



# **UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA**

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

## **CONTROL DE SEGUIMIENTO DE VELOCIDAD BASADO EN PASIVIDAD DE UN MOTOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES, SIN SENSOR DE POSICIÓN**

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE:

### **MAESTRO EN ELECTRÓNICA OPCIÓN: SISTEMAS INTELIGENTES APLICADOS**

PRESENTA:

**ING. CARLOS ESCOBAR NORIEGA**

DIRECTOR:

**DR. JESÚS LINARES FLORES**

*Huajuapán de León, Oaxaca a 21 de enero de 2015.*

Tesis presentada en enero de 2015 ante los  
sinodales:

Dr. Marco Antonio Contreras Ordaz.

Dr. Carlos García Rodríguez.

Dr. Edgardo Yescas Mendoza.

M. C. Estaban Osvaldo Guerrero Ramírez.

Director de tesis:

Dr. Jesús Linares Flores.

# Dedicatorias

*Para toda mi familia:*

*A mis padres, Rutilio y Aurora.*

*A mis hermanos Rosy, Tilo y Fany.*

*A mi novia, Minerva.*

*Con mucho cariño:*

*Carlos*



# Agradecimientos

A mis padres por brindarme todo su cariño, comprensión y apoyo incondicional, sin el cual no hubiera sido posible la realización de este logro académico.

A Minerva por su amor, paciencia y comprensión, durante mi formación académica.

Al Dr. Jesús Linares Flores por la dedicación y constante revisión en el desarrollo de este trabajo de tesis, además de sus sabios consejos y su gran amistad.

A los profesores Dr. Carlos García Rodríguez, M.C. Esteban Osvaldo Guerrero Ramírez, Dr. Marco Antonio Contreras y Dr. Edgardo Yescas Mendoza por las aportaciones y observaciones que sirvieron para mejorar este trabajo.

Y por último, a mis amigos que me brindaron momentos agradables en el transcurso de la maestría: Tania, Yova, Gaby, Nacho, Cesar, Jorge y Doña Aurora.



# Resumen

En este proyecto se presenta el análisis e implementación de un control de seguimiento suave de velocidad para el motor síncrono de imanes permanentes, que evita el uso de sensores de posición y velocidad para operar. El controlador regula simultáneamente la corriente y la velocidad angular del motor, ambas salidas planas del sistema. El resultado principal del esquema de control propuesto es un controlador lineal variante con el tiempo basado solamente en las mediciones de las corrientes de fase del motor. Para facilitar el diseño del controlador y observador se utiliza la transformación de Clarke y Park, además de las propiedades de pasividad y planitud diferencial del sistema no lineal multivariable. Por otra parte, la estimación de las funciones de la fuerza contra-electromotriz en el marco de referencia  $\alpha - \beta$ , se hacen a través de observadores lineales con extensiones dinámicas que incluyen los errores de estimación de las corrientes en el eje coordenado  $\alpha - \beta$ . La estimación de la posición y velocidad angular se calculan mediante un observador basado en el principio de funcionamiento del dispositivo Lazo de Amarre de Fase (PLL, del idioma inglés Phase Locked Loop).



# Índice

<b>Dedicatorias</b>	<b>I</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Resumen</b>	<b>V</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Estado del arte . . . . .	2
1.2. Plateamiento del problema . . . . .	3
1.3. Justificación . . . . .	4
1.3.1. Pertinencia . . . . .	4
1.3.2. Relevancia . . . . .	5
1.4. Hipótesis . . . . .	5
1.5. Objetivos . . . . .	6
1.5.1. Objetivo General . . . . .	6
1.5.2. Objetivos Particulares . . . . .	6
1.6. Metas . . . . .	6
<b>2. Motor Síncrono de Imanes Permanentes (MSIP)</b>	<b>7</b>
2.1. Acerca de los MSIP . . . . .	7
2.1.1. Ventajas y desventajas . . . . .	7
2.1.2. Aplicaciones de los MSIP . . . . .	8
2.1.3. Clasificación de los MSIP . . . . .	9
2.1.3.1. Características de los MSIPS y MSIPI . . . . .	10
2.1.4. Principio de funcionamiento . . . . .	11
2.1.5. Construcción del MSIP . . . . .	11
2.1.6. Modo de operación . . . . .	12

2.2.	Generalidades para el diseño de accionadores para MSIP . . . . .	13
2.3.	Operación en el régimen estacionario . . . . .	14
2.4.	Pérdidas de potencia . . . . .	16
<b>3.</b>	<b>Control basado en pasividad</b>	<b>21</b>
3.1.	Fundamentos teóricos . . . . .	22
3.1.1.	Pasividad y Disipatividad . . . . .	22
3.1.2.	Estabilidad de Lyapunov . . . . .	24
3.1.2.1.	Método directo de Lyapunov . . . . .	24
3.1.3.	Planitud y controlabilidad . . . . .	26
3.1.4.	Curvas de Bézier . . . . .	27
3.2.	Control por ETEDPOF . . . . .	28
3.2.1.	Casos especiales . . . . .	30
3.3.	Diseño del controlador basado en pasividad por retroalimentación de la salida pasiva . . . . .	32
3.3.1.	Controlador multivariable promedio por retroalimentación de la salida pasiva del MSIP . . . . .	33
3.3.2.	Análisis de estabilidad en lazo cerrado . . . . .	36
3.4.	Planeación de las trayectorias de referencia . . . . .	37
<b>4.</b>	<b>Observadores</b>	<b>39</b>
4.1.	Observadores de estado . . . . .	39
4.1.1.	Observador de orden completo . . . . .	39
4.1.2.	Observador de orden reducido . . . . .	40
4.2.	Observador GPI extendido de alta ganancia . . . . .	42
4.2.1.	Diseño del observador GPI para las funciones de FCEM . . . . .	44
4.2.2.	Análisis de estabilidad . . . . .	45
4.3.	Estructura del PLL . . . . .	47
4.3.1.	Dinámica en lazo cerrado . . . . .	48
4.3.2.	Análisis del ruido en la señal de entrada al PLL . . . . .	49
4.4.	Diseño del observador de posición y velocidad basado en PLL . . . . .	50
4.4.1.	Análisis de estabilidad del observador no lineal PLL de banda base . . . . .	52
4.5.	Diseño del observador del parámetro del par de carga . . . . .	53
<b>5.</b>	<b>Diseño y simulación del control para el MSIP</b>	<b>55</b>

5.1.	Esquema general del sistema . . . . .	55
5.2.	Desarrollo del diagrama a bloques del algoritmo de control . . . . .	56
5.2.1.	Representación del modelo promedio de la planta en simulink . . . . .	57
5.3.	Representación del algoritmo de control en diagrama a bloques de Simulink . . . . .	60
5.3.1.	Controlador por retroalimentación de la salida pasiva del error . . . . .	60
5.3.2.	Trayectorias de referencia . . . . .	61
5.3.3.	Transformación de Park . . . . .	62
5.3.4.	Transformación de Clarke . . . . .	64
5.3.5.	Observador GPI . . . . .	64
5.3.6.	Estructura PLL . . . . .	65
5.3.7.	Observador de par de carga . . . . .	65
5.4.	Resultados de simulación . . . . .	67
5.4.1.	Simulación para una trayectoria suave de referencia . . . . .	68
5.4.2.	Simulación de la regulación del MSIP . . . . .	75
5.4.3.	Comparativa entre el controlador basado en pasividad y el control por campo orientado . . . . .	82
<b>6.</b>	<b>Resultados experimentales y conclusiones</b>	<b>85</b>
6.1.	Plataforma experimental . . . . .	85
6.1.1.	Autotransformador trifásico . . . . .	86
6.1.2.	Circuito rectificador trifásico . . . . .	87
6.1.3.	Inversor trifásico fuente de voltaje . . . . .	87
6.1.4.	Sensores de corriente . . . . .	88
6.1.5.	Módulo dSPACE . . . . .	89
6.1.6.	Módulo Motor/Dinamómetro . . . . .	93
6.2.	Resultados obtenidos . . . . .	93
6.3.	Conclusiones . . . . .	99
6.4.	Trabajos futuros . . . . .	100
	<b>Apéndices</b>	<b>101</b>
<b>A.</b>	<b>Modelo matemático del MSIP</b>	<b>103</b>
A.1.	Consideraciones para la obtención del modelo matemático . . . . .	103
A.2.	Circuito equivalente del MSIP . . . . .	104
A.3.	Determinación de la matriz de inductancias del estator . . . . .	105

---

A.3.1. Inductancias propias del estator . . . . .	106
A.3.2. Inductancias mutuas del estator . . . . .	108
A.4. Modelado en el eje de referencia $a, b, c$ . . . . .	110
A.5. Modelado en el eje de referencia $\alpha - \beta$ . . . . .	113
A.6. Modelado en el eje de referencia $d - q$ . . . . .	114
A.7. Modelado electromecánico . . . . .	118
<b>B. Transformaciones de Clarke y Park</b>	<b>121</b>
B.1. Transformación de Clarke . . . . .	121
B.2. Transformación de Park . . . . .	122
<b>C. Cálculo del par electromagnético</b>	<b>125</b>
<b>D. Artículos realizados</b>	<b>129</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>148</b>

# Índice de figuras

2.1. Clasificación de los motores . . . . .	9
2.2. a) Motor Síncrono de Imanes Permanentes Superficiales. b) Motor Síncrono de Imanes Permanentes Interiores. . . . .	10
2.3. Sección transversal del MSIP. . . . .	12
2.4. Diagrama fasorial de los voltajes y corrientes trifásicos balanceados. . . . .	15
2.5. Circuito equivalente monofásico del MSIP en el dominio de la frecuencia. . . . .	16
2.6. Diagrama fasorial de la fase $a$ del MSIP. . . . .	16
2.7. Diagrama de flujo de potencia. . . . .	17
2.8. Representación de la parte eléctrica y mecánica del MSIP. . . . .	17
2.9. Curva de potencia del MSIP. . . . .	19
3.1. Curva de Bézier. . . . .	27
4.1. Lazo de amarre de fase, PLL. . . . .	47
4.2. Diagrama a bloques del PLL . . . . .	51
5.1. Esquema general del sistema . . . . .	56
5.2. Diagrama a bloques del sistema. . . . .	58
5.3. Modelo promedio de la planta en PSIM <sup>®</sup> . . . . .	59
5.4. Ventana de configuración del módulo MSIP. . . . .	59
5.5. Bloque de enlace SimCoupler. . . . .	61
5.6. Controlador basado en pasividad. . . . .	61
5.7. Subsistema del módulo del controlador basado en pasividad. . . . .	62
5.8. Trayectorias de referencias. . . . .	63
5.9. Transformación de Clarke. . . . .	63
5.10. Subsistema del bloque de transformación de Park. . . . .	63
5.11. Transformación de Clarke. . . . .	64

5.12. Subsistema del módulo de transformación de Clarke. . . . .	64
5.13. Observador GPI para la estimación de la FCEM. . . . .	65
5.14. Subsistema del observador GPI. . . . .	66
5.15. Subsistema del polinomio Hurwitz de 6o orden. . . . .	66
5.16. PLL (Lazo de Amarre de Fase). . . . .	67
5.17. Subsistema del bloque PLL. . . . .	67
5.18. Observador de par de carga y términos no modelados. . . . .	67
5.19. Subsistema del módulo de observador de par. . . . .	68
5.20. a) Velocidad mecánica del MSIP, $\omega_m$ . b) Error de velocidad, $e_{\omega_m}$ . . . . .	69
5.21. a) Par de carga en el eje del motor, $\tau_L$ . b) Error de estimación del parámetro del par de carga, $e_{\tau_L}$ . . . . .	69
5.22. a) Corriente directa, $i_d$ . b) Error de corriente de directa, $e_{i_d}$ . . . . .	70
5.23. a) Corriente de cuadratura, $i_q$ . b) Error de corriente de cuadratura, $e_{i_q}$ . . . . .	71
5.24. a) Voltaje de control directo, $u_d$ . b) Error de de voltaje de control directo, $e_{u_d}$ . . . . .	71
5.25. a) Voltaje de control de cuadratura, $u_q$ . b) Error de voltaje de control de cuadratura, $e_{u_q}$ . . . . .	72
5.26. a) Voltaje trifásico suministrado al MSIP. b) Acercamiento del voltaje trifásico durante el arranque. . . . .	72
5.27. a) Corriente trifásica suministrado al MSIP. b) Acercamiento de la corriente trifásica ante el cambio de par de carga. . . . .	73
5.28. a) Voltaje trifásico en el eje $\alpha - \beta$ . b) Corriente trifásica en el eje $\alpha - \beta$ . . . . .	73
5.29. a) Funciones de FCEM normalizados. b) Acercamiento de la estimación de las funciones de FCEM durante el arranque. . . . .	74
5.30. a) Posición angular de los observadores, GPI y PLL. b) Acercamiento de la posición durante el proceso de estimación. c) Error entre los estimadores GPI y PLL . . . . .	75
5.31. a) Posición angular del motor, $\theta_m$ , y del PLL. b) Acercamiento de la posición durante el arranque. c) Error de estimación . . . . .	75
5.32. a) Regulación de velocidad del MSIP. b) Error de velocidad, $e_{\omega_m}$ . . . . .	76
5.33. a) Efecto del valor del coeficiente de amortiguamiento, $\xi$ , durante el cambio de dirección de la velocidad. b) Acercamiento de la velocidad durante el cambio de dirección. . . . .	77
5.34. a) Par de carga en el eje del motor, $\tau_L$ . b) Error d estimación del parámetro de par de carga. . . . .	77
5.35. a) Corriente de cuadratura, $i_q$ . b) Error de corriente de directa, $e_{i_q}$ . . . . .	78

5.36. a) Corriente directa, $i_d$ . b) Error de corriente directa, $e_{i_d}$ . . . . .	78
5.37. a) Voltaje de control directo, $u_d$ . b) Error de de voltaje de control directo, $e_{u_d}$ . . . . .	79
5.38. a) Voltaje de control de cuadratura, $u_q$ . b) Error de voltaje de control de cuadratura, $e_{u_q}$ . . . . .	79
5.39. a) Voltaje trifásico suministrado al MSIP. b) Acercamiento en el arranque por regulación. c) Acercamiento durante el cambio de dirección. . . . .	80
5.40. a) Corriente trifásica suministrado al MSIP. b) Acercamiento en el arranque por regulación. c) Acercamiento durante el cambio de dirección. . . . .	80
5.41. a) Voltaje trifásico en el eje $\alpha - \beta$ . b) Corriente trifásica en el eje $\alpha - \beta$ . . . . .	81
5.42. a) Estimación de las funciones de FCEM normalizados a uno. b) Acercamiento durante el arranque. c) Acercamiento durante el cambio de dirección . . . . .	81
5.43. a) Posición angular de los observadores, GPI y PLL. b) Acercamiento de ambos observadores durante el arranque. c) Acercamiento durante el cambio de dirección. . . . .	82
5.44. a) Posición angular del motor, $\theta_m$ , y del PLL. b) Acercamiento de la posición durante el proceso de estimación. c) Error de estimación. . . . .	83
5.45. Comparativa entre el controlador basado en pasividad y el FOC . . . . .	84
6.1. a) Plataforma experimental . . . . .	85
6.2. Autotransformador trifásico. . . . .	87
6.3. Circuito rectificador trifásico. . . . .	87
6.4. Inversor trifásico fuente de voltaje . . . . .	88
6.5. Sensores de corriente . . . . .	89
6.6. Módulo dSPACE. . . . .	89
6.7. Tarjeta controladora DS1104 R&D. . . . .	90
6.8. Arquitectura de Tarjeta controladora DS1104 R&D. . . . .	91
6.9. Señales de conexión de los pines de salida del PWM. . . . .	92
6.10. Fotografía del Motor/Dinamómetro utilizado. . . . .	94
6.11. a) Velocidad desarrollada por el MSIP. b) Error de estimación de la velocidad. . . . .	95
6.12. a) Par de carga en el eje del motor. b) Error de estimación de par. . . . .	95
6.13. a) Corriente directa del MSIP. b) Error de corriente directa. . . . .	96
6.14. a) Corriente de cuadratura del MSIP. b) Error de corriente de cuadratura. . . . .	96
6.15. a) Control directo. b) Error de control directo. . . . .	97
6.16. a) Control de cuadratura. b) Error de control de cuadratura . . . . .	97
6.17. a) Posición angular del MSIP. b) Acercamiento durante el arranque. c) Error de estimación. . . . .	98

---

A.1. Devanados del estator del MSIP. . . . .	104
A.2. Componentes $F_{mad}$ y $F_{maq}$ de la fuerza $F_{ma}$ . . . . .	106
A.3. Comportamiento de la inductancia propia del devanado $a$ . . . . .	108
A.4. Circuito equivalente de la fase $a$ . . . . .	112
A.5. Diagrama electromecánico del MSIP. . . . .	119
B.1. Eje de referencia $a, b, c$ y eje de referencia $\alpha - \beta$ . . . . .	121
B.2. Eje de referencia síncrono $d - q$ , eje de referencia $\alpha - \beta$ . . . . .	123

# Capítulo 1

## Introducción

Alrededor del 60% de la energía eléctrica generada se utiliza para hacer funcionar motores eléctricos. La utilización de éstos motores a menudo son encontrados en la industria, el comercio, los servicios y el hogar. Es significativo el hecho de que los motores eléctricos suministran, en su mayor parte, la energía que mueve los procesos industriales, por lo que la conservación y la adecuada operación de los motores en la industria representa uno de los campos más fértiles de oportunidades en el ahorro de energía, lo cual se traduce en una reducción en los costos de producción y en una mayor competitividad [48]. Por otro lado, los recientes avances en los dispositivos semiconductores de potencia de conmutación, materiales magnéticos, y los sistemas de almacenamiento de energía han generado un considerable interés en la aplicación de motores síncronos de imanes permanente (MSIP)[3]. La tecnología en el control de los accionamientos de máquinas de corriente alterna (CA) ha mejorado considerablemente. Esto se debe principalmente al avance logrado en las técnicas de control desarrollado por varios años. La implementación de estos conceptos fue posible gracias al desarrollo de la tecnología de los microcontroladores, procesadores de señales digitales (DSP) [26] y [6].

Los MSIP's se caracterizan por su alta eficiencia, tamaño reducido y un amplio rango de velocidad de funcionamiento y par, además de que no cuentan con devanados en el rotor ni escobillas, caso contrario al motor de inducción y motor de CD [9],[10] y [30]. Son motores cuyo uso ha crecido rápidamente estos últimos años por la aparición de nuevos materiales para imanes que tienen características favorables superiores al resto, son de bajo costo y adecuados en aplicaciones para convertidores de frecuencia donde se requieren amplios rangos de velocidad de funcionamiento a par constante [44].

El control de máquinas eléctricas sin sensor de posición ha sido un tema de investigación que se ha desarrollado en las últimas décadas [23] y [43]. Por ello, se ha dado la necesidad de realizar controles que no requieran el uso de un sensor de posición debido a que las conexiones

representan un aumento en el costo del equipo y una fuente de fallos en aplicaciones de control de motores expuestos a trabajo duro. La estimación de posición o velocidad permite eliminar los sensores mecánicos normalmente usados en el control de los MSIP. Esto tiene como principal ventaja un menor costo de accionamiento y una mayor confiabilidad y robustez. Por otro lado, el control de motores sin sensor de posición o velocidad son utilizados en la industria, pero solamente en aplicaciones en donde no es necesario la operación sostenida del motor a muy bajas velocidades [35]. El bajo desempeño dinámico del accionador sin sensor mecánico de posición o velocidad a muy bajas velocidades, se debe fundamentalmente, a que la mayoría de las estrategias de estimación se basan en la información obtenida a partir de la fuerza contra-electromotriz de la máquina. La atenuación o pérdida de señal, cuando la máquina trabaja a muy baja velocidad, respectivamente, imposibilita el uso de estas estrategias de control en este rango de operación [46].

