff x_3(t) = z_3(t) + \gamma_1(x) \quad (27)$$

The angular speed variable, $x_3(t)$ from (27) is substituted into the time derivative of $V_2(z_1, z_2)$, to obtain:

$$\dot{V}_2(z_1, z_2) = z_2 [z_3(t) + \gamma_1(x) - \dot{x}_2^*(t)] - c_1 z_1^2 \quad (28)$$

Using the stabilizing function $\gamma_1(x)$, as given by:

$$\gamma_1(x) = \dot{x}_2^*(t) - c_2 z_2 \quad (29)$$

it follows that the derivative of $V_2(z_1, z_2)$ is given by

$$\dot{V}_2(z_1, z_2) = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 + z_2 z_3 \quad (30)$$

where $c_2 > 0$ is defined as the proportional sensitivity of the tracking error of z_2 . To ensure that the derivative of $V_2(z_1, z_2)$ is negative definite, simply choose $z_3(t) = 0$, thus, the tracking errors z_1 and z_2 both asymptotically converge to zero.

$$\dot{V}_2(z_1, z_2) = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 < 0 \quad (31)$$

Continuing with the method, we propose the following Lyapunov function as:

$$V_3(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{2} z_3^2 + V_2(z_1, z_2) \quad (32)$$

Its time derivative is

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(z_1, z_2, z_3) &= z_3 \dot{z}_3 + \dot{V}_2(z_1, z_2) \\ &= z_3 \dot{z}_3 + z_2 z_3 - c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 \\ &= z_3 (\dot{z}_3 + z_2) - c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 \end{aligned} \quad (33)$$

From (27), the time derivative of z_3 may be calculated as,

$$\dot{z}_3(t) = \dot{x}_3(t) - \dot{\gamma}_1(x) = x_4(t) - \frac{\tau_L}{J} + c_2 \dot{z}_2 - \ddot{x}_2^*(t) \quad (34)$$

Substituting the expression (34) into (33), the time derivative of $V_3(z_1, z_2, z_3)$, along the solutions of (34), is given by

$$\dot{V}_3(z_1, z_2, z_3) = z_3 \left(x_4 - \frac{\tau_L}{J} + c_2 \dot{z}_2 - \ddot{x}_2^* + z_2 \right) - c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 \quad (35)$$

We propose a tracking error z_4 , which involves the second stabilizing function $\gamma_2(x)$ achieves a negative definite time derivative of $V_3(z_1, z_2, z_3)$. Thus,

$$z_4(t) = x_4(t) - \gamma_2(x) \iff x_4(t) = z_4(t) + \gamma_2(x) \quad (36)$$

Substituting the expression (36) into (35), it yields the following time derivative of $V_3(z_1, z_2, z_3)$:

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(z_1, z_2, z_3) &= z_3 \left(z_4 + \gamma_2(x) - \frac{\tau_L}{J} + c_2 \dot{z}_2 - \ddot{x}_2^* + z_2 \right) \\ &\quad - c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 \end{aligned} \quad (37)$$

From (37), we propose the second stabilizing function $\gamma_2(x)$ as:

$$\gamma_2(x) = \ddot{x}_2^* - c_2 \dot{z}_2 - c_3 z_3 + \frac{\hat{\tau}_L}{J} - z_2 \quad (38)$$

At this step, the load torque estimated value ($\hat{\tau}_L$) is adapted to the second stabilizing function, and the gain $c_3 > 0$, is defined as the proportional sensitivity of the tracking error of

z_3 . Thus, (38) is substituted into (37), resulting in the following expression,

$$\dot{V}_3(z_1, z_2, z_3) = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - c_3 z_3^2 - \underbrace{\frac{1}{J} (\tau_L - \hat{\tau}_L)}_{:=e_\tau} z_3 + z_3 z_4 \quad (39)$$

If we choose to $z_4 = 0$, and since the load torque estimation error is bounded, then the derivative of $V_3(z_1, z_2, z_3)$ is negative definite

$$\dot{V}_3(z_1, z_2, z_3) = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - c_3 z_3^2 - z_3 e_\tau < 0 \quad (40)$$

Continuing with the Backstepping design methodology, we propose the last Lyapunov function as:

$$V_4(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{1}{2} z_4^2 + V_3(z_1, z_2, z_3) \quad (41)$$

Its time derivative is,

$$\begin{aligned} \dot{V}_4(z_1, z_2, z_3, z_4) &= -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - c_3 z_3^2 + z_4 [\dot{z}_4 + z_3] \\ &\quad - z_3 e_\tau \end{aligned} \quad (42)$$

where, the derivative of z_4 is given by:

$$\begin{aligned} \dot{z}_4(t) &= \dot{x}_4(t) - \dot{\gamma}_2(x) \\ &= \alpha_2(x) + \beta_2 u_q - \ddot{x}_2^* + c_2 \left(x_4 - \frac{1}{J} \tau_L - \ddot{x}_2^* \right) \\ &\quad + c_3 \left(x_4 - \frac{1}{J} \tau_L + c_2 \dot{z}_2 - \ddot{x}_2^* \right) \end{aligned} \quad (43)$$

Substituting the expression (43) into (42) we obtain:

$$\begin{aligned} \dot{V}_4(z_1, z_2, z_3, z_4) &= -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - c_3 z_3^2 - z_3 e_\tau \\ &\quad + z_4 [\alpha_2(x) + \beta_2 u_q - \ddot{x}_2^* \\ &\quad + c_2 \left(x_4 - \frac{1}{J} \tau_L - \ddot{x}_2^* \right) + z_3 \\ &\quad + c_3 \left(x_4 - \frac{1}{J} \tau_L + c_2 \dot{z}_2 - \ddot{x}_2^* \right)] \end{aligned} \quad (44)$$

We propose the following control input u_q law:

$$\begin{aligned} u_q &= -\frac{1}{\beta_2} [\alpha_2(x) - \ddot{x}_2^* + c_2 \left(x_4 - \frac{1}{J} \tau_L - \ddot{x}_2^* \right) \\ &\quad + c_3 \left(x_4 - \frac{1}{J} \tau_L + c_2 \dot{z}_2 - \ddot{x}_2^* \right) + z_3 + c_4 z_4] \end{aligned} \quad (45)$$

Substituting (45) into (44), we obtain the following expression

$$\begin{aligned} \dot{V}_4(z_1, z_2, z_3, z_4) &= -\sum_{i=1}^4 c_i z_i^2 - z_3 e_\tau - [c_2 + c_3] z_4 e_\tau \\ &= -\mathbf{z}^T \mathbf{C} \mathbf{z} - \mathbf{z}^T \mathbf{M} e_\tau \end{aligned} \quad (46)$$

where,

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ c_2 + c_3 \end{pmatrix}; \quad (47)$$

The expressions (46) and (47) will be used to prove the stability in closed loop of the PMSM substantially disturbed system.

Step 3. Closed loop stability analysis.

Proposition 1: Consider the perturbed system (14) with the feedback backstepping tracking controller (20)–(45). Then, the tracking error dynamics (46) defines an input-state stability (ISS) mapping considering e_τ as an input and \mathbf{z} as state.

responses, to obtain these responses, we set the nominal value of DC bus (VSI) to 50V. This nominal value was needed to developed the major internal torque into the PMSM to low speed. With this low level voltage at DC bus, we reduce to the minimum the acoustic noise in the system. Figure 7 reveals very consistent position and speed tracking errors, even though the presence of abrupt load torque changes on the PMSM shaft.

B. Tuning of The Observers and Backstepping Tracking Controller

The tuning of the observers and controller gains was made by separated. Thus, the PLL observer gains were set as $\lambda_1 = 450$ and $\lambda_0 = 4.05 \times 10^5$. These values avoided and minimized, the oscillations and acoustic noise at the position and speed estimated signals. While, the reduced-order observer gain to estimated the load torque parameter was set as $\lambda = 20$, with this value, we achieved to minimize the effects of sudden loads applied to the PMSM shaft. We see that, the convergence rate of the observer based on PLL is faster than the reduced order observer, this because the reconstruction of the position and speed variables should be very fast, in order to estimate quickly the unknown load torque parameter. On the other hand, the gains of the backstepping tracking controller, that allowed a good tracking of angular position were set as $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 600$.