## 1.1. Estado del arte

El control de máquinas de CA sin sensor de posición ha sido un tópico de interés en las últimas décadas en el área de Electrónica de Potencia y Control Automático. Muchas técnicas de observación y reconstrucción de estado han sido desarrolladas para el cálculo de la posición y velocidad angular a través de la fuerza contra-electromotriz de la máquina. Se han propuesto varios métodos de estimación basados en el modelo del MSIP en el eje coordenado  $\alpha - \beta$ , presentando un buen funcionamiento en media y alta velocidad. Sin embargo a bajas velocidades la amplitud de la fuerza contra-electromotriz es pequeña y no se puede detectar con precisión para una estimación fiable de la variable de posición angular. Los errores en la medición de la corriente aumentan debido al ruido y son muy significativas a bajas velocidades.

*Solsona et al.* [2000] [58], comparan dos observadores de orden reducido basándose en la fuerza contra-electromotriz de movimiento para la estimación de la posición y la velocidad del MSIP, un Observador Lineal (OL) y un Observador No Lineal (ONL), sus análisis y simulaciones muestran que el ONL tiene un mejor rendimiento y demanda una mayor carga computacional que el OL, además que este esquema es de tipo adaptivo. Por otro lado, De Angelo *et al.* [2006] [9], proponen un nuevo esquema de control de velocidad sin sensores para el control de velocidad de alto rendimiento del MSIP con una carga desconocida, este esquema utiliza un observador no lineal de orden reducido para estimar la fuerza contra-electromotriz y el par de carga.

*Lee et al.* [2010] [23], diseñan un observador no lineal para motores síncronos de imanes permanentes de montaje superficial, el observador no lineal genera la estimación de la posición  $\theta$  a través de la estimación del  $\sin\theta$  y el  $\cos\theta$ . Este observador no requiere información de la velocidad, eliminando de este modo la complejidad asociada con los errores de estimación de

velocidad. Los resultados experimentales son buenos con y sin cargas por encima de los 10 rad/min.

*Genduso et al.* [2010] [16], proponen un algoritmo de control de bajo consumo en tiempo y bajo costo para motores síncronos de imanes permanentes de alto rendimiento. Este algoritmo de control está basado en la estimación de la velocidad y posición angular del rotor a partir de la fuerza contra-electromotriz mediante la determinación del vector espacial sin sensores de voltaje a través del control de las corrientes de fase. *Wang* [2012] [64], propone un nuevo procedimiento de arranque basado en un lazo cerrado de regulación de corriente, este nuevo método de arranque puede trabajar bajo diferentes condiciones de carga, permitiendo la transición sin problemas del procedimiento de inicio de la FEM basado en el modo de control sin sensores, además este procedimiento ofrece una atractiva solución de bajo costo. *Ortega et al.* [2013] [43], proponen un simple observador de posición no lineal en dos dimensiones. El observador de velocidad está diseñado después del surgimiento y la técnica de invariancia. Esta propuesta presenta buenos resultados experimentales bajo cambios repentinos de carga en un rango de velocidad media. *Mohamed et al.* [2013] [2]. Proponen observadores adaptativos interconectados para el control de MSIP sin sensor de posición, además de identificar los parámetros en línea durante el proceso de estimación.

## 1.2. Plateamiento del problema

Los MSIP's son cada vez más utilizados en variadores de velocidad de alto rendimiento y en muchas aplicaciones industriales. Ya que tienen características favorables tales como: alta eficiencia, compactibilidad, alto par, rápida respuesta dinámica, modelado simple y son libres de mantenimiento. Para regular la velocidad o posición del MSIP, es necesario saber la posición exacta del rotor, ya que ésta es una medida esencial y crítica que mantiene una relación directa con la posición del flujo del rotor, generado por los imanes permanentes [63]. La información dada por los sensores acoplados al eje del rotor, tales como: resolvers, encoders, tacómetros y potenciómetros sirven para regular en forma directa la variable de salida de posición o velocidad del motor. Sin embargo, el propio sensor, los conectores eléctricos y los cables para la medida de la señal requerida, aumentan el tamaño, la complejidad del hardware, el costo de mantenimiento y el precio global de la unidad de control. En la última década, los controladores de velocidad sin sensor de posición para velocidades intermedias y altas del MSIP, se basan en la estimación de la fuerza contra-electromotriz para obtener el valor estimado de la posición y velocidad angular en muchas aplicaciones industriales. Por su simplicidad y alta eficiencia al operar el MSIP, este tipo de controladores presentan una serie de ventajas con respecto a los controladores directos. Los controladores sin sensor de posición no requieren acoplar al motor elementos mecánicos, reducen el número de conexiones, tienen menor número de fallos, requieren de un menor mantenimiento y facilitan la reducción física del sistema. En algunas

aplicaciones industriales, la instalación de los sensores de posición que presentan algunos problemas, como en bombas de vacío, no es posible acoplar un sensor de posición, dado que no es posible extender el eje del motor debido al sellado. Equipos domésticos tales como refrigeradores y equipos de aire acondicionado, tienen la problemática de utilizar un sensor de velocidad debido a las temperaturas extremas a las que se somete el sensor. En grúas y aplicaciones de elevadores eléctricos, la distancia entre el motor y el inversor es tan grande que la atenuación de la señal de los sensores y la interferencia por ruido es alta [3], generándose así una disminución en la fiabilidad y una susceptibilidad al ruido, lo que a su vez provoca fallas al sistema de accionamiento del motor [48].

### 1.3. Justificación

El desarrollo continuo de dispositivos electrónicos digitales tales como los DSPs (por sus siglas en inglés, digital signal processor), microcontroladores y FPGA (Field Programmable Gate Array) han facilitado la implementación de algoritmos de control que requieren un extenso cálculo computacional, procesando de manera precisa los datos en tiempo real y reduciendo el hardware de la unidad de control. Muchos de estos controladores son aplicados a motores de corriente alterna utilizados en varias aplicaciones industriales. El uso de MSIP ha crecido rápidamente durante los últimos años, ya que éste se caracteriza por tener alta eficiencia, tamaño reducido, amplio rango de velocidad de funcionamiento, mayor densidad de par y potencia. Sin embargo, en la actualidad este tipo de motores se han comenzado a utilizar en áreas muy específicas tales como: robótica, tracción eléctrica, generación eólica, etc. [26]. Por lo que la mayor parte de las aplicaciones de estos motores hacen uso de un sensor de posición angular (encoder o resolver), teniendo como consecuencia un incremento en el tamaño y costo total del sistema de control. En recientes investigaciones sobre el control del MSIP mostradas en la literatura especializada, se han venido diseñando algoritmos de control que evitan el uso del sensor de posición para operar, reduciendo así el costo, los fallos, el número de conexiones y el mantenimiento del sistema. Por ello, la finalidad de este trabajo de tesis, es proporcionar un algoritmo de control de seguimiento de velocidad para el MSIP, sin tener que medir la variable de posición angular. Esto conlleva a un ahorro notable en el costo y mantenimiento del equipo que opera al MSIP.

#### 1.3.1. Pertinencia

El desarrollo de este trabajo de tesis es una aplicación de los conocimientos adquiridos durante el curso, basado en el control de motores de CA y el uso de convertidores de potencia (inversor trifásico). El algoritmo de control automático diseñado en este proyecto de tesis es para controlar la velocidad de un MSIP, dando un uso eficiente de la transformación de la

energía en sistemas electromecánicos mediante sistemas digitales (dSPACE), y contribuyendo a la línea de investigación de Control de Sistemas Electromecánicos (CSE) realizados en la División de Estudios de Postgrado de la Universidad Tecnológica de la Mixteca.

### 1.3.2. Relevancia

El control de velocidad de un MSIP ha sido desarrollado durante las dos últimas décadas, y con el avance de la tecnología digital se ha logrado implementar esta técnica de control no lineal en aplicaciones industriales. Sin embargo, la aplicación de esta técnica de control ha diferido de acuerdo a los requerimientos deseados tales como: respuesta rápida en estado estacionario ante perturbaciones de par de carga, exactitud y precisión a medias y altas velocidades. Por ello, la técnica de control propuesta en esta tesis tiene la principal característica de utilizar un algoritmo implementado en Matlab/Simulink mediante el uso de técnicas de estimación, para estimar las variables de posición, velocidad, fuerza contraelectromotriz y par de carga necesaria para la aplicación del controlador basado en pasividad, con la fin de lograr la regulación de velocidad angular del MSIP.

## 1.4. Hipótesis

El control de seguimiento suave de velocidad basado en pasividad para el Motor Síncrono de Imanes Permanentes sin sensor de posición, tiene las siguientes premisas:

- Las estimaciones de la posición y velocidad angular se hacen a través de observadores Proporcionales Integrales Generalizados (GPI, por sus siglas en inglés) lineales con extensiones dinámicas y términos de corrección de error de estimación de las corrientes en el eje coordenado  $\alpha - \beta$ . Para reducir el ruido y aumentar la estabilidad de la estimación de las variables de posición y velocidad se utiliza un observador basado en PLL.
- La estimación del parámetro de par de carga del motor se realiza a través de un observador lineal de orden reducido en el marco de referencia d-q, el cual se adapta a las trayectorias de referencia deseadas del controlador.
- El controlador de seguimiento suave de velocidad se basa en la estructura pasiva-disipativa del sistema en el eje coordenado d-q, mientras que las trayectorias de referencia deseadas se calculan mediante la propiedad de planitud diferencial del sistema.

## 1.5. Objetivos

### 1.5.1. Objetivo General

Analizar, diseñar e implementar un sistema de control de seguimiento de velocidad angular basado en pasividad de un MSIP sin el uso de un sensor de posición.

### 1.5.2. Objetivos Particulares

1. Diseñar e implementar observadores GPI para estimar la fuerza contra-electromotriz, posición, velocidad y par de carga.
2. Diseñar el algoritmo de control basado en pasividad de seguimiento suave de velocidad angular.
3. Simular el sistema de control mediante las herramientas Matlab/Simulink-PSIM.

## 1.6. Metas

- ⇒ Arrancar en forma suave el MSIP.
- ⇒ Realizar pruebas experimentales a diferentes velocidades y par de carga al sistema de control del MSIP.
- ⇒ Realizar un artículo científico del sistema de control propuesto para el MSIP.

# Capítulo 2

## Motor Síncrono de Imanes Permanentes (MSIP)

La disponibilidad de los modernos Imanes Permanentes (IP) con una considerable densidad de energía, llevo al desarrollo de Motores de Corriente Directa (MCD) con una excitación de campo generado por IP en los años 1950s. La introducción de los IP reemplazaron los polos electromagnéticos con devanado de campo que requerían de una fuente de alimentación de energía eléctrica, dando como resultando un MCD más compacto. Del mismo modo en los Motores Síncronos (MS), los polos electromagnéticos convencionales en el rotor son reemplazados por polos de IP, por lo cual, los anillos deslizantes (colector) y las escobillas son eliminadas durante su construcción. Con el avance de los transistores de potencia de conmutación y dispositivos rectificadores controlados, se ha reemplazado el conmutador mecánico por un conmutador electrónico mediante un circuito inversor. Estos dos avances contribuyen al desarrollo de accionadores para MSIP y Motores de CD Sin Escobillas (MCDSE), esta tesis se enfoca al control de velocidad del MSIP. Con el reemplazo del rotor con devanado de campo por un rotor de IP se elimina la armadura del rotor, ya que el conmutador mecánico es reemplazado por su versión electrónica. Por lo tanto, la armadura del motor se ubica en el estator permitiendo un mejor enfriamiento y aplicación de voltajes más altos en sus terminales [32].

### 2.1. Acerca de los MSIP

#### 2.1.1. Ventajas y desventajas

Los MSIP ofrecen una serie de ventajas en el diseño del sistema de control. Al colocar IP sobre el rotor, se genera un espacio de aire (entrehierro), por la cual circula un flujo magnético. Teniendo como resultado, la eliminación de los devanados en el rotor y el desarrollo de MSIP altamente eficientes [50]. El uso de materiales magnéticos en el rotor, tales como el neodimio-

hierro-boro ( $Nd_2Fe_{14}B$ ) y el samario de cobalto ( $Sm_1Co_5$  y  $Sm_2Co_{17}$ ) proporcionan un alto par, alta densidad de potencia, eficiencia y controlabilidad [8]. Las ventajas de los MSIP ante motores como el de CD, Motor de Inducción (MI) y el MS con devanado de campo son las siguientes [34]:

- El IP no absorbe energía eléctrica, por lo tanto, no hay pérdidas de excitación.
- Relación favorable de par/peso y potencia/peso de salida.
- Mejor desempeño en estado transitorio (alta densidad de flujo magnético en el entrehierro y par electromagnético).
- Excelente controlabilidad en el rango completo de par-velocidad.
- El mecanismo de enfriamiento es más efectivo, debido a que el calentamiento por pérdidas es concentrado únicamente en el estator.
- Simplificación en la construcción y mantenimiento.
- Diseño compacto y menor espacio de instalación.

Algunas de las desventajas son:

- Reducción de la flexibilidad en el control del flujo.
- Posible efecto de desmagnetización de los imanes.
- Su costo es mucho mayor comparado con el MI [5].

### 2.1.2. Aplicaciones de los MSIP

La aplicación de los MS en la industria en la mayoría de los casos resulta en ventajas económicas y operativas considerables para el usuario. Son útiles para grandes potencias de carga donde los MI son ineficientes como por ejemplo: sistemas de generación de potencia trifásica, sistemas de propulsión eléctrica y como actuador en servo-sistemas [38].

Los MSIP se utilizan fundamentalmente en aplicaciones de baja potencia, como servomecanismos para máquinas herramientas (torno, fresadoras, sistemas de posicionamiento, bombas de vacío, grúas, elevadores, etc), accionadores en general, pequeños generadores de electricidad, máquinas de corte por láser y en robótica. Sin embargo, también se utilizan en aplicaciones de alta potencia, por ejemplo en sistemas aerogeneradores o de propulsión de buques, entre otros.

### 2.1.3. Clasificación de los MSIP

Los MS pueden clasificarse en función de la dirección del flujo de campo magnético del rotor de la siguiente manera:

1. Flujo radial: La dirección del flujo es a lo largo del radio del motor.
2. Flujo axial: La dirección del flujo es paralelo al eje del motor.

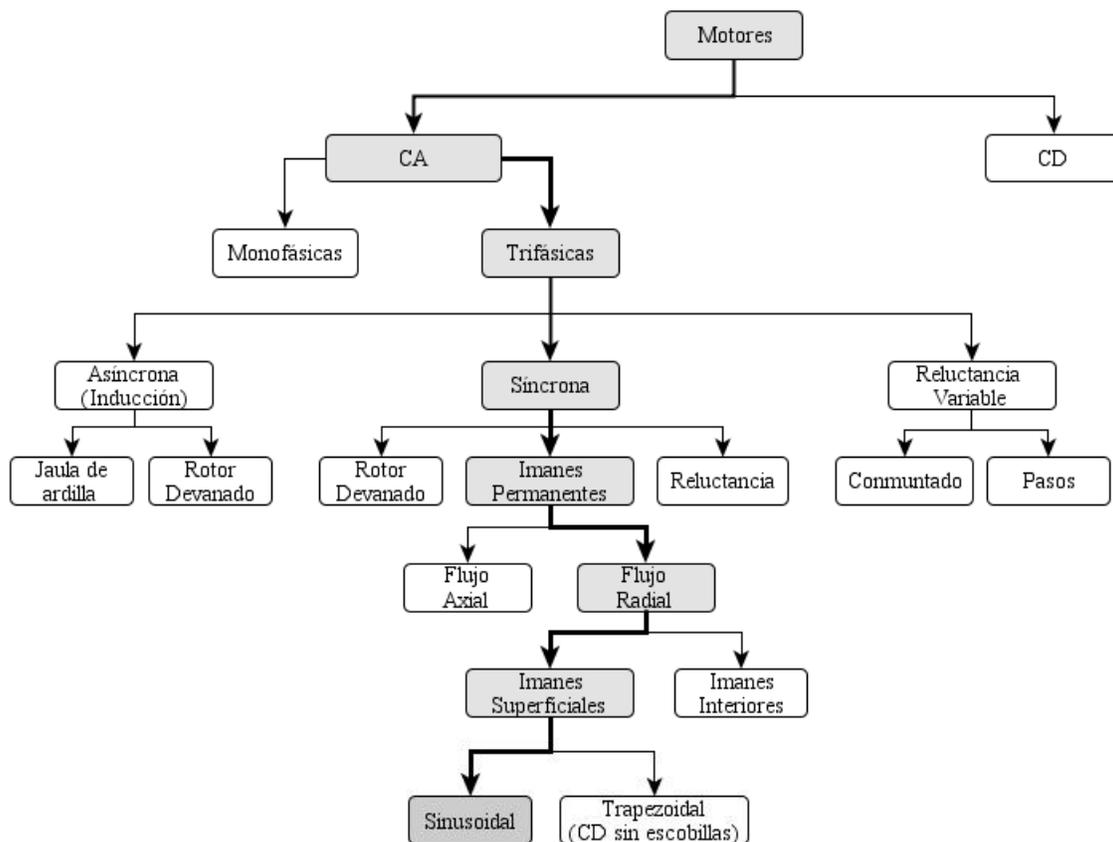


Figura 2.1: Clasificación de los motores

El MSIP de flujo radial tiene mayor uso actualmente, aunque la de flujo axial está incrementando notablemente su uso en algunas aplicaciones, debido a su alta densidad de potencia y aceleración. Estas características son deseables para aplicaciones de alto rendimiento [32].

Los imanes pueden ser colocados en el rotor de varias maneras, clasificándose como MSIP interiores y superficiales.

El estator de este motor es como el de cualquier motor trifásico, dependiendo de la construcción del rotor se tienen diferentes tipos de motores síncronos:

1. De imanes permanentes montados en el rotor.
2. De rotor devanado para generar el campo magnético [38].
3. De Reluctancia variable con un rotor laminado.

Los MS de alta densidad de potencia tienen IP superficiales (MSIPS) con orientación radial y los MSIP interiores (MSIPI) tienen los imanes colocados en el interior del rotor, tal como se muestran en la Figura 2.2. Independientemente del montaje de los IP en el rotor, el principio básico de operación del motor es el mismo. La forma de colocación de los imanes sobre el rotor provocarán una diferencia entre los valores de la inductancia de los ejes de cuadratura y directa [5].

Los MSIP de flujo radial pueden clasificarse también de acuerdo a la Fuerza Contra Electro-Motriz (FCEM) generado en el estator: MSIP con FCEM trapezoidal y distribución sinusoidal [32]. En este proyecto de tesis se utiliza el MSIPS de flujo radial con distribución sinusoidal de la FCEM. En la Figura 2.1 se muestra un diagrama de la clasificación de los motores y se señala la ubicación del motor que se utilizó mediante rectángulos sombreados.

### 2.1.3.1. Características de los MSIPS y MSIPI

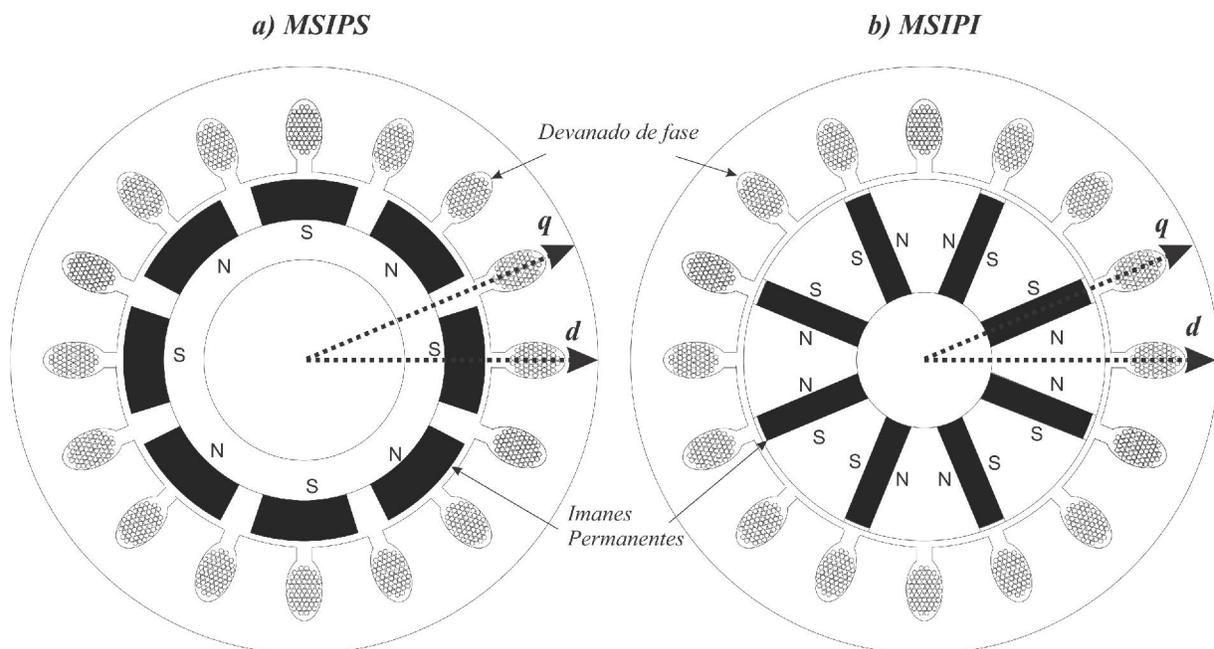


Figura 2.2: a) Motor Síncrono de Imanes Permanentes Superficiales. b) Motor Síncrono de Imanes Permanentes Interiores.

En la Figura 2.2 las flechas con  $d$  y  $q$  denotan el eje directo y de cuadratura del MSIP. El eje magnético del rotor se denomina eje directo y la trayectoria principal del flujo es a través de

los imanes. El ángulo mecánico entre los ejes  $d$  y  $q$  es  $\frac{\pi}{2n_p}$ , donde  $n_p$  es el número de pares de polos [12].

Considere la permeabilidad de los IP de alta densidad de flujo similar a la del aire ( $\mu = 1$ ). La inductancia del estator se debe primordialmente a la colocación de los imanes, cuando el eje directo o los imanes son alineados con el devanado del estator se conoce como inductancia del eje directo  $L_{dm}$ . Girando los imanes a una posición de  $90^\circ$  eléctricos, se visualiza la zona interpolar de los imanes, la trayectoria del flujo del hierro y la inductancia obtenida en esta posición se le conoce como inductancia del eje en cuadratura  $L_{qm}$  [32].

Si los imanes son montados en la superficie del rotor entonces el entrehierro efectivo es bastante grande y, cercano a la del aire [21]. En consecuencia, las inductancias de los MSIPS son usualmente pequeñas. La diferencia entre las inductancias del eje directo y de cuadratura ( $L_{dm}$  y  $L_{qm}$ ) es aproximadamente cero, por lo tanto se dice que para los MSIPS  $L_{dm} \approx L_{qm}$ . Sin embargo, en los MSIPI se presentan saliencias que saturan el campo magnético del hierro, especialmente en los dientes del estator. Esto hace que el entrehierro efectivo sea más grande en la dirección del eje  $d$  ( $L_{dm} < L_{qm}$ ), por lo tanto, estos tipos de motores no son adecuados para accionadores que requieran debilitar el campo magnético del rotor [12].

#### 2.1.4. Principio de funcionamiento

En general, para producir un torque electromagnético, se debe producir un flujo y una Fuerza Magneto-Motriz (FMM) en estado estable, teniendo un ángulo de desfase aproximadamente a cero uno con respecto al otro. La presencia del flujo en el rotor se debe a los imanes permanentes del rotor. Las corrientes en los devanados del estator generan la FMM necesaria para atraer los polos de los imanes colocados en el rotor. La velocidad relativa cero entre la FMM del estator y el flujo del rotor se logra cuando las revoluciones son casi iguales entre ellas y en la misma dirección. Las revoluciones de la FMM en el estator es el resultado de la inyección de corrientes trifásicas en los devanados del estator, desfasados  $120^\circ$  eléctricos y una distribución de los devanados a  $120^\circ$  mecánicos, esto con el fin de generar un campo magnético rotatorio; en donde la magnitud es constante, a una frecuencia angular establecida por la fuente de alimentación de CA trifásica [32].

#### 2.1.5. Construcción del MSIP

El MSIP tiene una construcción similar a la de cualquier motor, está formada esencialmente por una parte fija llamada estator, una giratoria llamada rotor y una carcasa. El estator contiene varias bobinas por cada devanado de fase, distribuidas en ranuras alrededor de él (véase Figura 2.2). El rotor está formado por uno o varios imanes permanentes o devanados de campo con la intención de generar el campo magnético del rotor. La vida útil de estos

imanes se ve afectada por temperaturas elevadas o por la presencia de un campo magnético externo mucho mayor que el de los imanes. Entre el estator y el rotor se encuentra un pequeño espacio de aire que se conoce como entrehierro. La carcasa protege al motor contra la corrosión y elementos que puedan perjudicarlo. Además, sobre la carcasa se montan los soportes del eje del rotor, dispositivos de medición de velocidad y demás componentes que brindan una correcta instalación del motor [34] y [11].

El MSIP de 2 polos tiene una estructura conceptual mostrada en la Figura 2.3; los devanados del estator ( $a, b$  y  $c$ ) son idénticos pero separados entre sí  $120^\circ$  ( $\frac{2\pi}{3}$  radianes), cada uno con  $N_s$  vueltas y resistencia  $r_e$ , para nuestro análisis se asume que los devanados de estator están distribuidos sinusoidalmente. Los devanados del estator generan campos magnéticos, estos se representan como ( $a, b$  y  $c$ ) y los ejes magnéticos del rotor (ejes  $d$  y  $q$ ). La salida de corriente se representa por cruces y la entrada por puntos. El movimiento giratorio del rotor está caracterizado por el desplazamiento angular eléctrico  $\theta_e$  y define la separación entre el eje  $a$  y el eje  $q$ . Donde la velocidad angular eléctrica del rotor es  $\omega_e$ .

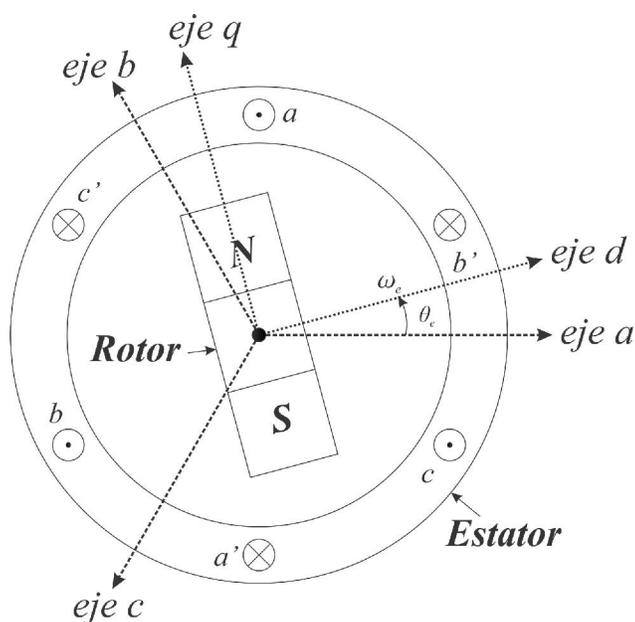


Figura 2.3: Sección transversal del MSIP.

### 2.1.6. Modo de operación

En un MS la velocidad es proporcional a la frecuencia del voltaje aplicado a su estator [13]. La velocidad a la cual gira el rotor es igual a la del campo magnético giratorio generado por el estator denominada velocidad de sincronismo, de aquí el nombre que se le da al motor.

El motor se alimenta de los voltajes trifásicos aplicados a los devanados del estator, generando un campo magnético giratorio de magnitud constante [33], ya que el campo magnético

generado por los IP es constante. Con una velocidad angular  $\omega_e$  dada por:

$$\omega_e = 2\pi f \quad (2.1)$$

Donde  $f$  es la frecuencia de los voltajes en  $Hz$ . Cuando el número de pares de polos  $n_p$  es diferente de uno, el desplazamiento angular eléctrico  $\theta_e$ , no es igual al desplazamiento angular mecánico del motor  $\theta_m$ , sin embargo estos están relacionados mediante la siguiente ecuación:

$$\omega_e = n_p \omega_m \quad (2.2)$$

Esta última expresión es muy importante, ya que generalmente el valor que se puede medir es el desplazamiento mecánico  $\theta_m$  y en el modelo del subsistema eléctrico el que interviene, es el desplazamiento eléctrico  $\theta_e$ .

La velocidad del campo magnético giratorio también se representa en revoluciones por minuto (rpm), dado como  $\eta_m$ , cumpliendo la siguiente igualdad:

$$\eta_m = \frac{60f}{n_p} \quad (2.3)$$

Los motores síncronos pueden tener uno o varios pares de polos. Los motores síncronos con pocos pares de polos son utilizados para velocidades altas, mientras que los de un gran número de pares de polos son para aplicaciones de baja velocidad. La ecuación anterior, relaciona la velocidad del rotor con la frecuencia de los voltajes aplicados al estator y el número de pares de polos de la máquina, además establece la característica fundamental de las máquinas síncronas. Durante la operación del MSIP el número de pares de polos no se puede modificar, entonces, para variar la velocidad del rotor sólo hace falta variar la frecuencia de los voltajes aplicados, esto se cumple desde la operación en vacío hasta la carga máxima admisible por el MSIP. Si se supera el par de carga máximo el motor pierde sincronismo.

## 2.2. Generalidades para el diseño de accionadores para MSIP

Para el desarrollo de accionadores para MSIP, se toman en cuenta las siguientes consideraciones [27]:

- Los imanes permanentes están fijos rígidamente al eje de rotación generando un flujo constante en el rotor. El flujo por lo general tiene una magnitud constante. Cuando se energizan los devanados del estator, estos crean un campo electromagnético rotatorio. Para controlar el campo magnético giratorio, es necesario controlar las corrientes del estator.

- La estructura real del rotor varía dependiendo del rango de potencia y velocidad nominal de la máquina. Los imanes permanentes son adecuados para máquinas síncronas de baja y media potencia. Para potencias superiores, el rotor por lo general consiste de espiras en el que circula una corriente continua. La estructura mecánica del rotor está diseñado para un número de polos deseados, y gradientes de flujos deseados.
- La interacción entre los flujos del estator y del rotor produce un par de torsión. Puesto que el estator está montado firmemente en la carcasa del motor, el rotor es libre de girar con un mínimo coeficiente de fricción.
- El ángulo entre el campo magnético del rotor y el campo del estator debe ser controlada cuidadosamente para producir el par máximo y lograr una alta eficiencia de conversión electromecánica. Para obtener la variable de posición con o sin sensor y cerrar el lazo de velocidad se utiliza un algoritmo de control, con el fin de demandar la mínima cantidad de corriente cuando se presenta un par de carga y manteniendo la velocidad deseada.
- El campo rotatorio del estator debe girar a la misma frecuencia que el campo magnético del rotor; de lo contrario el rotor experimentará rápidamente un cambio brusco de par. Esto provocará una vibración mecánica excesiva, ruido, y tensiones mecánicas sobre las partes colocadas en el eje del motor. Además, si la inercia del rotor impide que el rotor sea capaz de responder a estas oscilaciones, el rotor dejará de girar a la frecuencia síncrona, tenido como respuesta un par promedio igual a cero.
- La dirección y magnitud del campo magnético resultante se obtiene por la suma vectorial de cada una de las fases.

### 2.3. Operación en el régimen estacionario

Cuando se tiene un circuito eléctrico lineal operando en estado permanente, donde sus fuentes de voltaje o corriente son de una frecuencia única, toda corriente o voltaje en el circuito se puede determinar completamente por su amplitud máxima y su ángulo de fase [13]. El concepto de fasor nos ayuda a representar una función sinusoidal por medio de un número complejo en forma polar. En régimen estacionario el MSIP se alimenta con los voltajes dados en la ecuación (A.31), representado en su forma fasorial:

$$\begin{aligned}
 v_a &= V_m \angle 0 \\
 v_b &= V_m \angle -120 \\
 v_c &= V_m \angle +120
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

Se hace la representación fasorial de los voltajes, tal que la frecuencia de los voltajes es  $\omega_e$ , la ecuación (A.31) nos da la misma información acerca de los voltajes en función del tiempo.

Estos voltajes se encuentran representados en el dominio del tiempo y cuentan con la misma amplitud  $V_m$ . Al considerar que  $\omega_e = 2\pi f$ , entonces los tres voltajes tienen la misma frecuencia y la diferencia entre estos es el ángulo de fase.

Para realizar la transformación de las corrientes y enlaces de flujo a fasores se sigue un procedimiento similar al de los voltajes. También existe una transformación para los elementos pasivos: resistencia  $R$ , inductor  $L$  y capacitor  $C$ , dados por las siguientes igualdades.

$$\begin{aligned} R &= R \\ X_L &= \omega L \\ X_C &= \frac{1}{\omega C} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Donde  $X_L$  es la reactancia inductiva y  $X_C$  es la reactancia capacitiva. Para obtener una representación gráfica de los voltajes y corrientes en un circuito se emplean los diagramas fasoriales. Un diagrama fasorial es una gráfica en el plano complejo de los voltajes y las corrientes. El diagrama fasorial de los voltajes (A.31) y corrientes (A.32) trifásicos balanceados del motor se muestra en la Figura 2.4, se observa que el valor máximo de los tres voltajes es igual y el defasamiento entre los voltajes es de  $2\pi/3(120^\circ)$ . Estas dos condiciones anteriores se cumplen también para las corrientes.

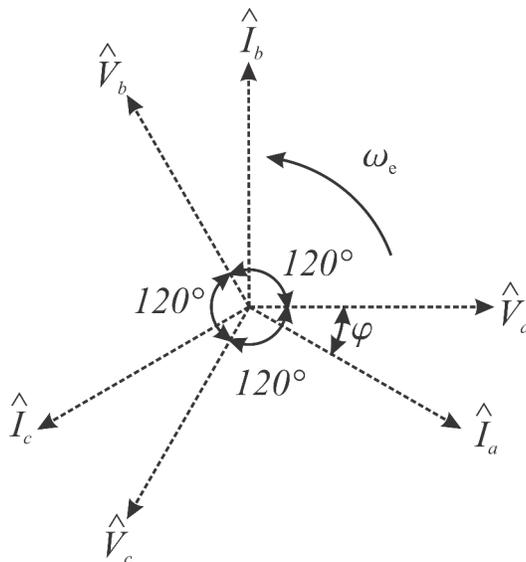


Figura 2.4: Diagrama fasorial de los voltajes y corrientes trifásicos balanceados.

Bajo estas consideraciones el circuito equivalente de la fase  $a$  descrito por la Figura 2.4, se plantea como el circuito mostrado en la Figura 2.5.

Aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff al circuito de la Figura 2.5, obtenemos la siguiente ecuación:

$$\hat{V}_a = R_e \hat{I}_a + j X_e \hat{I}_a + \hat{E}_{ag} \quad (2.6)$$

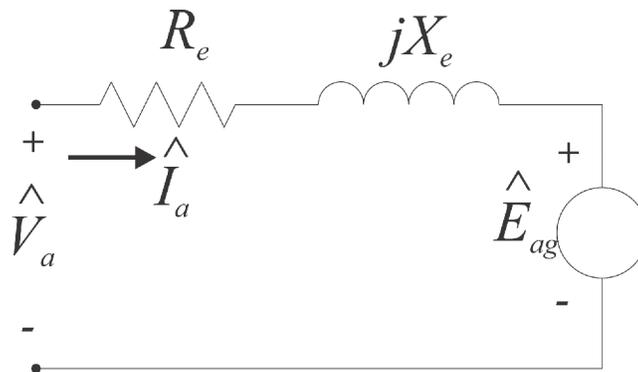


Figura 2.5: Circuito equivalente monofásico del MSIP en el dominio de la frecuencia.

Donde  $X_e = \omega_e L_e$  es la reactancia síncrona. El diagrama fasorial correspondiente a la ecuación (2.6) se presenta en la Figura 2.6 el ángulo  $\delta$  entre los fasores  $\hat{V}_a$  y  $\hat{E}_{ag}$  se llama ángulo de potencia debido a que está relacionado con la potencia y el par que desarrolla el MSIP.

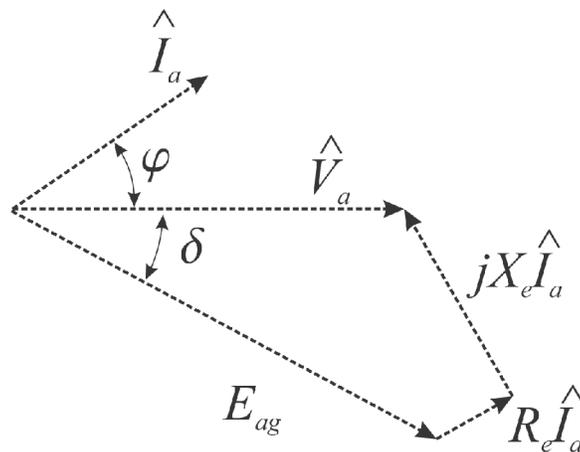


Figura 2.6: Diagrama fasorial de la fase  $a$  del MSIP.

## 2.4. Pérdidas de potencia

El MSIP es una máquina eléctrica que convierte la potencia eléctrica suministrada en los devanados del estator en potencia mecánica aplicada en el eje del rotor. En este proceso de conversión se presentan pérdidas de potencia. En la Figura 2.7 se muestra el diagrama de flujo de potencia del MSIP.

Las denominadas “Pérdidas en la resistencia” son las que se presentan en las resistencias de los devanados de armadura en forma de calor, y están dadas por:

$$P_R = 3 |I_a|^2 R_e \quad (2.7)$$

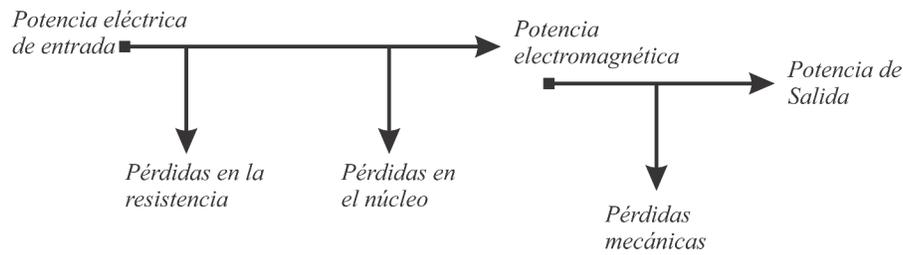


Figura 2.7: Diagrama de flujo de potencia.