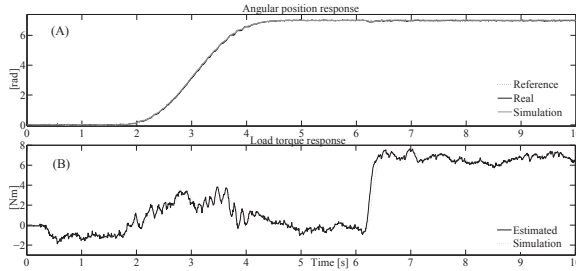


Fig. 3. Simulation and experimental results: (A) angular position response, (B) load torque parameter response, for a desired angular position trajectory tracking task with external load torque applied, $\tau_L \neq 0$.

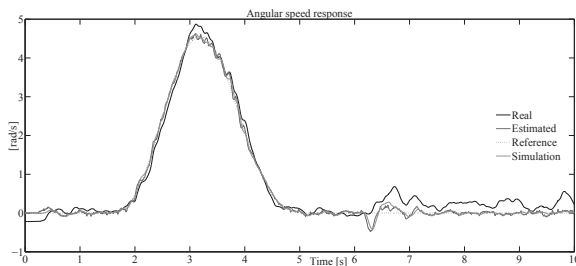


Fig. 4. Simulation and experimental results: angular speed response for a desired angular position trajectory tracking task with external load torque applied, $\tau_L \neq 0$.

V. CONCLUSIONS

The PMSM (1)–(4) is exactly feedback linearizable (i.e., flat) with linearizing outputs given by the d -current i_d and

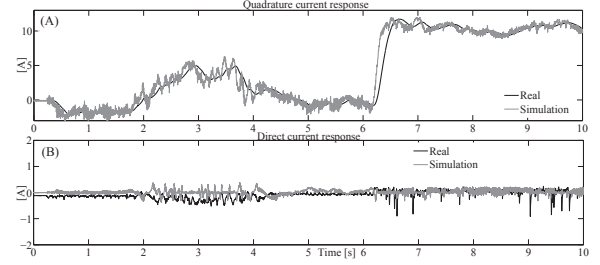


Fig. 5. Simulation and experimental results: (A) quadrature current response, (B) direct current response (first system's output ($y_1 = i_d$)), for a desired angular position trajectory tracking task with external load torque applied, $\tau_L \neq 0$.

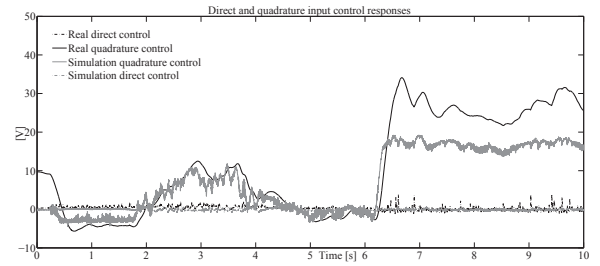


Fig. 6. Simulation and experimental results: Input control responses for a desired angular position trajectory tracking task with external load torque applied, $\tau_L \neq 0$.

the rotor angular position θ . A backstepping based feedback control may be designed which forces the tracking error to zero. This control law may be made robust under constant load torques using a reduced order disturbance observer for load adaptive modification of the reference trajectory. Simulations, performed in a Matlab/Simulink-PSIM environment allows for the inclusion of realistic loads, measurement imperfections, switchings and nonlinearities in the sensors outputs. These effects do not preclude obtaining a sufficiently precise, asymptotic estimation of the angular position, θ , and of the angular velocity, ω thus rendering the scheme of the sensorless type. For this, a suitable combination of a resolver and a baseband equivalent nonlinear PLL circuit is proposed. The net result is an effective experimental implementation of a robust nonlinear observer based smooth adaptive trajectory tracking scheme for the angular position and the d -current component in the presence of unknown but bounded mechanical loads including nonlinear friction terms.