Las “Pérdidas en el núcleo” que son las pérdidas por histéresis y por corrientes parásitas que ocurren en el metal del motor.

Al restar las pérdidas en la resistencia y las pérdidas en el núcleo a la potencia de entrada queda lo que se denomina “Potencia electromagnética” o también llamada potencia de conversión, y es precisamente la potencia que se transforma de eléctrica a mecánica.

Finalmente las “Pérdidas mecánicas” están relacionadas con las fricciones entre las partes móviles del motor y las fricciones con el aire. La potencia de salida es el resultado de restar el conjunto de todas las pérdidas a la potencia de entrada.

Para determinar la potencia electromagnética en la fase  $a$  se utiliza el circuito equivalente monofásico en el dominio de la frecuencia dado por la Figura A.4, se agrega la representación de la parte mecánica con la intención de ilustrar la transformación de potencia eléctrica a mecánica (Figura 2.8). La potencia electromagnética se presenta en la fuente de voltaje generado  $\hat{E}_{ag}$ .

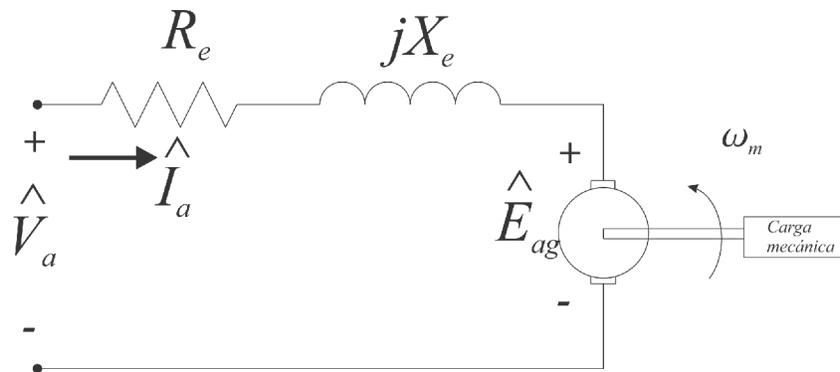


Figura 2.8: Representación de la parte eléctrica y mecánica del MSIP.

De la ecuación (2.6) se despeja el fasor de corriente  $\hat{I}_a$ :

$$\hat{I}_a = \frac{\hat{V}_a - \hat{E}_{ag}}{R_e + jX_e} = \frac{\hat{V}_a}{R_e + jX_e} - \frac{\hat{E}_{ag}}{R_e + jX_e} \quad (2.8)$$

Tomando en cuenta que  $\hat{Z} = |Z| \angle \phi_Z = R_e + jX_e$  es la impedancia de devanado y que  $|Z| = \sqrt{R_e^2 + X_e^2}$  y  $\phi_Z = \arctan\left(\frac{X_e}{R_e}\right)$  representa la magnitud y la fase respectivamente,

entonces se tiene que:

$$\widehat{I}_a = \frac{|V_a|}{|Z|} \angle -\phi_Z - \frac{|E_{ag}|}{|Z|} \angle -(\delta + \phi_Z) \quad (2.9)$$

se requiere conocer el conjugado de  $\widehat{I}_a$ , siendo:

$$\widehat{I}_a^* = \frac{|V_a|}{|Z|} \angle -\phi_Z - \frac{|E_{ag}|}{|Z|} \angle (\delta + \phi_Z) \quad (2.10)$$

El superíndice \* representa el conjugado, desarrollando los términos se tiene que:

$$\widehat{I}_a^* = \frac{|V_a|}{|Z|} \cos \phi_Z - \frac{|E_{ag}|}{|Z|} \cos (\delta + \phi_Z) + j \left( \frac{|V_a|}{|Z|} \sin \phi_Z - \frac{|E_{ag}|}{|Z|} \sin (\delta + \phi_Z) \right) \quad (2.11)$$

Para hallar la potencia electromagnética real se debe encontrar primero la potencia aparente dada por:

$$\widehat{S} = \widehat{E}_{ag} \widehat{I}_a^* \quad (2.12)$$

al considerar que  $\widehat{E}_{ag} = |E_{ag}| \angle -\delta$  y realizando las operaciones correspondientes, se tiene que:

$$\widehat{S} = \frac{|V_a| |E_{ag}|}{|Z|} \cos (\phi_Z - \delta) - \frac{|E_{ag}|^2}{|Z|} \cos \phi_Z + j \left( \frac{|V_a| |E_{ag}|}{|Z|} \sin (\phi_Z - \delta) - \frac{|E_{ag}|^2}{|Z|} \sin \phi_Z \right) \quad (2.13)$$

Se conoce también que  $\widehat{S} = P_{em} + jQ_{em}$ , entonces de la ecuación anterior la potencia electromagnética real  $P_{em}$  y la potencia reactiva  $Q_{em}$  están dadas por:

$$\begin{aligned} P_{em} &= \frac{|V_a| |E_{ag}|}{|Z|} \cos (\phi_Z - \delta) - \frac{|E_{ag}|^2}{|Z|} \cos \phi_Z \\ Q_{em} &= \frac{|V_a| |E_{ag}|}{|Z|} \sin (\phi_Z - \delta) - \frac{|E_{ag}|^2}{|Z|} \sin \phi_Z \end{aligned} \quad (2.14)$$

Normalmente la resistencia de los devanados es muy pequeña en comparación con la reactancia síncrona, por lo tanto se considera que  $R_e = 0$ , [51]; bajo esta consideración el valor de la magnitud de impedancia es  $|Z| = X_e$  y el valor del ángulo de fase es  $\phi_Z = \pi/2$ , por lo tanto la expresión para la potencia electromagnética es:

$$P_{em} = \frac{|V_a| |E_{ag}|}{X_e} \cos (\phi_Z - \delta) = \frac{|V_a| |E_{ag}|}{X_e} \sin \delta \quad (2.15)$$

Esta última ecuación representa la potencia electromagnética para una sola fase del MSIP, la potencia electromagnética total se obtiene multiplicando por tres a (2.15), es decir:

$$P_{em,3\phi} = 3 \frac{|V_a| |E_{ag}|}{X_e} \sin \delta \quad (2.16)$$

Otra expresión para la potencia electromagnética desde el punto de vista mecánico es:

$$P_{em,3\phi} = \omega_m \tau_{em} \quad (2.17)$$

donde  $\omega_m$  es la velocidad angular mecánica del eje del rotor y  $\tau_{em}$  es el par producido por el motor, este se expresa como:

$$\tau_{em} = 3 \frac{|V_a| |E_{ag}|}{\omega_m X_e} \sin \delta \quad (2.18)$$

Cuando esta máquina opera como motor, se tiene que el ángulo de potencia  $\delta$  siempre es negativo. Por otro lado si se opera como generador  $\delta$ , siempre es positivo. La curva de potencia (Figura 2.9) muestra cómo se comporta la potencia electromagnética en función de  $\delta$ . En el primer cuadrante se tiene la acción generador y en el tercer cuadrante se tiene la acción motor. El máximo valor de potencia en operación motor se presenta cuando  $\delta = -\pi/2$ , siempre y cuando  $R_e = 0$ . Si  $R_e \neq 0$ , el valor máximo de la potencia electromagnética se presenta cuando  $\delta = \phi_Z$  [11].

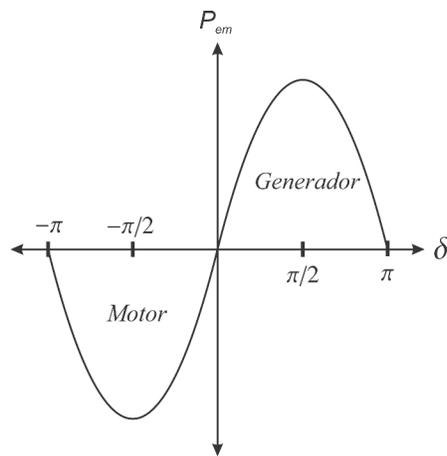


Figura 2.9: Curva de potencia del MSIP.



# Capítulo 3

## Control basado en pasividad

En este capítulo se presenta el análisis y diseño del controlador basado en pasividad para el sistema propuesto, mediante la retroalimentación de la salida pasiva de la dinámica del error de seguimiento exacto (ETEDPOF, por sus siglas en inglés, Exact Tracking Error Dynamics Passive Output Feedback). Un estudio cronológico sobre la evolución de esta técnica de control se ha realizado en [59], la cual muestra el diseño de este controlador en sistemas con características pasivas. Algunas aplicaciones del controlador basado en pasividad por medio del ETEDPOF son realizados en [15], [52], [59].

La metodología de desarrollo del controlador a implementar radica en las bases teóricas estudiadas en [56], [42]. Esta técnica aprovecha las características pasivas del sistema, separando los campos conservativos, disipativos, entradas y energía externa o perturbaciones exógenas; permitiendo diseñar un controlador lineal variante en el tiempo. Para el análisis de estabilidad del sistema se utilizan los conceptos de Lyapunov. La selección de las ganancias del controlador dependerán del criterio de Lyapunov para lograr que el sistema sea asintóticamente exponencialmente estable, bajo cierta condición de acoplamiento.

Como parte inicial se introducen los conceptos de pasividad, disipatividad (véase también en [40], [29], [28]), controlabilidad y planitud diferencial para sistemas multivariable no lineales, las cuales son indispensables para la aplicación de la técnica de control. Posteriormente se realiza la metodología de diseño en forma general del controlador basado en pasividad. Finalizando con el diseño del controlador para el modelo del MSIP en el eje coordenado  $d - q$ , a través de una trayectoria suave de referencia deseada.

## 3.1. Fundamentos teóricos

### 3.1.1. Pasividad y Disipatividad

Un sistema que no genera energía se dice que es pasivo, por lo tanto la propiedad de pasividad para sistemas lineales y no lineales está relacionado con los elementos *que no generan su propia energía*, denominados elementos pasivos. Sea  $\Phi(t)$ , la cual representa la energía del sistema en el tiempo  $t$ , se tiene que:

- Si  $\Phi(t) > 0$ , entonces los elementos contenidos en el sistema consumen energía.
- Si  $\Phi(t) < 0$ , entonces los elementos contenidos en el sistema suministran energía.

La pasividad es una propiedad que definiremos primeramente para un sistema no lineal general invariante en el tiempo no perturbado, expresado por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \quad u \in U, x \in X \\ y &= h(x, u) \quad y \in Y \end{aligned} \quad (3.1)$$

Donde  $f: X \times U \rightarrow X$ , es un mapeo suave de sus argumentos,  $X$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  que representa el espacio de estados,  $U$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^m$  que representa el espacio de entradas de control y  $Y$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^m$  que representa el espacio de funciones de salidas  $h: X \times U \rightarrow Y$ .

Tomando en cuenta el sistema (3.1) se define una función  $s(t) = s(y(t), u(t)): Y \times U \rightarrow \mathbb{R}$ , denominada tasa de suministro, que satisface

$$\int_{t_0}^{t_1} |s(y(t), u(t))| dt < \infty, \forall t$$

Es decir,  $s(\cdot)$  es una función integrable localmente dependiente de la entrada  $u$  y la salida  $y$  del sistema (3.1).

**Definición 3.1.** *Un sistema dinámico (3.1) se dice que es disipativo con respecto a la tasa de suministro  $s(t)$  si existe una función  $\phi: X \rightarrow \mathbb{R}^+$ , denominada como función de almacenamiento, tal que para todo  $x_0 \in X$  y para todas las funciones de entrada  $u \in U$  se cumple la siguiente relación [40].*

$$\phi(x_1) - \phi(x_0) \leq \int_{t_0}^{t_1} |s(u(t), y(t))| dt \quad (3.2)$$

con  $x_0 = x(t_0)$  y  $x_1 = x(t_1)$  La desigualdad (3.2) se conoce como desigualdad de disipación, y se dice que el sistema es *disipativo*. Por otro lado, se tiene que:

- $\phi(\cdot)$  : es la función de almacenamiento; donde  $\phi(x(t))$  representa la energía almacenada por el sistema (3.1) en el tiempo  $t$ .
- $\int_{t_0}^{t_1} s(t) dt$  : representa la energía suministrada al sistema (3.1) por una fuente externa durante un intervalo  $[t_0, t_1]$

Por lo tanto, de acuerdo al sistema (3.1), la energía almacenada  $\phi(x_1)$  en el tiempo  $t_1 \geq t_0$  es, al menos, igual a la suma de la energía almacenada inicial  $\phi(x_0)$  en el tiempo  $t_0$ , mas la energía suministrada por una fuente externa en el intervalo de tiempo  $[t_0, t_1]$ . Si  $\phi$  es diferenciable con respecto al tiempo entonces se tiene lo siguiente:

$$\dot{\phi} \leq s(u(t), y(t))$$

con  $h(x, u)$  como la salida del sistema (3.1). Un sistema no lineal es pasivo cuando este es disipativo con respecto a la función de abastecimiento  $s(u, y) = uy$ , es decir, cuando el sistema cumple con la desigualdad (3.2). Además, cuando (3.2) se vuelve estrictamente una igualdad, el sistema es entonces un sistema sin pérdidas [1].

**Definición 3.2.** *El sistema (3.1) es pasivo si este es disipativo con respecto a la tasa de suministro  $s(y, u) = y^T u$ . El sistema es estrictamente de entrada pasiva si existe una constante  $\epsilon > 0$  tal que el sistema es disipativo con respecto a  $s(y, u) = y^T u - \epsilon u^T u$ . El sistema es estrictamente de salida pasiva si existe una constante  $\delta > 0$  tal que el sistema es disipativo con respecto a  $s(y, u) = y^T u - \epsilon y^T y$ . El sistema es estrictamente de estado pasivo si existe una constante  $\rho > 0$  y una función  $\psi(x)$  semidefinida positiva dependiente del estado  $x$ , denominada razón de disipación del estado, tal que el sistema es disipativo con respecto a  $s(y, u) = y^T u - \rho \psi(x)$  [29].*

**Definición 3.3.** *Con una función de salida debidamente elegida del sistema (3.1), se dice que es disipativo (respectivamente, estrictamente disipativo) con respecto a la función de almacenamiento  $s(y, u)$  si existe una función definida positiva  $\phi$ ,  $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $\phi(0) = 0$ , considerado como una función de almacenamiento, y una función continua  $\phi : X \times U \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\phi(x, u)$  definida positiva para cada  $u \in U$ , tal que, para cualquier  $t_0$  y cualquier  $t_1 > t_0$ , se satisface la siguiente igualdad:*

$$\phi(x(t_1)) - \phi(x(t_0)) \leq \int_{t_0}^{t_1} |s(u(t), y(t)) - \phi(x(t), u(t))| dt \quad (3.3)$$

La función  $\phi$  se considera como la función de razón de disipación. Aplicando la derivada temporal, la desigualdad (3.3) adopta la siguiente forma:

$$\dot{\phi}(x) = s(u, y) - \phi(x, u)$$

### 3.1.2. Estabilidad de Lyapunov

La teoría de Lyapunov introdujo la aproximación más útil para el estudio de la estabilidad en los sistemas no lineales, en el que propone dos métodos para el análisis de la estabilidad (método de linealización y método directo). El método de linealización describe la estabilidad local de los sistemas no-lineales alrededor de un punto de equilibrio a partir de las propiedades de estabilidad de su aproximación lineal. Por otro lado, el método directo no se restringe a un movimiento local, y determina las propiedades de estabilidad del sistema partiendo de la construcción de una función escalar de energía, examinando su variación en el tiempo.

En la actualidad, estos métodos son de gran interés en la teoría de control debido a que el método de linealización es la justificación teórica de la estabilidad en los sistemas lineales mientras que el método directo es una de las herramientas más importantes para el análisis y diseño de sistemas no lineales, por lo que ambos constituyen la Teoría de estabilidad de Lyapunov [59]. La teoría de estabilidad se puede encontrar en la literatura de control de sistemas no lineales, por ejemplo en [28], [29], [57], [40], entre otros. Por lo que el propósito de esta sección no es presentar la demostración de Lyapunov, sino mostrar algunas de las definiciones y conceptos básicos. Por otro lado, el modelo matemático del MSIP presenta un estructura MIMO no lineal, entonces se mencionan solo las definiciones y teoremas del método directo, necesarios para el diseño del controlador.

#### 3.1.2.1. Método directo de Lyapunov

El método directo de Lyapunov es una extensión matemática de las observaciones físicas, es decir, si la energía total de un sistema mecánico (o eléctrico) se disipa de manera continua, entonces dicho sistema, ya sea lineal o no lineal, se estabiliza en un punto de equilibrio, concluyendo que la estabilidad de un sistema se puede determinar con la variación de una sola función escalar.

Las siguientes definiciones y teoremas son parte importante en el estudio de estabilidad en los sistemas y resume de manera general el método directo de Lyapunov

De [57] ( Definición 3.7) sobre funciones definidas o semidefinidas. Una función escalar  $V(x)$  se dice localmente definida positiva si  $V(0) = 0$  y  $V(x) > 0$  para  $x \neq 0$ .

De manera similar,  $V(x)$  es definida negativa si  $-V(x)$  es definida positiva.

Además, si  $V(x)$  es igual a cero para  $x \neq 0$ , se puede decir que la función es semidefinida positiva.

Si  $V(0) = 0$  y  $V(x) \geq 0$  para  $x \neq 0$  se le llama semi-definida positiva; de la misma manera  $V(x)$  es semi-definida negativa, si  $-V(x)$  es semi-definida positiva.

De [57] ( Definición 3.8) Sobre la función de Lyapunov.

$V(x)$  se llama función de Lyapunov para el sistema de la forma (3.1)

- Si en una bola  $B$  que contiene el origen,  $V(x)$  es definida positiva y tiene derivada parcial continua.
- Si la derivada con respecto al tiempo a lo largo de cualquier trayectoria de estado del sistema (2.16) es semi-definida negativa, es decir:

$$\dot{V}(x) = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \leq 0$$

o bien,

$$\dot{V}(x) \leq 0$$

Los siguientes teoremas son usados para el análisis de estabilidad local ó global.

De [57] (Teorema 3.2) sobre la estabilidad local.

Si en una bola  $B$  existe una función escalar continuamente diferenciable  $V(x)$  tal que:

- $V(x)$  sea definida positiva (localmente en  $B$ )
- $\dot{V}(x)$  sea semi-definida negativa (localmente en  $B$ )

Entonces, el punto de equilibrio  $0$  es estable.

Más aún, si la derivada  $\dot{V}(x)$  es definida negativa localmente en  $B$ , es decir,

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ en } B - \{0\}$$

entonces, el punto de equilibrio  $0$  es asintóticamente estable.

De [57] (Teorema 3.3) sobre la estabilidad global.

Supongamos que existe una función escalar  $V$  del estado  $x$  con primera derivada continua tal que:

- $V(x)$  es definida positiva
- $\dot{V}(x)$  es definida negativa
- $V(x) \rightarrow \infty$  como  $\|x\| \rightarrow \infty$

Entonces, el punto de equilibrio en el origen es globalmente asintóticamente estable.

### 3.1.3. Planitud y controlabilidad

En general, un sistema MIMO no lineal se dice que es plano, tal que existe un conjunto de salidas artificiales independientes, de la misma cardinalidad del conjunto de entradas de control, denominado como "salidas planas", las cuales parametrizan diferencialmente completamente los estados del sistema, las entradas de control y las salidas naturales del sistema. Esto significa que todas las variables del sistema se expresan en términos de las salidas planas y un número finitos de sus derivadas con respecto al tiempo. Esta propiedad facilita los cálculos de los estados nominales y trayectorias de las entradas nominales, una vez que las trayectorias de las salidas planas son establecidas, de acuerdo con los objetivos de control deseados del sistema no lineal subyacente. Estas trayectorias son por lo tanto calculadas cuando se sabe que el sistema es plano y las salidas planas tienen un significado físico claro. Mediante este método se puede proponer una trayectoria para la salida plana la cual es compatible con cada una de las variables que conforma la trayectoria deseada. La trayectoria de la salida plana únicamente determina el estado y la trayectoria de la entrada de control para el sistema no lineal [56].

De [14], se dice que un sistema no lineal de la forma  $\dot{x} = f(x, u)$ , con  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  y  $n \geq m$ , es diferencialmente plano, si existe un conjunto de variables  $F = (F_1, \dots, F_m)$  de manera que:

- $F$  y sus derivadas sucesivas en el tiempo  $\dot{F}, \ddot{F}, \dots$  son independientes.
- $F$  es función de  $x, u$  y posiblemente de un número finito de las derivadas en el tiempo de las componentes de  $u$ , es decir  $F = \varphi_0(x, u, \dot{u}, \dots, u^q)$  para un entero  $q$ .
- $x$  y  $u$  se pueden expresar como funciones de las componentes de  $F$  y de un número finito de sus derivadas temporales:  $x = \varphi_1(F, \dot{F}, \dots, F^{(n-1)})$ ,  $u = (F, \dot{F}, \dots, F^{(n)})$ .

Las componentes de  $F$  son diferencialmente independientes. Al conjunto de variables  $F$  con estas propiedades se le denomina salidas planas. En base a lo anterior, al especificarse una curva algebraica para la salida plana  $F^*$ , se determinan de manera única las trayectoria del estado y el comportamiento nominal de las entradas de control:

$$\begin{aligned} x^* &= \varphi_1(F^*, \dot{F}^*, \dots, F^{*(n-1)}) \\ u^* &= (F^*, \dot{F}^*, \dots, F^{*(n)}) \end{aligned}$$

Por lo tanto, una ventaja de la planitud diferencial es, la obtención de una planeación de una trayectoria deseada para el diseño de los controladores. Planitud se relaciona integralmente con el hecho de que el conjunto de trayectorias integrales (soluciones) del sistema están en correspondencia uno a uno, de manera suave, con trayectorias libres (curvas algebraicas) que surge en un espacio de dimensión  $m$ .

En el contexto de sistemas dinámicos lineales, planitud, adopta su más simple relación a la controlabilidad del sistema. Un sistema es plano si, y solo si, es controlable [14]. En otras palabras, planitud y controlabilidad son equivalentes en el contexto de sistemas lineales. La controlabilidad es una propiedad fundamental deseable de los sistemas dinámicos controlados (ya sean continuos, discretos, lineales, no lineales, de dimensión finita o no) [22].

Un sistema de estructura no lineal es localmente accesible en un estado inicial  $x_o$  si la distribución de accesibilidad  $C$  se extiende en un espacio  $n$  [25], donde  $n$  es el rango de  $x$  y  $C$  definida como:

$$C = \{g_1, g_2, \dots, g_m, [g_i, g_j], \dots, [ad_{g_i}^k, g_j], \dots, [f, g_i], \dots, [ad_f^k, g_i]\} \quad (3.4)$$

Los términos  $g_i$  son análogos a los términos  $B$  de la matriz de controlabilidad para sistemas lineales y, los términos  $[f, g_i]$  corresponden a los términos  $AB$  (véase demostración en [20]), así sucesivamente.

If  $f(x) = 0$  entonces  $\dot{x} = \sum_{i=1}^m u_i g_i(x)$  y si en este caso  $C$  tiene un rango  $n$ , entonces el sistema es controlable.

### 3.1.4. Curvas de Bézier

La trayectoria deseada  $F^*$  se puede obtener a través de una curva de Bézier diferenciable al menos  $\gamma_i - 1$  veces ( $1 \leq \gamma_i \leq n$ ) de manera que se satisfaga las condiciones iniciales y finales. Estas curvas son adaptables y suaves, utilizadas para interpolar, aproximar, ajustar curvas y representar objetos. En este caso, se utilizarán para establecer las señales de referencia o trayectoria deseada  $F^*$ , que mediante un controlador retroalimentado deberán de seguir las salidas planas.

La curva de Bézier une dos puntos mediante una curva suave en lugar de unirlos por una recta. En la Figura 3.1 se muestra un ejemplo de una curva de Bézier.

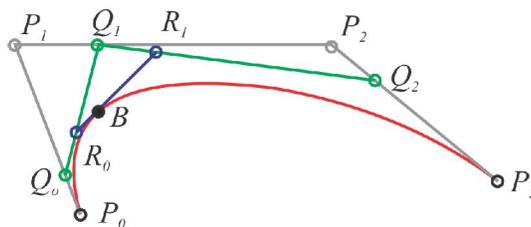


Figura 3.1: Curva de Bézier.

Los elementos esenciales de una curva de Bézier son: los puntos  $P_0, P_1, P_2$  y  $P_3$  a los que se denomina puntos de anclaje o nodos. A la figura que forman esos nodos se le llama polígono de

control. La forma de la curva se define mediante unos puntos invisibles  $Q_0$ ,  $Q_1$  y  $Q_2$  llamados puntos de control.

El grado de la curva de Bézier depende del número de lados del polígono de control. Así que, para la Figura 3.1, el grado de la curva de Bézier es de tercer orden. Entre más lados tenga el polígono de control, más suave será la curva de Bézier.

Un tipo de curva de Bézier se muestra en la siguiente expresión [61]:

$$P_B(t) = \left\{ \begin{array}{ll} P_{ini} & t < t_{ini} \\ \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{n!}{i!(n-i)!} \left( \frac{t_i-t}{t_i-t_{ini}} \right)^{n-i} \left( \frac{t-t_{ini}}{t_i-t_{ini}} \right)^i P_i & t_{ini} < t < t_{fin} \\ P_{fin} & t > t_{fin} \end{array} \right\}$$

donde  $P_{ini}$ ,  $P_{fin}$  son los valores inicial y final, respectivamente;  $t_{ini}$  y  $t_{fin}$  son el tiempo inicial y final, respectivamente y,  $n$  es el orden de la curva. Este tipo de curva está diseñada para el problema particular del control, la cual llevará al sistema dinámico de un estado inicial en reposo a otro estado final en reposo.

## 3.2. Control por ETEDPOF

Este método parte de la construcción de la dinámica del error de seguimiento por medio de un modelo de referencia no perturbado, la cual utiliza como variable de retroalimentación la salida pasiva del error de seguimiento, con ello se diseña un controlador para regulación y seguimiento del sistema pasivo. La metodología del controlador basado en pasividad por retroalimentación de la salida pasiva moldea la energía en lazo cerrado y aumenta el amortiguamiento en lazo cerrado del sistema [42].

Con la finalidad de representar el comportamiento de un sistema con estructura pasiva. Se considera un sistema lineal, controlable e invariante en el tiempo, la cual presenta la estructura siguiente,

$$A\dot{x} = Jx - Rx + Bu \quad (3.5)$$

donde,

- $x$ : Representa los estados del sistema  $\in \mathbb{R}^n$ .
- $u$ : Es la entrada de control que depende de la trayectoria de referencia y del error de la salida pasiva variante en el tiempo  $\in \mathbb{R}^m$ .
- $A$ : Es una matriz  $n \times n$  de coeficientes constantes simétrica y definida positiva.

- $J$ : Es una matriz  $n \times n$  antisimétrica que representa la característica conservativa del sistema.
- $R$ : Es una matriz  $n \times n$  simétrica, semidefinida positiva y constante que representa la característica disipativa del sistema.
- $B$ : Es una matriz  $n \times m$  de coeficientes constantes que representa los canales de entrada de control al sistema o adquisición de energía al sistema.

La controlabilidad del sistema garantiza la posibilidad de seguimiento de un estado deseado mediante una ley de control por retroalimentación de la salida pasiva. De este hecho, se toma a  $x^*$  como la variable que representa la trayectoria del vector estado deseado y  $u^*$  como el vector de entrada deseado. Sustituyendo  $x^*$  y  $u^*$  en la ecuación (3.5), se muestra la estructura siguiente:

$$A\dot{x}^* = Jx^* - Rx^* + Bu^* \quad (3.6)$$

La ecuación anterior es una copia exacta del sistema que exhibe un comportamiento deseado apartir de las referencias del vector de estado y el vector de entrada deseado. Ahora, se define la dinámica del error exacto, obtenido de la sustracción de (3.5) y (3.6).

$$A\dot{e} = Je - Re + Be_u \quad (3.7)$$

Donde  $e = x - x^*$ ;  $e_u = u - u^*$ . Se toma al criterio de estabilidad de Lyapunov, para obtener una ley de control que hace que el sistema sea asintóticamente estable en lazo cerrado. Por ello, se considera la siguiente función (candidata de Lyapunov) de energía del error de seguimiento como una función estrictamente positiva, tal que

$$V(e) = e^T Ae > 0 \quad (3.8)$$

Aplicando la derivada temporal a la función  $V(e)$ , y sustituyendo la ecuación (3.7), se obtiene el resultado siguiente.

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &= e^T A\dot{e} \\ &= e^T (Je - Re + Be_u) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Al realizar la operación de la ecuación anterior, nótese que el término  $e^T Je$ , representa la parte conservativa del sistema, y debido a la propiedad de antisimetría de  $J$ ,  $e^T Je = 0$ . Por lo tanto la ecuación (3.9) se reduce a,

$$\dot{V}(e) = -e^T Re + e^T Be_u \quad (3.10)$$

Siguiendo el criterio de Lyapunov, se tiene que  $\dot{V}(e) < 0$ , entonces se impone una dinámica en  $e_u$ , que obliga a la derivada temporal  $\dot{V}(e)$  para que sea definida negativa (en [56] se demuestra que  $e_u = -\gamma B^T e$ ). Con la selección de  $e_u$  se inyecta amortiguamiento al sistema, la cual se activa solamente cuando el error de seguimiento  $e = x - x^*$  es diferente de cero. Cuando el error de seguimiento es nulo, esto coincide con la dinámica del sistema original. Por lo tanto se tiene que,

$$\dot{V}(e) = -e^T (R + B\gamma B^T) e < 0 \quad (3.11)$$

para tener una convergencia asintótica  $\dot{V}(e)$  debe ser  $< 0$  dada que  $B\gamma B^T$ ,

$$R + B\gamma B^T > 0 \quad (3.12)$$

Conforme a la teoría de Lyapunov el error  $e$  converge asintóticamente a cero y, por lo tanto  $x$  es casi idéntica a la referencia  $x^*$ .

### 3.2.1. Casos especiales

Cuando la sistema de ecuaciones presenta una estructura pasiva, y la matriz conservativa  $J$  contiene coeficientes constantes, el diseño del controlador y el análisis de estabilidad es como se realizó en la sección 3.2.

En otro caso, cuando los sistemas no lineales presentan una estructura pasiva, la matriz  $J$  depende de las variables del vector de entrada,  $J(u)$ , o con las variables del vector de estado,  $J(x)$ . Esto afecta a la escogencia de la ganancia del controlador, que se rige bajo cierta condición de acoplamiento.

Si la matriz  $J$  depende de la entrada de control  $u$ , tal que  $J(u) = J_0 + \sum_{i=1}^k J_i(u)$ , con  $i = 1, \dots, k$  donde  $k$  es el número de matrices en la que se descompone la matriz  $J_i(u)$ ; siempre y cuando el conjunto  $J(u) + J^T(u) = 0$  (propiedad antisimetría). Análogamente para el caso de que  $J$  dependa de  $x$ ,  $J(x) + J^T(x) = 0$ . Por otro lado,  $R = \sum_{i=1}^k R_i$  tal que,  $R_i$  es una matriz simétrica semi-definida positiva.

A continuación, se demuestra la estabilidad de la matriz  $J$  cuando depende de la entrada de control,  $J(u)$ , entonces la ecuación (3.5) muestra la siguiente estructura,

$$A\dot{x} = J(u)x - Rx + Bu \quad (3.13)$$

Al evaluar los vectores de referencia  $x^*$  y  $u^*$  se tiene que,

$$Ax^* = J(u^*)x^* - Rx^* + Bu^* \quad (3.14)$$

Siguiendo con la metodología, se obtiene la dinámica del error de seguimiento, a partir de la resta miembro a miembro de las ecuaciones 3.13 y 3.14.

$$A\dot{e} = J(u)x - J(u^*)x^* - Re + Be_u \quad (3.15)$$

Sumando y restando  $J(u)x^*$ , y agrupando términos se tiene lo siguiente.

$$A\dot{e} = J(u)e + (J(u) - J(u^*))x^* - Re + Be_u \quad (3.16)$$

Por otro lado, se hace una aproximación por serie de Taylor del siguiente término,

$$J(u) - J(u^*) = \left. \frac{\partial J(u)}{\partial x} \right|_{u=u^*} (u - u^*) = \frac{\partial J(u^*)}{\partial x} e_u \quad (3.17)$$

Sustituyendo la igualdad anterior en (3.16),

$$A\dot{e} = J(u)e + \frac{\partial J(u^*)}{\partial x} x^* e_u - Re + Be_u = J(u)e + \left[ \frac{\partial J(u^*)}{\partial x} x^* + B \right] e_u - Re \quad (3.18)$$

Donde  $B^* = \frac{\partial J(u^*)}{\partial x} x^* + B$ , entonces la ecuacion anterior se reescribe como,

$$A\dot{e} = J(u)e - Re + B^* e_u \quad (3.19)$$

Realizando el mismo criterio de estabilidad de Lyapunov cuando  $J$  es constante, se verifica que la condición de acoplamiento

$$R + B^* \gamma B^{*T} > 0 \quad (3.20)$$

entonces  $e$  converge semiglobalmente asintóticamente hacia el origen, ya que en la práctica, la acción de control se puede saturar. Algunos ejemplos sobre la aplicación de este caso, son mostrados en [16], [59],

Por otro lado, cuando se tiene variables del estado  $x$  en la matriz  $J$ , tal que  $J(x)$ , entonces la demostración de estabilidad, se realiza tal como muestra en la siguiente sección.

### 3.3. Diseño del controlador basado en pasividad por retroalimentación de la salida pasiva

En este apartado se desarrolla el diseño del controlador basado en pasividad por retroalimentación de la salida pasiva para el seguimiento de velocidad del MSIP. Partiendo del modelo  $d - q$  obtenido de las ecuaciones (A.81), (A.82) y (A.85), se calculan los voltajes de entrada  $u = \begin{bmatrix} u_d & u_q \end{bmatrix}^T$  y las corrientes de entrada  $i = \begin{bmatrix} i_d & i_q \end{bmatrix}^T$  en el eje coordenado  $d - q$ . Para el diseño del controlador se supone conocido a la velocidad angular y el par de carga, donde posteriormente se demuestra la estabilidad completa. Las trayectorias de referencias se calculan a través del uso de la propiedad de planitud diferencial del modelo  $d - q$  perturbado, por lo que el parámetro de par de carga se estima con precisión, y el error de estimación converge asintóticamente a cero. Para comenzar con el diseño del controlador por retroalimentación de la salida pasiva, se considera el siguiente modelo en el eje coordenado  $d - q$ :

$$\begin{aligned} L \frac{di_d}{dt} &= -r_e i_d + L i_q n_p \omega + u_d \\ L \frac{di_q}{dt} &= -r_e i_q - L i_d n_p \omega - K_m \omega + u_q \\ \frac{2}{3} J_{mec} \frac{d\omega}{dt} &= K_m i_q - \frac{2}{3} B \omega - \frac{2}{3} \tau_L \end{aligned} \quad (3.21)$$

Representado el sistema de ecuaciones en su forma matricial (3.21), y reescribiendo en su forma pasiva [45], se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} A\dot{x} &= [J(y) - R]x + Bu - N\eta, \quad x \in R^3, \quad u \in R^2 \\ y_1 &= i_d \\ y_2 &= i_q \end{aligned} \quad (3.22)$$

tal que el vector de estados es:

$$x^T(t) = (i_d, i_q, \omega)$$

donde,

$$\begin{aligned} A &= \text{diag} \left( L \quad L \quad \frac{2}{3}J \right); \quad N = \text{diag} \left( 1 \quad 1 \quad 1 \right); \\ J(y) &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K_m \\ 0 & K_m & 0 \end{pmatrix}}_{:= J_0} + y \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & n_p L & 0 \\ -n_p L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{:= yJ_1} \end{aligned}$$

$$R = \begin{pmatrix} r_e & 0 & 0 \\ 0 & r_e & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}B \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{3}\tau_L \end{pmatrix}$$

$J_0$  y  $J_1$  son matrices constantes y antisimétricas,  $y$  es un escalar que representa la salida del sistema, además de ser una de las variables del vector de estado  $x$ ,  $R$  es una matriz simétrica semi-definida positiva, y  $B$  es una matriz constante de las entradas de control.

Para comprobar que el sistema promedio no lineal del MSIP dado en (3.21) es pasivo, se hace uso de las definiciones de pasividad y disipatividad. Por lo que se obtiene la siguiente función de energía que almacena el sistema, dado por:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}Li_d^2 + \frac{1}{2}Li_q^2 + \frac{1}{3}J_{mec}\omega_m^2 \quad (3.23)$$

cuya primera derivada con respecto al tiempo, es dada por:

$$\dot{\Phi}(x) = L\frac{di_d}{dt}i_d + L\frac{di_q}{dt}i_q + \frac{2}{3}J_{mec}\frac{d\omega_m}{dt}\omega_m \quad (3.24)$$

Sustituyendo cada una de las ecuaciones dinámicas dadas en (3.21), y después de algunas operaciones matemáticas se demuestra que lo siguiente:

$$\dot{\Phi}(x) = i_d u_d + i_q u_q - r_e (i_d^2 + i_q^2) - \frac{2}{3}B\omega - \frac{2}{3}\tau_L \leq i_d u_d + i_q u_q = uy \quad (3.25)$$

Así, se verifica que el sistema (3.21) es disipativo y se concluye que el sistema es *pasivo-disipativo*, debido a que la potencia de salida es menor o igual a la potencia de entrada [40].

### 3.3.1. Controlador multivariable promedio por retroalimentación de la salida pasiva del MSIP

Sea  $u^* \in R^2$  la cual denota la trayectoria de entrada nominal correspondiente a la trayectoria del vector de estado nominal,  $x^*(t) \in R^3$ . Se construye la dinámica de referencia del sistema, la cual satisface la siguiente expresión:

$$A\dot{x}^* = [J(y^*) - R]x^* + Bu^* - N\eta^* \quad (3.26)$$

Donde  $y$  es una de las variables del estado  $x$ , expresado como  $y = l_i^T x$ , tal que  $l_i^T$  es un vector renglon de 0's excepto por 1 en la  $i$ -ésima entrada. Entonces  $y = l_3^T x$ , ya que depende solo del tercer estado  $\omega$ . Mientras que el vector renglon  $(\eta^*)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\hat{\tau}_L \end{pmatrix}$  contiene el par de carga estimado.