REFERENCES

- [1] B. Alecsa, M.N. Cirstea, and A. Onea, Simulink modelling and design of an efficient hardware-constrained FPGA-based PMSM speed controller, *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, vol. 8, no. 3, pp. 554–562, Aug. 2012.
- [2] F. Betin, G.-A. Capolino, D. Casadei, B. Kawkabani, R.I. Bojoi, L. Harnefors, E. Levi, L. Parsa, and B. Fahimi, Trends in Electrical Machines Control: Samples for Classical, Sensorless, and Fault-Tolerant Techniques, *IEEE Industrial Electronics Magazine*, vol. 8, no. 2, pp. 43–55, Jun. 2014.
- [3] L. Biagiotti and C. Melchiorri, *Trajectory Planning for Automatic Machines and Robots*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2008.
- [4] S. Centinkunt, *Mechatronics*, John Wiley & Sons, 2007.

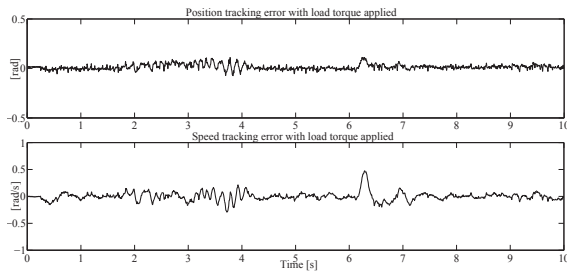


Fig. 7. Experimental results: Position and speed tracking error for a desired angular position trajectory tracking task with external load torque applied, $\tau_L \neq 0$.