Se construye la dinámica del error de seguimiento mediante la resta miembro a miembro de (3.22) y (3.26), tal como sigue:

$$A\dot{x} - A\dot{x}^* = J(y)x - Rx + Bu - N\eta - J(y^*)x^* + Rx^* - Bu^* + N\eta^* \quad (3.27)$$

Se define el error de seguimiento  $e = x - x^*$ , el error de la entrada de control  $e_u = u - u^*$ , y el error de la entrada de la perturbación  $e_\eta = \eta - \eta^*$  y tomando en cuenta que  $J(y) = J_0 + yJ_1$ , entonces:

$$A\dot{e} = (J_0 + yJ_1)x - Rx + Bu - N\eta - (J_0 + y^*J_1)x^* + Rx^* - Bu^* + N\eta^*$$

Reduciendo y simplificando términos, se tiene que

$$A\dot{e} = J_0e + yJ_1x - y^*J_1x^* - Re + Be_u - Ne_\eta \quad (3.28)$$

Con el fin de seguir reduciendo la ecuación anterior, se agrega un término cero ( $yJ_1x^* - yJ_1x^*$ ), y se cumple lo siguiente

$$\begin{aligned} A\dot{e} &= J_0e + yJ_1x - y^*J_1x^* + yJ_1x^* - yJ_1x^* - Re + Be_u - Ne_\eta \\ &= J_0e + yJ_1e + J_1x^*(y - y^*) - Re + Be_u - Ne_\eta \\ &= J(y)e - Re + Be_u + J_1x^*l_3e - Ne_\eta \end{aligned} \quad (3.29)$$

Definiendo a  $M_3$  como una matriz de  $3 \times 3$ , dada por:

$$\begin{aligned} M_3 = J_1x^*l_3 &= \begin{pmatrix} 0 & n_pL & 0 \\ -n_pL & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d^* \\ i_q^* \\ \omega^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= n_pL \begin{pmatrix} 0 & 0 & i_q^* \\ 0 & 0 & -i_d^* \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Despues la matriz  $M_3$  se descompone en dos matrices mediante la utilización del algebra de matrices, y así, se consigue una matriz simétrica y una matriz antisimétrica, teniendo como resultado:

$$M_3 = \frac{1}{2}n_pL \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & i_q^* \\ 0 & 0 & -i_d^* \\ -i_d^* & i_q^* & 0 \end{pmatrix}}_{W_3} + \frac{1}{2}n_pL \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & i_q^* \\ 0 & 0 & -i_d^* \\ i_d^* & -i_q^* & 0 \end{pmatrix}}_{S_3}$$

Posteriormente  $W_3$  se suma a la matriz conservativa  $J(y)$ , y  $S_3$  se suma a la parte disipativa  $R$ . Con esta operación se consigue la ecuación de la dinámica del error de seguimiento, expresada como:

$$A\dot{e} = J^*(y)e - R^*e + Be_u - Ne_\eta \quad (3.30)$$

donde  $J^*(y) = J(y) + M_3$  y  $R^* = R + S_3$ , esto sin perder la propiedad de simetría y antisimetría que se requiere para aplicar el método por retroalimentación de la salida pasiva. Por otro lado, se asume que el par de carga estimado  $\hat{\tau}_L$  es aproximadamente igual al valor de  $\tau_L$ , es decir, el valor de  $e_\eta$ , converge asintóticamente exponencialmente a cero, es decir,  $e_\eta = 0$ . Por lo tanto, se tiene que la dinámica del error de seguimiento, se representa como:

$$A\dot{e} = J^*(y)e - R^*e + Be_u \quad (3.31)$$

Si se considera a  $R^* > 0$ , es decir, definida positiva, entonces se satisface la siguiente condición,

$$R^* = \begin{pmatrix} r_e & 0 & -\frac{1}{2}n_p Li_q^* \\ 0 & r_e & \frac{1}{2}n_p Li_d^* \\ -\frac{1}{2}n_p Li_q^* & \frac{1}{2}n_p Li_d^* & \frac{2}{3}B \end{pmatrix} > 0 \quad (3.32)$$

Haciendo uso del criterio del Sylvester, se verifica que  $R^* > 0$ , es decir, es una matriz semidefinida positiva. Así, se debe cumplir que:

$$\det |R^*| = \frac{2}{3}r_e B - \frac{1}{4}n_p^2 L^2 [(i_d^*)^2 + (i_q^*)^2] > 0 \quad (3.33)$$

Siguiendo con la metodología de diseño del controlador, mediante Lyapunov (sección anterior). Se propone a  $e_u$  como  $e_u = -\Gamma B^T e$ , donde

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} > 0, \quad \gamma_1, \gamma_2 > 0$$

Siendo  $\Gamma$  una matriz definida positiva, tal que

$$\begin{pmatrix} u_d \\ u_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_d^* \\ u_q^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d - i_d^* \\ i_q - i_q^* \\ \omega - \omega_m^* \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

De acuerdo a la función candidata de Lyapunov, se tiene que

$$\dot{V}(e) = -e^T R^* e - e^T B \Gamma B^T e \quad (3.35)$$

$$= -e^T [R^* + B \Gamma B^T] e \quad (3.36)$$

Se define a la matriz  $R_d = R^* + B \Gamma B^T > 0$ , como una matriz definida positiva, tal que.

$$R_d = R^* + B\Gamma B^T = \begin{pmatrix} r_e + \gamma_1 & 0 & \frac{1}{2}n_p Li_q^* \\ 0 & r_e + \gamma_2 & -\frac{1}{2}n_p Li_d^* \\ \frac{1}{2}n_p Li_q^* & -\frac{1}{2}n_p Li_d^* & \frac{2}{3}B \end{pmatrix} > 0 \quad (3.37)$$

Obteniendo el determinante de  $R_d$ , se satisface la siguiente condición

$$(r_e + \gamma_1)(r_e + \gamma_2) \frac{2}{3}B - \frac{1}{4}n_p^2 L^2 \left[ (r_e + \gamma_1)(i_d^*)^2 + (r_e + \gamma_2)(i_q^*)^2 \right] > 0 \quad (3.38)$$

Considerando a  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma > 0$  entonces la expresión anterior queda de la siguiente forma

$$\frac{2}{3}(r_e + \gamma)B - \frac{1}{4}n_p^2 L^2 \left[ (i_d^*)^2 + (i_q^*)^2 \right] > 0 \quad (3.39)$$

Claramente se observa que con la escogencia positiva de  $\gamma$ , se inyecta amortiguamiento virtual, causando la estabilidad asintótica del sistema.

### 3.3.2. Análisis de estabilidad en lazo cerrado

Anteriormente se considero al error de estimación igual a cero ( $e_\tau = 0$ ), esto para no afectar el análisis del método directo de Lyapunov. A continuación, se hace el análisis para  $e_\tau \neq 0$ , esto para demostrar la estabilidad en lazo cerrado. Partiendo del criterio de estabilidad de Lyapunov obtenido en (3.36) e incorporando la dinámica del error de estimación del parámetro de par de carga, se tiene la siguiente expresión:

$$\dot{V}(e) = -e^T R_d e - e^T N e_\tau < 0 \quad (3.40)$$

Mediante el enfoque de estabilidad de entrada-estado, se considera a  $e_\tau$  como una entrada de perturbación y  $e$  como un estado, tal que  $e \rightarrow 0$  siempre y cuando  $e_\tau \rightarrow 0$ , entonces se dice que es un punto de equilibrio globalmente estable. Para ello, se suma un cero y se hace la siguiente consideración:

$$\dot{V}(e) = -(1 - \phi)e^T R_d e - \phi e^T R_d e - e^T N e_\tau < 0, \quad 0 < \phi < 1 \quad (3.41)$$

Se cumple que  $-(1 - \phi)e^T R_d e < 0$ , siempre y cuando  $\phi e^T R_d e \geq e^T N e_\tau$ . Utilizando la desigualdad Young ( $ab \leq \frac{\varepsilon}{p}|a|^p + \frac{1}{q\varepsilon}|b|^q$ ) y seleccionando a  $p = q = 2$  y  $\varepsilon = 2\lambda$ , entonces la desigualdad es como sigue:

$$e^T N e_\tau \leq \lambda |e^T|^2 + \frac{1}{4\lambda} |N e_\tau|^2 \quad (3.42)$$

Esto se hace con la finalidad de desacoplar el término  $e^T N e_\tau$  e incorporar la ganancia del observador  $\lambda$ , por lo tanto:

$$\phi e^T R_d e \geq \lambda |e^T|^2 + \frac{1}{4\lambda} |N e_\tau|^2 \geq e^T N e_\tau \quad (3.43)$$

Dada la desigualdad  $\phi e^T \gamma_{\max}(R_d) e \geq \phi e^T \gamma(R_d) e \geq \phi e^T \gamma_{\min}(R_d) e$  se puede encontrar una cota superior mediante la escogencia de las ganancias del controlador y del observador, y así asegurar la estabilidad; se tiene entonces que:

$$\phi e^T \gamma_{\max}(R_d) e \geq \lambda |e^T|^2 + \frac{1}{4\lambda} |N e_\tau|^2 \quad (3.44)$$

$$\phi \gamma_{\max}(R_d) |e^T|^2 \geq \lambda |e^T|^2 + \frac{1}{4\lambda} |N e_\tau|^2 \quad (3.45)$$

Despejando y acomodando términos, la desigualdad anterior queda de la siguiente manera:

$$|e^T| \geq \frac{|N| |e_\tau|}{2\sqrt{\lambda(\phi \gamma_{\max}(R_d) - \lambda)}}, \quad \lambda > 0 \quad \text{y} \quad \phi \gamma_{\max}(R_d) > \lambda$$

De ahí, se concluye que el error de seguimiento es exponencialmente estable a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ , siempre que el error del estado sea mayor o igual al error de estimación.

### 3.4. Planeación de las trayectorias de referencia

A partir de la leyes de control obtenidas en (3.34), se generan los voltajes y corrientes de referencia para el MSIP, tal que  $u^{*T}(t) = [u_d^*(t), u_q^*(t)]$  y  $i^{*T}(t) = [i_d^*(t), i_q^*(t)]$ . La determinación de las trayectorias de referencia para  $u^{*T}(t)$  e  $i^{*T}(t)$ , se basan en la propiedad de la planitud diferencial del sistema, de tal manera que el modelo  $d-q$  dado en (3.21), es diferencialmente plano con salidas planas  $i_d(t)$  y  $\omega(t)$  (veáse [10] y [18]). Calculando las trayectorias de referencia deseadas para el controlador, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} i_q^*(t) &= \frac{2}{3} \left( \frac{J_{mec}}{K_m} \dot{\omega}^*(t) + \frac{B}{K_m} \omega^*(t) + \frac{\tau_L}{K_m} \right) \\ u_q^*(t) &= \frac{2}{3} \frac{L J_{mec}}{K_m} \ddot{\omega}^*(t) + \frac{2}{3} \left( \frac{L B}{K_m} + \frac{J_{mec} r_e}{K_m} \right) \dot{\omega}^*(t) + \left( \frac{2}{3} \frac{r_e B}{K_m} + n_p L i_d^* + K_m \right) \omega^*(t) + \frac{2}{3} \frac{r_e}{K_m} \hat{\tau}_L \\ u_d^*(t) &= L \frac{di_d^*(t)}{dt} + r_e i_d^* - \frac{2}{3} \omega^*(t) L n_p \left( \frac{J_{mec}}{K_m} \dot{\omega}^*(t) + \frac{B}{K_m} \omega^*(t) + \frac{\hat{\tau}_L}{K_m} \right) \end{aligned} \quad (3.46)$$

Las trayectorias obtenidas anteriormente están en función de las trayectorias de referencia de las salidas planas, y de sus derivadas temporales sucesivas. Las salidas planas de referencia deseadas son:  $\omega^*(t)$  e  $i_d^*(t)$ . Para operar el MSIP a bajas velocidades y optimizar el par de carga, se propone una corriente de cuadratura nula ( $i_q^*(t) = 0$ ) [7], y para la trayectoria de referencia en velocidad se obtiene a través de un polinomio de Beziér definida de la siguiente forma:

Sea  $z$  que denota la cantidad,  $z = \frac{t-t_{ini}}{t_{fin}-t_{ini}}$

$$\omega^*(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \bar{\omega}_{ini} & \forall t < t_{ini} \\ \bar{\omega}_{fin} & \forall t > t_{fin} \\ \bar{\omega}_{ini} + p(z)(\bar{\omega}_{fin} - \bar{\omega}_{ini}) & \forall t_{ini} \leq t \leq t_{fin} \end{array} \right\} \quad (3.47)$$

con  $p(z) = z^5(252 - 1050z + 1800z^2 - 1575z^3 + 700z^4 - 126z^5)$ (veáse [4] y [15]).

# Capítulo 4

## Observadores

Este capítulo aborda la teoría, análisis y diseño de observadores lineales para la estimación de las variables de posición, velocidad y del parámetro de par de carga del MSIP. En primer lugar se trata la teoría de observadores de estados de orden completo y de orden reducido para sistemas lineales de una entrada y una salida. Para el caso de sistemas no lineales linealizables en forma exacta o diferencialmente planos de más de una entrada y más de una salida, se diseñan observadores GPI u observadores lineales de estado extendido [54] y [36], esto para diseñar el algoritmo de estimación de posición angular del MSIP basado en la estimación de las funciones de FCEM generada en los devanados del estator del MSIP [2]. Una vez obtenidos los valores estimados de la FCEM y haciendo manipulaciones algebraicas se obtienen las funciones estimadas seno y coseno, las cuales sirven como entradas al observador basado en PLL, que calcula los valores de posición y velocidad angular. Este observador basado en PLL elimina el ruido acústico y le da una mayor robustez al sistema en lazo cerrado [47]. Por otra parte, se diseña el observador de par constante desconocido, pero acotado, a partir de la ecuación mecánica del motor en el eje de referencia  $d - q$ . Donde la variable de entrada de control del observador es la corriente de cuadratura  $u_1 = i_q$ , mientras que la variable de salida es la velocidad angular estimada  $y_1 = \hat{\omega}$ .

### 4.1. Observadores de estado

#### 4.1.1. Observador de orden completo

Partiendo de la representación de espacio de estados de un sistema invariante en el tiempo:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde  $x$  es el vector de estado,  $u$  es el vector de entrada de control y  $y$  es el vector de salida tal que.  $x$ ,  $u$  e  $y$  son funciones dependientes del tiempo.  $A$  es una matriz cuadrada  $n \times n$  y  $B$  es una matriz  $n \times m$  de coeficientes constantes y.  $C$  es una matriz  $k \times n$  donde  $k$  es el número de salidas.

El diseño de un observador lineal Luenberger en el espacio de estados se calcula mediante la copia del sistema (4.1) más el término de error de estimación de la salida multiplicado por el vector de ganancia del observador, de ahí se tiene lo siguiente (véase a detalle en [41]):

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x}) \quad (4.2)$$

donde  $K$  es la ganancia del observador. El error de estimación está dado como:  $\tilde{x} = x - \hat{x}$ , el cual se obtiene de la resta miembro a miembro de (4.1) y (4.2), tal que se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = (A - KC)\tilde{x} = F\tilde{x}$$

El error de estimación se aproxima asintóticamente a cero cuando el tiempo  $t$  tiende a infinito, siempre que los eigenvalores de la matriz de ganancia (polos del sistema) sean ubicados en el semi-plano izquierdo del plano complejo [37]. Las ganancias del observador  $K$ , se calcula mediante la técnica de ubicación de polos [39]. El diseño de observadores Luenberger, en donde los estados medidos son también estimados se les llama observadores de orden completo, mientras que cuando los estados medidos no son estimados se les llama observadores de orden reducido [41].

### 4.1.2. Observador de orden reducido

Para el diseño de observadores de orden reducido se considera el sistema lineal, expresado en su forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u \quad (4.3)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \quad (4.4)$$

Donde  $x_1 \in R^{n_1}$  y  $x_2 \in R^{n_2}$ , tal que  $n_1 + n_2 = n$ . Los elementos en las matrices  $A$  y  $b$  son particionados correspondientemente a estas dimensiones. Considere que el par de matrices  $C$  y  $A$  son observables [41]. Bajo estas consideraciones se hace el diseño de un Observador de Orden Reducido, la cual solamente reconstruye los estados no medidos (por ejemplo  $x_2$ ) con un observador  $n_2$  dimensional, en lugar de un observador de orden completo.

La ecuación que describe el estado  $x_2$  está dado por:

$$\dot{x}_2 = A_{21}y + A_{22}x_2 + b_2u \quad (4.5)$$

Por otro lado la ecuación (4.3) se reescribe de la siguiente forma:

$$\dot{y} = A_{11}y + A_{12}x_2 + b_1u \quad (4.6)$$

Despejando términos se tiene la siguiente expresión:

$$A_{12}x_2 = \dot{y} - A_{11}y - b_1u \quad (4.7)$$

Como una ecuación de mediciones virtuales para  $x_2$ , obtenido a través de la medición de  $x_1$ . Se tiene que evitar tomar derivadas con respecto al tiempo sobre  $y$ , como se muestra en la ecuación anterior, por lo tanto, se toma a  $z = A_{12}x_2$ , como una medición extra. Haciendo la copia de la ecuación (4.5), se propone el siguiente observador para  $x_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}_2}{dt} &= A_{21}y + A_{22}\hat{x}_2 + b_2u + l_2(z - \hat{z}) \\ z &= A_{12}x_2 = \dot{y} - A_{11}y - b_1u \\ \hat{z} &= A_{12}\hat{x}_2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Nótese que el error de estimación  $e_2 = x_2 - \hat{x}_2$  es obtenido de la resta entre término y término, de las siguientes dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dt} &= A_{21}y + A_{22}x_2 + b_2u \\ \frac{d\hat{x}_2}{dt} &= A_{21}y + A_{22}\hat{x}_2 + b_2u + l_2A_{12}(x_2 - \hat{x}_2) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Teniendo como resultado:

$$\dot{e}_2 = (A_{22} - l_2A_{12})e_2 \quad (4.10)$$

La propiedad de convergencia asintótica deseada de  $e_2$  a cero y, la existencia de un vector de inyección  $n_2$ -dimensional  $l_2$ . se establece mediante la determinación de la observabilidad del par de matrices  $(A_{22} - l_2A_{12})$ .

Con el fin de obtener una expresión viable para el observador, evitando las derivadas de la salida del sistema,  $y$ , se sustituye el término  $A_{12}x_2$ , por su expresión representada en la ecuación (4.7), en la ecuación (4.9), tal que se tiene las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}_2}{dt} &= A_{21}y + A_{22}\hat{x}_2 + b_2u + l_2(A_{12}x_2 - A_{12}\hat{x}_2) \\ &= A_{21}y + A_{22}\hat{x}_2 + b_2u + l_2(\dot{y} - A_{11}y - b_1u - A_{12}\hat{x}_2) \\ &= (A_{21} - l_2A_{11})y + (b_2 - l_2b_1)u + (A_{22} - l_2A_{12})\hat{x}_2 + l_2\dot{y} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Haciendo un cambio de variable, se define a  $\sigma_2 = \hat{x}_2 - l_2y$  y restando  $-l_2y$  a  $\hat{x}_2$ , se obtiene.

$$\dot{\sigma}_2 = (A_{21} - l_2A_{11})y + (b_2 - l_2b_1)u + (A_{22} - l_2A_{12})\sigma_2 + (A_{22} - l_2A_{12})l_2y \quad (4.12)$$

$$\hat{x}_2 = \sigma_2 + l_2y \quad (4.13)$$

## 4.2. Observador GPI extendido de alta ganancia

Los observadores Proporcional Integral Generalizado (GPI, por sus siglas en inglés) son observadores de alta ganancia que incluyen de manera natural y embebida, un modelo polinomial variante en el tiempo de actualización automática, para las perturbaciones no lineales dependientes del estado y de aquellas perturbaciones exógenas sin estructura alguna [55], además de estimar la variable de salida del sistema.