- [5] J. Chiasson, *Modeling and High-Performance Control of Electric Machines*, IEEE Press/Wiley-Interscience, 2005.
- [6] E. Delaleau and A. M. Stanković, “Flatness-based hierarchical control of the PM synchronous motor,” *Proc. of the 2004 American Control Conference*, pp. 65–70, Jul. 2004.
- [7] F. F. M. El-Sousy, Hybrid H^∞ -Based Wavelet-Neural-Network Tracking Control for Permanent-Magnet Synchronous Motor Servo Drives, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 57, no. 9, pp. 3157–3166, Sep. 2010.
- [8] Y. E. Gliklikh, “Necessary and sufficient conditions for global -in-time existence of solutions of ordinary, stochastic and parabolic differential equations,” *Abstract and Applied Analysis*, vol. 2006, pp. 1–17.
- [9] B. Grčar, P. Cafuta, M. Žnidarič, and F. Gausch, Nonlinear Control of Synchronous Servo Drive, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 4, no. 2, pp. 177–184, Mar. 1996.
- [10] L. Harnefors, and Hans-Peter Nee, A General Algorithm for Speed and Position Estimation of AC Motors, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 47, no. 1, Feb. 2000.
- [11] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, Third Edition Springer-Verlag, 1995.
- [12] K. Jezernik, R. Horvat, and M. Čurkovič, A Switching Control Strategy for the Reduction of Torque Ripple for PMSM, *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, vol. 9, no. 3, pp. 1272–1279, Aug. 2013.
- [13] H. Khalil, *Nonlinear Systems*, 3rd edition Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 2002.
- [14] K.H. Kim and M.J. Youn, A nonlinear speed control for a PM synchronous motor using a simple disturbance estimation technique, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 49, no. 3, pp. 524–535, Jun. 2002.
- [15] M. Krstić, I. Kanellakopoulos, and P. Kokotović, *Nonlinear and Adaptive Control Design*, John Wiley & Sons, 1995.
- [16] Shihua Li and Hao Gu, Fuzzy Adaptive Internal Model Control Schemes for PMSM Speed-Regulation System, *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, vol. 8, no. 4, pp. 767–779, Nov. 2012.
- [17] L. Ben-Brahim and M. Benammar, “A New PLL Method for Resolvers,” *Proc. 2010 International Power Electronics Conference*, pp. 299–305, 2010.
- [18] Shihua Li, Jun Yang, Wen-Hua Chen, and Xisong Chen, *Disturbance Observer-Based Control Methods and Applications*, CRC Press Taylor & Francis Group, 2014.
- [19] J. Linares-Flores, H. Sira-Ramírez, E. Yescas-Mendoza, and J. J. Vásquez-Sanjuan, A comparison between the algebraic and the reduced order observer approaches for on-line load torque estimation in a unit power factor rectifier-DC motor system, *Asian Journal of Control*, vol. 14, no. 1, pp. 45–57, Jan. 2012.
- [20] N. Mohan, *Advanced Electric Drives: Analysis, Control, and Modeling Using Matlab/Simulink*, John Wiley & Sons, 2014.
- [21] M. Morawiec, The Adaptive Backstepping Control of Permanent Magnet Synchronous Motor Supplied by Current Source Inverter, *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, vol. 9, no. 9, pp. 1047–1055, May 2013.
- [22] P. Pillay and R. Krishnan, “Control characteristics and speed controller design of a high performance PMSM,” *IEEE Industrial Application Society Annual Meeting*, pp. 627–633, 1985.
- [23] G. Prior and M. Krstic, Quantized-Input Control Lyapunov Approach for Permanent Magnet Synchronous Motor Drives, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 21, no. 5, Sep. 2013.
- [24] PSIM User’s Guide Version 9.0 Release 3, Powersim Inc., May 2010.
- [25] M. Azizur Rahman, D. M. Vilathgamuwa, M. N. Uddin, and K.-J. Tseng, Nonlinear Control of Interior Permanent-Magnet Synchronous Motor, *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 39, no. 2, pp. 408–416, Mar./April 2003.
- [26] J. Rivera Domínguez, A. Navarrete, M. A. Meza, A. G. Loukianov, and J. Cañedo, Digital Sliding-Mode Sensorless Control for Surface-Mounted PMSM, *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, vol. 10, no. 1, pp. 137–151, Feb. 2014.
- [27] H. Sira-Ramírez, J. Linares-Flores, C. García-Rodríguez, M.A. Contreras-Ordaz, On the Control of the Permanent Magnet Synchronous Motor: An Active Disturbance Rejection Control Approach, *IEEE Transaction on Control System Technology*, Digital Object Identifier: 10.1109/TCST.2014.2298238, ISSN :1063-6536, Jan. 2014.
- [28] G. J. Wang, C.T. Fong, and K.J. Chang, Neural-network-based self tuning PI controller for precise motion control of PMAC motors, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 48, no. 2, pp. 408–415, April 2001.
- [29] C.-H. Yim, I.-J. Ha, and M.-S. KO, A Resolver-to-Digital Conversion Method for Fast Tracking, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 39, no. 5, pp. 369–378, Oct. 1992.
- [30] Xie Yue, D. M. Vilathgamuwa, and K.-J. Tseng, Observer-Based Robust Adaptive Control of PMSM With Initial Rotor Position Uncertainty, *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 39, no. 3, pp. 645–656, May/Jun. 2003.
- [31] W.-H. Zhu, FPGA Logic Devices for Precision Control: An Application to Large Friction Actuators with Payloads, *IEEE Control Systems Magazine*, pp. 54–75, Jun. 2014.

Apéndice C

Prueba del Lema 1 del integrador Backstepping

Introduciendo la variable del error

$$z = \xi - \alpha(x), \quad (\text{C.1})$$

y diferenciando con respecto al tiempo,(2.41) es reescrita como

$$\dot{x} = f(x) + g(x) [\alpha(x) + z] \quad (\text{C.2a})$$

$$\dot{z} = u - \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x) [f(x) + g(x) (\alpha(x) + z)] \quad (\text{C.2b})$$

Usando (2.39), la derivada de (2.42) a lo largo de las soluciones de (C.2) es

$$\begin{aligned} \dot{V}_a &= \frac{\partial V}{\partial x} (f + g\alpha + gz) + z \left[u - \frac{\partial \alpha}{\partial x} (f + g(\alpha + z)) \right] \\ &= \frac{\partial V}{\partial x} (f + g\alpha) + z \left[u - \frac{\partial \alpha}{\partial x} (f + g(\alpha + z)) + \frac{\partial V}{\partial x} g \right] \\ &\leq -W(x) + z \left[u - \frac{\partial \alpha}{\partial x} (f + g(\alpha + z)) + \frac{\partial V}{\partial x} g \right], \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

donde los términos que contienen z como factor han sido agrupados. Según el teorema LaSalle-Yoshizawa (Teorema 3), cualquier opción de control que haga que $\dot{V}_a \leq -W_a(x, \xi) \leq -W(x)$, con W_a definida positiva en $z = \xi - \alpha(x)$, garantiza la acotación global de x , z , y $\xi = z + \alpha(x)$, y la regulación de $W(x(t))$ y $z(t)$. Además, el teorema de LaSalle (teorema 2.2) garantiza la convergencia de $\begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$ para el conjunto

invariante más grande contenido en el conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid W(x) = 0, z = 0 \right\}$.

Una vez más, la manera más simple de hacer definida negativa a \dot{V}_a en z es elegir el control (2.43), que hace que el término entre corchetes en (C.3) sea igual a $-cz$ y produce

$$\dot{V}_a = -W(x) - cz^2 \triangleq -W_a(x, \xi) \leq 0 \quad (\text{C.4})$$

Claro que si W es definida positiva, el Teorema 2.1 garantiza la estabilidad asintótica global de $x = 0$, $z = 0$, que a su vez implica que $V_a(x, \xi)$ es una función de control de Lyapunov y que $x = 0$, $\xi = 0$ es el equilibrio asintóticamente estable global de (2.41).

Bibliografía

- [1] Theodore Wildi, “Máquinas de inducción trifásicas”, *Máquinas Eléctricas y Sistemas de Potencia*. México: Pearson Educación, 2007, p. 263.
- [2] infoPLC. (2012, septiembre) infoPLC. [Online], www.infopl.net/noticias/item/1514-los-motores-s%ADncronos-ofrecen-ahorro-de-energ%ADa-y-amortizaci%ADn-r%ADl-pida-en-aplicaciones-de-alta-potencia
- [3] Merzoug y Benalla, “Nonlinear backstepping control of permanent magnet synchronous motor (PMSM)”, Algier, 2010.
- [4] Tole Sutikno. (2012, Mayo) Departament of energy conversion. [Online]. http://encon.fke.utm.my/tsutikno/?My_Research:PMSM
- [5] B. K. Bose, *Modern Power Electronics and AC Drivers.*: Prentice Hall, 2002.
- [6] Ying Luo, YangQuan Chen y YouGuo Pi, “Cogging effect minimization in PMSM position servo system using dual high-order periodic adaptive learning compensation”, *ISA Transactions*, pp. 479-488, 2010.
- [7] Jorge Zambada y Debraj Deb, “Sensorless field oriented control of a PMSM”, Microchip Technology Inc., 2010.
- [8] Shun-Sheng Ke y Jung-Shan Lin, “Sensorless speed tracking control with backstepping desing scheme for permanent magnet synchronous motor”, *IEEE Conference on Control Applications*, Toronto, Agosto, 2005.
- [9] V. Repecho, A. Arias, D.Biel y F. Guinjoan, “Estimación de posición en un motor síncrono de imanes permanentes mediante técnicas de inyección de alta frecuencia con control deslizante”, Universidad Politecnica de Catalunya, Barcelona, España, Reporte de Conferencia, 2011.
- [10] Alberto Enrique Sictega Landeros, “Control directo de par del motor síncrono de imanes permanentes”, Instituto Politecnico Nacional, México, D.F., Tesis maestría 2011.