Sin embargo, el desarrollo de los observadores GPI constituyen un método aproximado, ya que está sujeto al comportamiento del error de reconstrucción de las variables de estado y de las perturbaciones. La dinámica del sistema perturbado se ajusta mediante ganancias suficientemente altas, lo cual hace que las estimaciones sean sensibles al ruido de la planta y a la medición de las variables de retroalimentación, generándose sobrepicos ante cualquier variación. Esto provoca que el observador deje de estimar correctamente, debido a los efectos negativos al utilizar ganancias altas. La utilización de filtros, funciones de saturación o ganancias apropiadas atenúan el fenómeno del pico impulsivo.

La estimación en línea de los estados y perturbaciones, se combina con una ley de control lineal, que cancela efectivamente las perturbaciones y no linealidades, imponiendo una dinámica deseada en lazo cerrado.

De acuerdo a la teoría propuesta en [55], se considera un sistema no lineal,  $n$ -dimensional, perturbado, de una entrada y una salida, dada por

$$y^{(n)}(t) = \psi(t, y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) + \phi(t, y)u + \zeta(t) \quad (4.14)$$

Donde  $\psi(\cdot)$  agrupa la dinámica lineal no modelada o desconocida (perturbación endógena) y  $\zeta(t)$  representa la perturbación externa (exógena). Desde el enfoque de rechazo activo de perturbaciones [54], estas dos funciones se consolidan en un solo término y se maneja como una señal de carácter desconocido pero acotado, teniendo como resultado la siguiente expresión:

$$y^n = \xi(t) + \phi(t, y)u \quad (4.15)$$

Tal que  $\xi(t)$  es  $m$ -diferenciable y uniformemente acotado, es decir  $|\xi(t)| \leq K$ , con  $K$  real finito. El sistema es controlable (para  $\phi(t, y) \neq 0$ ) siendo catalogado como un sistema diferencialmente plano [53].

Se propone a continuación un observador estilo Luenberger denominado Observador GPI extendido. El esquema de observación consiste de una copia de la planta lineal simplificada y aumentada, es decir, los términos lineales están separados de los términos desconocidos a estimar; algunas veces conformado por términos no lineales. Se utiliza un modelo polinomial aproximado más la suma de las inyecciones ponderadas del error de observación ( $y(t) - \hat{y}(t)$ ). Estas últimas deben garantizar una dinámica estable y arbitrariamente gobernada por el error

de estimación. Mediante la designación  $y_1(t) = y(t)$ ,  $y_2(t) = \dot{y}(t)$ , ...,  $y_n(t) = y^{(n-1)}(t)$ , y  $\kappa = \phi(t, y)$  se obtiene el siguiente modelo en variables de estado del sistema lineal con la perturbación aditiva  $\xi(t)$ .

$$\begin{aligned} \dot{y}_l(t) &= y_{l+1} \\ y^n(t) &= \kappa u + \xi(t) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Donde  $l = 1, \dots, n-1$ . Considerando a  $z_1(t)$  como el estimado de  $\xi(t)$ , es decir  $\xi(t) = z_1(t)$ , se propone el siguiente observador GPI extendido.

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{y}_1}{dt} &= \hat{y}_2 + \lambda_{n+m-1}(y_1(t) - \hat{y}_1(t)) \\ &\vdots \\ \frac{d\hat{y}_{n-1}}{dt} &= \hat{y}_n + \lambda_{m+1}(y_1(t) - \hat{y}_1(t)) \\ \frac{d\hat{y}_n}{dt} &= \kappa u(t) + z_1(t) + \lambda_m(y_1(t) - \hat{y}_1(t)) \\ \dot{z}_1(t) &= z_2(t) + \lambda_{m-1}(y_1(t) - \hat{y}_1(t)) \\ &\vdots \\ \dot{z}_m &= \lambda_0(y_1(t) - \hat{y}_1(t)) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Tal que,  $\dot{z}_j(t) = \xi^{(j-1)}(t)$  para  $j = 2, \dots, m$  y  $\dot{z}_m = \xi^{(m)}(t) = 0$ . Analizando los errores de estimación asociados a la salida y sus primeras  $(n-1)$  derivadas con respecto al tiempo, se definen  $e_1(t) = y_1(t) - \hat{y}_1(t)$ ,  $e_2(t) = y_2(t) - \hat{y}_2(t)$ , ...,  $e_n(t) = y_n(t) - \hat{y}_n(t)$ . Seguidamente se fijan los errores de estimación asociados a la función de perturbación  $\xi(t)$  y sus primeras  $m-1$  derivadas con respecto al tiempo:  $e_{n+1}(t) = \xi(t) - z_1(t)$ ,  $e_{n+2}(t) = \dot{\xi}(t) - z_2(t)$ , ...,  $e_{n+m-1}(t) = \xi^{(m-1)}(t) - z_{m-1}(t)$ . Entonces la dinámica asociada a estos errores de estimación queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1(t) &= e_2(t) - \lambda_{m+n-1}e_1(t) \\ &\vdots \\ \dot{e}_{n-1}(t) &= e_n(t) - \lambda_{m+1}e_1(t) \\ \dot{e}_n(t) &= e_{n+1}(t) - \lambda_me_1(t) \\ \dot{e}_{n+1}(t) &= e_{n+2}(t) - \lambda_{m-1}e_1(t) \\ &\vdots \\ \dot{e}_{n+m-1}(t) &= \xi^{(m)}(t) - \lambda_0e_1(t) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Despues de un proceso de simplificación se incorporan los errores de seguimiento y de estimación en lazo cerrado, la cual satisface la siguiente ecuación:

$$e_y^{(n+m)}(t) + \lambda_{n+m-1}e_y^{(n+m-1)}(t) + \dots + \lambda_1\dot{e}_y(t) + \lambda_0e_y(t) = \xi^{(m)}(t) \quad (4.19)$$

Para lograr la estabilidad del sistema en lazo cerrado, los coeficientes se eligen por medio del siguiente polinomio en la variable compleja  $s$  (Polinomio de Hurwitz):

$$p(s) = s^{n+m} + \lambda_{n+m-1}s^{(n+m-1)} + \dots + \lambda_1s + \lambda_0 \quad (4.20)$$

Los coeficientes  $\lambda_k$ ,  $k = 0, \dots, n + m - 1$  logran que el polinomio  $p(s)$  ubiquen sus raíces en el semiplano izquierdo del plano complejo  $s$ . Entonces el error de estimacion  $e_y(t)$  y sus correspondientes derivadas temporales,  $e_y^i(t)$ , donde  $i = 1, \dots, n+m-1$ , convergen globalmente a una función,  $B(0, \rho)$ , centrada en el origen del espacio de fase  $\{e_y, \dot{e}_y, \dots, e_y^{(n+m-1)}\}$  de radio  $\rho$  cercanas al origen como se desee, dependiendo de la parte real de las raíces seleccionadas. Cuanto mayor sea la magnitud de la parte real, mas reducido será el radio de  $B(0, \rho)$ . La variable  $z_1(t)$  y sus derivadas temporales  $z_i(t)$ ,  $i = 2, \dots, m$  siguen arbitrariamente la señal de perturbación en el tiempo  $\xi(t)$  y sus derivadas temporales  $\xi^{(i)}(t)$ , donde  $i = 1, \dots, m$ .

### 4.2.1. Diseño del observador GPI para las funciones de FCEM

El modelo matemático del MSIP en el marco de referencia  $\alpha - \beta$ , es dado por, [2]

$$L_s \frac{di_\alpha}{dt} = -R_s i_\alpha + e_\alpha + u_\alpha \quad (4.21)$$

$$L_s \frac{di_\beta}{dt} = -R_s i_\beta - e_\beta + u_\beta \quad (4.22)$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = \tau_e - D\omega - \tau_L(t) \quad (4.23)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \quad (4.24)$$

donde  $i_\alpha, i_\beta, e_\alpha, e_\beta, u_\alpha$ , y  $u_\beta$ , representan las corrientes de estator, fuerzas contra electromotriz y entradas de control. Los parámetros  $R_s$  y  $L_s$  denotan las resistencias e inductancias de estator;  $\theta, \omega$  y  $\tau_e$  representan la posición angular, velocidad angular y el par desarrollado internamente por el MSIP;  $D$  es el coeficiente de fricción viscosa,  $J$  y  $\tau_L(t)$  son el momento de inercia y el par de carga externo del MSIP. El par de carga es desconocido, sin embargo se considera constante y completamente acotado.

El torque electromagnético desarrollado por el MSIP en el eje de referencia  $\alpha - \beta$  se expresa como:

$$\begin{aligned} \tau_e &= \underbrace{\frac{3}{2}k_m}_{:=k_T} [-i_\alpha \sin(n_p\theta) + i_\beta \cos(n_p\theta)] \\ &= k_T [-i_\alpha \sin(n_p\theta) + i_\beta \cos(n_p\theta)] \end{aligned} \quad (4.25)$$

Donde  $k_T$  es el torque constante del motor. Las funciones de FCEM son inducidas por los devanados del estator, dadas por:

$$e_\alpha(\theta, \dot{\theta}, k_m) = k_m \sin(n_p\theta) \dot{\theta} \quad (4.26)$$

$$e_\beta(\theta, \dot{\theta}, k_m) = k_m \cos(n_p\theta) \dot{\theta} \quad (4.27)$$

Se diseña un observador GPI a partir de las ecuaciones (4.21) y (4.22) para la obtención de las estimaciones simultaneas de las funciones de FCEM, generadas por los IP del rotor del MS. Las funciones  $e_\alpha$  y  $e_\beta$  son estimadas por medio de la medición de las corrientes de fase y los voltajes aplicados en el marco de referencia  $\alpha - \beta$ . Este tipo de estimación ayudará a modelar las funciones  $e_\alpha$  y  $e_\beta$ , además de los términos desconocidos no modelados, a través de una función polinomial dependiente del tiempo. Para nuestro caso de estudio, se usa un modelo polinomial de sexto orden. El modelo es incorporado dentro del observador como un subsistema de ecuaciones conformado por una cadena de integraciones en cascada con condiciones iniciales arbitrarias [55].

El diseño de los observadores GPI para las funciones no lineales de FCEM  $e_\alpha$  y  $e_\beta$ , comienza con la copia del sistema, donde se reemplaza a la función no lineal por una variable variante en el tiempo  $z_{1\alpha} = \hat{e}_\alpha$ , más un término de error de corrección, determinado por el error de estimación  $\gamma(i_\alpha - \hat{i}_\alpha)$ ,  $\gamma > 0$ . Partiendo de la ecuación eléctrica del eje coordenado  $\alpha$  del sistema dada en (4.21), se tiene que:

$$\begin{aligned}
L_s \frac{di_\alpha}{dt} &= -R_s \hat{i}_\alpha + z_{1\alpha} + u_\alpha + \gamma_5 (i_\alpha - \hat{i}_\alpha) \\
\dot{z}_{1\alpha} &= z_{2\alpha} + \gamma_4 (i_\alpha - \hat{i}_\alpha) \\
\dot{z}_{2\alpha} &= z_{3\alpha} + \gamma_3 (i_\alpha - \hat{i}_\alpha) \\
\dot{z}_{3\alpha} &= z_{4\alpha} + \gamma_2 (i_\alpha - \hat{i}_\alpha) \\
\dot{z}_{4\alpha} &= z_{5\alpha} + \gamma_1 (i_\alpha - \hat{i}_\alpha) \\
\dot{z}_{5\alpha} &= \gamma_0 (i_\alpha - \hat{i}_\alpha)
\end{aligned} \tag{4.28}$$

De ahí que las ganancias del observador GPI,  $\gamma_i$ ,  $i = 0, \dots, 5$ , se calculan a través de la técnica por ubicación de polos (veáse [62]). Para la estimación de la función de FCEM en el eje coordenado  $\beta$ , se designa a la función de estimación  $z_{1\beta} = \hat{e}_\beta$ , como la función de estimación de la FCEM en el eje coordenado  $\beta$  considerada variante en el tiempo, más un término de error de corrección, determinado por el error de estimación  $\gamma(i_\beta - \hat{i}_\beta)$ ,  $\gamma > 0$ . A partir de (4.22), se hace la copia del sistema que incluye las extensiones dinámicas correspondientes de la función de la FCEM en el coordenado  $\beta$ , para tener lo siguiente

$$\begin{aligned}
L_s \frac{di_\beta}{dt} &= -R_s \hat{i}_\beta + z_{1\beta} + u_\beta + \gamma_5 (i_\beta - \hat{i}_\beta) \\
\dot{z}_{1\beta} &= z_{2\beta} + \gamma_4 (i_\beta - \hat{i}_\beta) \\
\dot{z}_{2\beta} &= z_{3\beta} + \gamma_3 (i_\beta - \hat{i}_\beta) \\
\dot{z}_{3\beta} &= z_{4\beta} + \gamma_2 (i_\beta - \hat{i}_\beta) \\
\dot{z}_{4\beta} &= z_{5\beta} + \gamma_1 (i_\beta - \hat{i}_\beta) \\
\dot{z}_{5\beta} &= \gamma_0 (i_\beta - \hat{i}_\beta)
\end{aligned} \tag{4.29}$$

### 4.2.2. Análisis de estabilidad

Sean los errores de estimación en corriente definidos como:  $e_{i_\alpha} = i_\alpha - \hat{i}_\alpha$  y  $e_{i_\beta} = i_\beta - \hat{i}_\beta$ . Al restar las ecuaciones miembro a miembro (4.21) con (4.28) y (4.22) con (4.29), se obtienen

las siguientes ecuaciones diferenciales de los errores de estimación:

$$\begin{aligned}
L_s \frac{de_{i\alpha}}{dt} &= -R_s e_{i\alpha} - z_{1\alpha} + e_\alpha + \gamma_5 e_{i\alpha} \\
\dot{z}_{1\alpha} &= z_{2\alpha} + \gamma_4 e_{i\alpha} \\
&\vdots = \vdots \\
\dot{z}_{5\alpha} &= \gamma_0 e_{i\alpha}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

$$\begin{aligned}
L_s \frac{de_{i\beta}}{dt} &= -R_s e_{i\beta} - z_{1\beta} - e_\beta + \gamma_5 e_{i\beta} \\
\dot{z}_{1\beta} &= z_{2\beta} + \gamma_4 e_{i\beta} \\
&\vdots = \vdots \\
\dot{z}_{5\beta} &= \gamma_0 e_{i\beta}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Por lo tanto, las dinámicas de los errores de estimación en el eje  $\alpha$  y  $\beta$ , están dados por:

$$e_{i\alpha}^{(6)} + \left( \frac{R_s + \gamma_5}{L_s} \right) e_{i\alpha}^{(5)} + \left( \frac{\gamma_4}{L_s} \right) e_{i\alpha}^{(4)} + \left( \frac{\gamma_3}{L_s} \right) e_{i\alpha}^{(3)} + \left( \frac{\gamma_2}{L_s} \right) \ddot{e}_{i\alpha} + \left( \frac{\gamma_1}{L_s} \right) \dot{e}_{i\alpha} + \left( \frac{\gamma_0}{L_s} \right) e_{i\alpha} = \left( \frac{1}{L_s} \right) e_\alpha^{(5)} \tag{4.32}$$

$$e_{i\beta}^{(6)} + \left( \frac{R_s + \gamma_5}{L_s} \right) e_{i\beta}^{(5)} + \left( \frac{\gamma_4}{L_s} \right) e_{i\beta}^{(4)} + \left( \frac{\gamma_3}{L_s} \right) e_{i\beta}^{(3)} + \left( \frac{\gamma_2}{L_s} \right) \ddot{e}_{i\beta} + \left( \frac{\gamma_1}{L_s} \right) \dot{e}_{i\beta} + \left( \frac{\gamma_0}{L_s} \right) e_{i\beta} = - \left( \frac{1}{L_s} \right) e_\beta^{(5)} \tag{4.33}$$

Para la selección de los valores de las ganancias  $\gamma_i$ ,  $i = 0, \dots, 5$  se considera un polinomio Hurwitz de sexto grado. Donde  $\varsigma > 0$  y  $\omega_n > 0$  se definen como constantes, tal que el siguiente polinomio deseado,  $p_d(s)$ , es un polinomio Hurwitz definido de la siguiente manera

$$p_d(s) = (s^2 + 2\varsigma\omega_n s + \omega_n^2)^3 \tag{4.34}$$

Se asume que  $e_\alpha^{(5)}(t)$  y  $e_\beta^{(5)}(t)$  son funciones de la quinta derivada con respecto al tiempo de la FCEM de perturbación desconocidas, pero uniformemente y absolutamente acotadas, por lo que existen los coeficientes de las ganancias del observador GPI,  $\gamma_i$  ( $i = 0, \dots, 5$ ), los cuales se comparan término a término (4.32) y (4.33) con el polinomio Hurwitz deseado (4.34), y se produce lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\gamma_5 &= 6L_s\varsigma\omega_n - R_s \\
\gamma_4 &= (3\omega_n^2 + 12\varsigma^2\omega_n^2) L_s \\
\gamma_3 &= (12\varsigma\omega_n^3 + 8\varsigma^3\omega_n^3) L_s \\
\gamma_2 &= (3\omega_n^4 + 15\varsigma^2\omega_n^4) L_s \\
\gamma_1 &= 6L_s\varsigma\omega_n^5 \\
\gamma_0 &= L_s\omega_n^6
\end{aligned} \tag{4.35}$$

con la finalidad de mantener la estabilidad de los polos del observador se ubican suficientemente lejos en el semi-plano izquierdo del plano complejo. Esto con la finalidad de que las funciones de las derivadas de quinto orden de FCEM de perturbación desconocidas ( $e_\alpha^{(5)}(t)$  y

$e_{\beta}^{(5)}$ ) sean casi cero. Por tanto, los errores de estimación del observador y sus derivadas temporales, convergan asintóticamente cerca de cero, es decir, los errores quedan dentro de un disco centrado alrededor del origen de radio muy pequeño respecto al error de estimación de espacio de fase, [54], [15], [55] y [56].

Suponiendo que  $e_{i_{\alpha}}$  y  $e_{i_{\beta}}$  son casi cero, de ahí se tienen las siguientes expresiones,

$$L_s \frac{de_{i_{\alpha}}}{dt} = -R_s e_{i_{\alpha}} - z_{1\alpha} + e_{\alpha} + \gamma_5 e_{i_{\alpha}} \quad (4.36)$$

$$L_s \frac{de_{i_{\beta}}}{dt} = -R_s e_{i_{\beta}} - z_{1\beta} - e_{\beta} + \gamma_5 e_{i_{\beta}} \quad (4.37)$$

Por tanto, se dice que,  $z_{1\alpha}(t) = \hat{e}_{\alpha}(t)$  y  $z_{1\beta}(t) = \hat{e}_{\beta}(t)$ . De ahí, las funciones de FCEM son estimadas con mucha precisión tal que los términos no lineales de,  $e_{\alpha}(\theta, \dot{\theta}, K_m)$  y  $e_{\beta}(\theta, \dot{\theta}, K_m)$ , y sus derivadas sucesivas son estimadas por:  $z_{j_{\alpha-\beta}} = e_{\alpha-\beta}^{j-1}$  para  $j = 2, \dots, 5$ . Entonces se concluye el error estimación converge asintóticamente cerca de cero.