- [11] Pedro Celestino Castellanos Morales, “Control vectorial de la máquina síncrona de imanes permanentes”, Instituto Politecnico Nacional, México, D.F., Tesis maestría, 2011.
- [12] Diana Jimena López Mesa, Guillermo Alberto Camacho Muñoz, Jaime Oscar Díaz Chávez y Carlos Alberto Gaviria López, “Modulación pwm aplicada a inversores trifásicos”, Universidad del Cauca. Facultad de Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones (FIET), p. 1, 2007.
- [13] Manuel Torres Sabino, “Diseño e implementación de una interfaz de potencia para un variador de velocidad de motores de inducción”, México, D.F., 2006.
- [14] Daniel W. Hart, *Electrónica de Potencia. Madrid*, Pearson Education, 2001.
- [15] Carlos Andrés Torres P., Duberney Murillo y Carlos Restrepo Patiño, “Diseño y construcción de un inversor trifásico”, Grupo de Investigación en Electrónica de Potencia, Universidad Tecnológica de Pereira, 2008.
- [16] Diana Jimena López Mesa, Guillermo Alberto Camacho Muñoz, Jaime Oscar Díaz Chávez y Alberto Gaviria López, “Modulacion PWM aplicada a inversores trifásicos dentro del esquema de accionamiento eléctricos AC”, Universidad del Cauca. Facultad de Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones (FIET), Popayán, Cauca, 2007.
- [17] Tzann-Shin Lee, Chih-Hong Lin y Faa-Jeng Lin, “An adaptive H_{∞} controller design for permanent magnet synchronous motor drives”, *Control Engineering Practice*, Mayo, 2004.
- [18] A.R. Ghafari-Kashani, J. Faiz, y M.J. Yazdanpanah, “Integration of non-linear H_{∞} and sliding mode control techniques for motion control of a permanent magnet synchronous motor”, *IET Electric Power Application*, IET, vol. 4, pp. 267-280, Abril 2010.
- [19] Rong-Jong Wai, “Total sliding-mode controller for PM synchronous servo motor drive using recurrent fuzzy neural network”, *IEEE Transactions on industrial electronics*, Octubre, 2001.
- [20] Yang Qian, Liu Weiguo y Huang Yongping, “Real time simulation study on backstepping sliding mode control of permanent magnet synchronous motor”, *International Conference on Electrical Machines and Systems (ICEMS)*, Beijing, Agosto, 2011.
- [21] Jin-Woo Jung, Han Ho Choi y Dong-Myung Lee, “Implementation of a robust fuzzy adaptive speed tracking control system for permanent magnet synchronous motors”, *Journal of Power Electronics*, Noviembre, 2012.

- [22] Hicham Chaoui y Pierre Sicard, “Adaptive control of permanent magnet synchronous machines with disturbance estimation”, *Journal of Control Theory and Applications*, Agosto, 2012.
- [23] Liu Huixian, Ding Shihong, Li Shihua, and Chen Xisong, “A PMSM position servo system based on finite-time control”, 27th Chinese Control Conference, 2008, pp. 234-238, Kunming, Julio 2008.
- [24] Yan Dahu y Ji Zhicheng, “Backstepping speed control of PMSM based on equivalent input disturbance estimator”, Chinese Control Conference, Beijing, China, Julio, 2010.
- [25] T. Wang, S. Tong e Y. Li, “Robust adaptive fuzzy control for nonlinear system with dynamic uncertainties based on backstepping”, *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, Septiembre, 2009.
- [26] M. Azizur Rahman, D. Mahinda Vilathgamuwa, M. Nasir Uddin y King-Jet Tseng, “Nonlinear control of interior permanent magnet synchronous motor”, *IEEE Transactions on industry applications*, Abril, 2003.
- [27] Lagrioui A. y Mahmoudi H., “Nonlinear adaptive backstepping control of permanent magnet synchronous motor (PMSM)”, *Journal of Theoretical and Applied Information Technology*, Islamabad Pakistan, Julio, 2011.
- [28] Jinpeng Yu, Yumei Ma, Bing Chen y Haisheng Yu, “Adaptive fuzzy backstepping position tracking control for a permanent magnet synchronous motor”, *International Journal of Innovative Computing, Information and control*, China, Abril, 2010.
- [29] Cetin Elmas, Oguz Ustun y Hasan H. Sayan, “A neuro-fuzzy controller for speed control of a permanent magnet synchronous motor drive”, *Expert Systems with Applications*, Enero, 2008.
- [30] Kuo-Kai Shyu, Chiu-Keng Lai, Yao-Wen Tsai y Ding-I Yang, “A newly robust controller design for the position control of permanent magnet synchronous motor”, *IEEE Transactions on industrial electronics*, Junio, 2002.
- [31] R.C. Garcia, W.I. Suemitsu, y J.O.P. Pinto, “Precise position control of a PMSM based on new adaptive PID controllers”, *37th Annual Conference on IEEE industrial Electronics Society*, pp. 1983-1988, Noviembre 2011.
- [32] Haisheng yu, Jun Hou, y Zongwei Zou, “Position control of PMSM based on energy-shaping and MTPA principle”, *Proceedings of the 7th World Congress on Intelligent Control and Automation*, Junio 2008.

- [33] Miguel Angel Duran Fonseca, “Diseño de un controlador no lineal basado en pasividad de un motor síncrono”, *Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico*, Cuernavaca, Morelos, Tesis de Maestría 2004.
- [34] Bojan Grčar, Peter Catufa, Mitja Žnidaric y Felix Gausch, “Nonlinear Control of Synchronous Servo Drive”, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*. Marzo 1996.
- [35] Emmanuel Delaleau y Aleksandar M. Stanković, “Flatness-based hierarchical control of the PM synchronous motor”, *Proceeding of the 2004 American Control Conference*, Boston, Massachusetts, Junio, 2004.
- [36] L. Harnefors and N. Hans-Peter, “A General Algorithm for Speed and Position Estimation of AC Motors”, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Febrero, 2000.
- [37] Stensby, J. L., *Phase-Locked Loops: Theory and Applications*, CRC Press, 1997.
- [38] Sira-Ramírez H., Linares-Flores J., García-Rodríguez C. y Contreras-Ordaz M.A., “On the control of the permanent magnet synchronous motor: An active disturbance rejection control approach”, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Enero, 2014.
- [39] Jiunn-Jiang Chen y Kan-Ping Chin, “Automatic Flux-Weakening Control of Permanent Magnet Synchronous Motors Using a Reduced-Order Controller”, *IEEE Transactions on Powers Electronics*, Septiembre, 2000.
- [40] David Vindel, Saeid Haghbin, Ali Rabiei, Ola Carlson y Reza Ghorbani, “Field-oriented control of a PMSM drive system using the dSPACE controller”, *IEEE International Electric Vehicle Conference (IEVC)*, Greenville,SC, Marzo, 2012.
- [41] F. H. Ramírez Leyva y E. Peralta Sánchez, “Control de campo orientado en SIMNON de un motor de imanes permanentes”, *Coloquio de Doctorado* 2011, Puebla, Puebla, 2011.
- [42] Paul C. Krause, Oleg Wasynczuk y Scott D. Sudhoff, *Análisis of electric machinery and drive systems*. Second Edition, Ed. John Wiley, 2002.
- [43] Slotine J. J. y W. Li., *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, Inc, New Jersey, 1991.
- [44] Marquez H. J., *Nonlinear Control Systems*. John Wiley & Sons, Inc, New Jersey, USA, 2003.

- [45] O. Harkegard, "Flight control design using backstepping", Linkoping Studies in Science and Technology, Thesis no 875, Linkopings Universitet, Sweden, 2001.
- [46] Khalil H. K., *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Inc., New Jersey, third edition, 2002.
- [47] Miroslav Krstić, Ioannis Kanellakopoulos y Petar Kokotović, *Nonlinear And Adaptive Control Design*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995.
- [48] Qiang Lu, Yuanzhang Sun y Shengwei Mei, *Nonlinear Control Systems And Power System Dynamics*. Kluwer Academic Publishers, Beijing, China, 2010.
- [49] Yescas Mendoza, Edgardo, *Controladores adaptativos de velocidad para el convertidor ca-cd-motor cd y convertidor buck-motor cd*, Universidad Tecnológica de la Mixteca, Oaxaca, México, Tesis doctoral, 2014.
- [50] dSPACE, "Hardware Instalation and Configuration , DS1104 R&D Controller Board", Marzo, 2004.
- [51] Hebertt Sira-Ramírez, Jesús Linares-Flores, Carlos García-Rodríguez y Marco Antonio Contreras-Ordaz, "On the control of the permanent magnet synchronous motor: an active disturbance rejection control approach", *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2014.