### 4.3. Estructura del PLL

Un lazo de amarre de fase (PLL, por sus siglas en ingles Phase Locked Loop) es un dispositivo que realiza la función de enganche de fase, es decir hace que la señal de entrada de tipo sinusoidal siga a otra señal de referencia del mismo tipo [24] y [60]. Esta sección trata el análisis matemático del dispositivo PLL, el cual será utilizado para el control de velocidad sin sensor de posición del MSIP. La estructura básica del PLL se adecua para estimar la posición y velocidad del MSIP, además consigue eliminar el ruido a la salida, tal como se muestra en la siguiente figura. El bloque detector de fase calcula la señal del error  $\varepsilon$ , siendo ésta una función

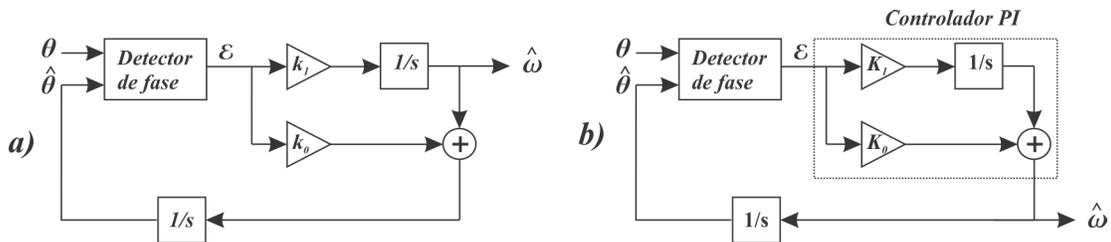


Figura 4.1: Lazo de amarre de fase, PLL.

que depende del error de estimación definida como  $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ . La señal del error está definida por la siguiente ecuación:

$$\varepsilon = K \sin(\tilde{\theta}) \quad (4.38)$$

donde  $K$  es un parámetro de ganancia para alguna aplicación específica. Se utiliza la señal del error  $\varepsilon$  para estimar la posición real, usando el siguiente algoritmo no lineal [19]:

$$\frac{d\hat{\omega}}{dt} = k_0\varepsilon \quad (4.39)$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = \hat{\omega}_r + k_1\varepsilon \quad (4.40)$$

tal que  $k_0$  y  $k_1$  son las ganancias del dispositivo PLL. La estructura del sistema de ecuaciones (4.39) y (4.40) se considera como un controlador PI y un integrador conectado en serie. La estructura básica mostrada en la Figura 4.1, se utiliza en este caso para mejorar la robustez durante la estimación de la posición y velocidad del MSIP. Las funciones de las FCEM  $e_\alpha$  y  $e_\beta$ , y el tratamiento algebraico utilizado para obtener las funciones estimadas seno y coseno, son las variables de entrada al dispositivo PLL que proporcionan la información necesaria para la obtención de la posición y la velocidad angular estimadas. De ahí, al incorporar estas variables estimadas a través del observador GPI al PLL como señales de referencia, inmediatamente después el dispositivo PLL hace un seguimiento casi perfecto de la misma señal, donde el ruido generado por la estimación del observador GPI de las funciones de FCEM se elimina casi por completo.

### 4.3.1. Dinámica en lazo cerrado

La estimación de la velocidad angular del MSIP está disponible desde la salida del integrador [19], Figura 4.1a), o directamente de la salida del controlador PI, Figura 4.1b. Esta última tiene una dinámica más rápida en cuanto a su respuesta en el tiempo y comúnmente es la más utilizada (ver [12]). Para el desarrollo de esta tesis se hace uso de la primera versión, ya que es menos sensible al ruido de tal manera que elimina el ruido generado por el observador GPI. Para realizar el análisis de atenuación de ruido del dispositivo PLL, se linealiza alrededor de un punto de operación el error de posición,  $\varepsilon = K \sin(\tilde{\theta})$ , obteniendo la siguiente expresión:

$$\sin(\theta - \hat{\theta}) \approx \theta - \hat{\theta} = \tilde{\theta} \quad (4.41)$$

Esta suposición es válida si y solo si el error de estimación está muy cerca de cero. También se asume que la señal del error,  $\varepsilon$  se calcula correctamente y sin retardo, por lo tanto, las ecuaciones de (4.39) se reescriben como sigue:

$$\frac{d\hat{\omega}}{dt} = k_0 K \tilde{\theta} \quad (4.42)$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = \hat{\omega} + k_1 K \tilde{\theta} \quad (4.43)$$

Al linealizar las ecuaciones (4.42) y (4.43), se obtienen las funciones de transferencia para cada uno de los dispositivos PLL mostrados por las Figura 4.1, las cuales se expresan de la siguiente

manera:

$$\frac{\hat{\omega}(s)}{\omega(s)} = \frac{k_0 K}{s^2 + k_1 K s + k_0 K} \quad (4.44)$$

$$\frac{\hat{\omega}(s)}{\omega(s)} = \frac{k_1 K s + k_0 K}{s^2 + k_1 K s + k_0 K} \quad (4.45)$$

En ambos casos las funciones de transferencia entre la posición actual  $\theta$  y la posición estimada  $\hat{\theta}$  son muy similares. Con el fin de obtener un sistema con mayor robustez y evitar oscilaciones, los polos se ubican en el semi plano izquierdo del plano complejo, o en el eje real negativo:  $s = -\rho$ , donde  $\rho$  es una constante positiva. El polinomio característico es dado por:  $s^2 + 2\rho s + \rho^2$ , tal que las ganancias  $k_0$  y  $k_1$  se eligen mediante la comparación entre el denominador dado en (4.44) y (4.45) con el polinomio característico, de ahí se tiene que:

$$k_0 = \frac{\rho^2}{K}, \quad k_1 = \frac{2\rho}{K}$$

tal que  $k_0$  y  $k_1$  son las ganancias del controlador PI.

### 4.3.2. Análisis del ruido en la señal de entrada al PLL

Partiendo del sistema de ecuaciones dado en (4.42), se asume que la velocidad real de la velocidad  $\omega_r$  es constante. Si el error de estimación es aproximadamente igual a cero, entonces la dinámica del error de velocidad queda de la siguiente manera:

$$\tilde{\omega} = \omega - \hat{\omega} \quad (4.46)$$

Suponiendo que la componente del error linealizado cerca de cero,  $K\tilde{\theta}$ , es perturbado por una componente de ruido,  $n$ , entonces las ecuaciones diferenciales para la estimación del error de posición y velocidad se expresan como sigue:

$$\frac{d\tilde{\omega}}{dt} = -\frac{d\hat{\omega}}{dt} = -k_0 \frac{\rho^2}{K} \quad (4.47)$$

$$\frac{d\tilde{\theta}}{dt} = \hat{\omega} - k_1 (K\tilde{\theta} + n) \quad (4.48)$$

Obteniendo las funciones de transferencia, entre la perturbación  $n$  y los errores de estimación de posición y velocidad, y sustituyendo los valores de  $k_0$  y  $k_1$  se tiene que:

$$\hat{\omega}(s) = -\frac{\rho^2}{K} \left( \frac{s}{(s + \rho)^2} \right) n(s) \quad (4.49)$$

La relación que existe entre el error de velocidad y el ruido da lugar a un filtro pasa banda con frecuencia central  $\rho$ . EL error de velocidad en estado estable es cero, si y solo si, la perturbación

$n$  es una señal de CD. Esto significa que las perturbaciones varían lentamente, así como los parámetros desconocidos de la maquina, teniendo como resultado un error de velocidad en estado estable casi cero. Por otro lado, la función de transferencia entre la posición angular del rotor y el ruido da como resultado un filtro pasa bajas con una ganancia diferente de cero. De ahí, se obtiene la siguiente expresión

$$\tilde{\theta}(s) = -\frac{\rho}{K} \left( \frac{2s^2 + 5\rho s + 2\rho^2}{(s + \rho)(s + \rho)^2} \right) n(s) \quad (4.50)$$

#### 4.4. Diseño del observador de posición y velocidad basado en PLL

Las señales de referencia del PLL son proporcionados por el observador GPI, siendo estas señales  $k_m \widehat{\sin(n_p \theta)} \dot{\theta}$  y  $k_m \widehat{\cos(n_p \theta)} \dot{\theta}$ , las cuales tienen contenido de ruido. Para minimizar el ruido y mejorar la estabilidad del sistema en lazo cerrado, se diseña el siguiente estimador basado en PLL. Tomando en cuenta las siguientes suposiciones:

- Se considera que los valores estimados,  $z_{1\alpha} = k_m \widehat{\sin(n_p \theta)} \dot{\theta}$  y  $z_{1\beta} = k_m \widehat{\cos(n_p \theta)} \dot{\theta}$  son aproximadamente iguales a los valores reales,  $e_\alpha$  y  $e_\beta$ , en un periodo de tiempo finito.
- La posición estimada es aproximadamente igual a la posición real,  $\hat{\theta}(t) \approx \theta(t)$  dentro de un intervalo de tiempo finito, siempre y cuando la posición inicial del MSIP sea  $\theta = 0$ .
- El valor estimado de la posición angular alcanza al valor real en un tiempo muy corto. Como una justificación de esta afirmación la dinámica del error de las funciones de FCEM,  $e_{i_\alpha}$  y  $e_{i_\beta}$ , es mucho más rápida que la dinámica de error de posición y velocidad,  $e_\theta$  y  $e_\omega$ . (ver [31]).
- Mediante un cálculo algebraico se obtienen las siguientes funciones  $\widehat{\sin(n_p \theta)}$  y  $\widehat{\cos(n_p \theta)}$ , tal y como se muestra a continuación:

$$A = \sqrt{\left[ k_m \widehat{\sin(n_p \theta)} \dot{\theta} \right]^2 + \left[ k_m \widehat{\cos(n_p \theta)} \dot{\theta} \right]^2} = K_m \hat{\theta}$$

Por lo tanto, las funciones estimadas  $z_{1\alpha}$  y  $z_{1\beta}$  se dividen entre el factor  $A$ , produciéndose lo siguiente:

$$\frac{e_\alpha}{A} = \widehat{\sin(n_p \theta)} = \sin(n_p \hat{\theta}) \quad (4.51)$$

$$\frac{e_\beta}{A} = \widehat{\cos(n_p \theta)} = \cos(n_p \hat{\theta}) \quad (4.52)$$

Tomando en cuentas las suposiciones anteriores, se tiene que:

$$\begin{aligned}\sin(n_p \hat{\theta}) &\approx \sin(n_p \theta) \\ \cos(n_p \hat{\theta}) &\approx \cos(n_p \theta)\end{aligned}$$

De ahí, se obtiene la dinámica del error utilizando las ecuaciones (4.51) y (4.52). Teniendo como resultado la siguiente expresión:

$$\epsilon = \sin(n_p \theta) \cos(n_p \hat{\theta}) - \cos(n_p \theta) \sin(n_p \hat{\theta}) = \sin n_p (\theta - \hat{\theta}) \quad (4.53)$$

donde  $\theta$  es la posición angular real, y  $\hat{\theta}$  es la posición estimada calculada internamente por el algoritmo de estimación basado en PLL equivalente a un filtro pasa banda, tal como se muestra en la siguiente figura. El término del error de corrección,  $\epsilon$  se utiliza para calcular los

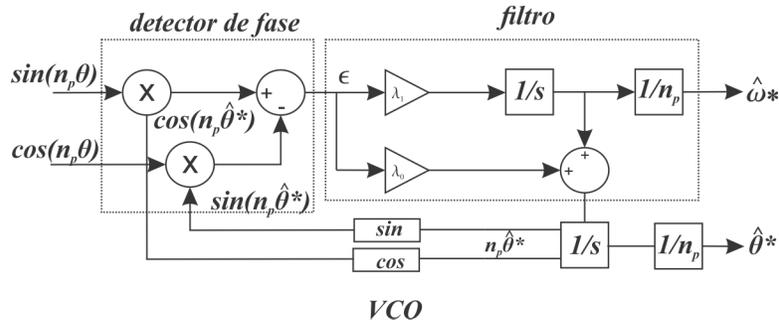


Figura 4.2: Diagrama a bloques del PLL

valores estimados de posición y velocidad mediante las siguientes ecuaciones [19]:

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = \hat{\omega} + \lambda_1 \epsilon \quad (4.54)$$

$$\frac{d\hat{\omega}}{dt} = \lambda_0 \epsilon \quad (4.55)$$

donde  $\lambda_1$  y  $\lambda_0$  son la ganancias del observador. La posición estimada,  $\hat{\theta}$ , se obtiene a través de integrar la velocidad angular,  $\hat{\omega}$ , más el término  $\lambda_1 \epsilon$ , mientras que  $\hat{\omega}$ , se obtiene de integrar el término de corrección  $\lambda_0 \epsilon$ . Por lo tanto, los valores estimados en (4.54) son similares al modelo equivalente de un filtro pasa banda. Este observador se ilustra en la figura 4.2 (ver [60]).

Se hace la suposición de que  $\theta \approx \hat{\theta}$  es decir, la ecuación (4.54) se linealiza alrededor del punto de equilibrio igual a cero, definido como

$$\sin n_p (\theta - \hat{\theta}) \approx n_p (\theta - \hat{\theta}) \quad (4.56)$$

así, las ecuaciones del estimador (4.54), se reescriben de la siguiente forma:

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = \hat{\omega} + \lambda'_1 (\theta - \hat{\theta}) \quad (4.57)$$

$$\frac{d\hat{\omega}}{dt} = \lambda'_0 (\theta - \hat{\theta}) \quad (4.58)$$

donde  $\lambda'_1 = n_p \lambda_1$  y  $\lambda'_0 = n_p \lambda_0$ . Al obtener la función de transferencia de (4.57), el denominador presenta el siguiente polinomio característico:

$$p(s) = s^2 + \lambda'_1 s + \lambda'_0 \quad (4.59)$$

Eligiendo las ganancias del observador  $\lambda'_1$  y  $\lambda'_0$  mediante la comparación término a término con el siguiente polinomio Hurwitz,

$$p(s) = s^2 + 2\sigma s + \sigma^2 \quad (4.60)$$

Con la finalidad de conseguir una mayor robustez y evitar oscilaciones en el sistema en lazo cerrado, se propone que ambos polos del polinomio característico sean colocados en el eje real y en el lado izquierdo del plano complejo,  $s = -\sigma$ , donde  $\sigma > 0$  es un parámetro real positivo. Así, las ganancias del observador con error no lineal son:

$$\lambda_1 = \frac{2\sigma}{n_p} \quad (4.61)$$

$$\lambda'_0 = \frac{\sigma^2}{n_p} \quad (4.62)$$

donde el valor nominal  $n_p$  es perfectamente conocido.

#### 4.4.1. Análisis de estabilidad del observador no lineal PLL de banda base

Los errores de estimación son dados por:  $e_\theta = \theta - \hat{\theta}$  y  $e_\omega = \omega - \hat{\omega}$ , donde la aceleración real del MSIP se considera aproximadamente igual a cero, es decir,  $\dot{\omega} \approx 0$ . El torque desarrollado internamente por el MSIP es igual al torque aplicado en el eje, por lo tanto, las dinámicas de los errores de posición y velocidad angular son descritas por las siguientes expresiones:

$$\frac{de_\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt} - \frac{d\hat{\theta}}{dt} = e_\omega - \lambda_1 \sin(n_p e_\theta) \quad (4.63)$$

$$\frac{de_\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dt} - \frac{d\hat{\omega}}{dt} = -\lambda_0 \sin(n_p e_\theta) \quad (4.64)$$

Por lo tanto, la prueba de estabilidad para las dinámicas de los errores se llevan a cabo a través del método directo de Lyapunov.

**Teorema:** Sea (4.63) y (4.64), consideradas asintóticamente estables para un conjunto  $\{\lambda_1, \lambda_0\} > 0$ , con los puntos de equilibrio  $\{e_\theta, e_\omega\} = \{2n\pi/n_p, 0\}$ , donde  $n$  es un entero positivo.

**Prueba.** Considérese la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(e_\theta, e_\omega) = \frac{\lambda_0}{n_p} [1 - \cos(n_p e_\theta)] + \frac{1}{2} e_\omega^2$$

Se observa que la función es positiva definida, es decir,  $V(e_\theta, e_\omega) > 0$ ,  $e_\theta \neq 2n\pi/n_p$ ,  $e_\omega \neq 0$ , y  $V(2n\pi/n_p, 0) = 0$ . De ahí, se obtiene la derivada:

$$\begin{aligned}\dot{V}(e_\theta, e_\omega) &= \lambda_0 \sin(n_p e_\theta) \dot{e}_\theta + e_\omega \dot{e}_\omega \\ &= \lambda_0 \sin(n_p e_\theta) e_\omega - \lambda_0 \sin(n_p e_\theta) e_\omega - \lambda_0 \lambda_1 \sin^2(n_p e_\theta) \\ &= -\lambda_0 \lambda_1 \sin^2(n_p e_\theta) \leq 0\end{aligned}$$

Dado que  $\dot{V} = 0$ , implica que  $e_\omega = 0$  y  $e_\theta = 2n\pi/n_p$ . Se concluye por el principio de invariancia de *LaSalle* que la dinámica de los errores de estimación dados por las expresiones (4.63) y (4.64) tienen como solución el origen como un punto de equilibrio estable (ver [29] y [49])

## 4.5. Diseño del observador del parámetro del par de carga

Para diseñar y desarrollar un controlador eficiente y robusto, es necesario conocer todas las variables que perturban al sistema. Debido a que el controlador por retroalimentación de la salida pasiva del error, no es robusto ante perturbaciones de par de carga constante, se diseña un observador de orden reducido para estimar el parámetro de par de carga junto con términos de fricción no modelados. Se define la corriente de cuadratura,  $i_q$ , como la entrada de control,  $u_1 = i_q$ , y se define a la velocidad angular estimada como la salida medida,  $y_1 = \hat{\omega}$ . Los valores nominales de los parámetros,  $J$  y  $K_m$  se consideran conocidos. Sustituyendo las variables  $u_1$  y  $y_1$  en la ecuación mecánica (A.85), se obtiene la siguiente expresión:

$$J \frac{dy_1}{dt} = \frac{3}{2} k_m u_1 - B y_1 - \tau_L \quad (4.65)$$

De la ecuación (4.65), se define a  $\tau_L$  como una medida indirecta del par de carga, considerado constante desconocido, pero uniformemente absolutamente acotado (ver [17]), despejando a  $\tau_L$  de la ecuación (4.65), se obtiene lo siguiente:

$$\tau_L = \frac{3}{2} k_m u_1 - \left[ B y_1 + J \frac{dy_1}{dt} \right] \quad (4.66)$$

Se propone el siguiente observador de par como:

$$\frac{d\hat{\tau}_L}{dt} = \lambda (\tau_L - \hat{\tau}_L) \quad (4.67)$$

donde  $\lambda > 0$ . La dinámica del error de estimación está dado por:

$$e_{\tau_L} = \tau_L - \hat{\tau}_L \quad (4.68)$$

$$\frac{de_{\tau_L}}{dt} = \frac{d\tau_L}{dt} - \frac{d\hat{\tau}_L}{dt} \quad (4.69)$$

Por lo que,  $\frac{d\tau_L}{dt} = 0$ , y sustituyendo (4.67) en (4.69), se obtiene la siguiente dinámica del error de estimación:

$$\frac{de_{\tau_L}}{dt} = -\lambda e_{\tau_L} \quad (4.70)$$

Escogiendo una ganancia  $\lambda \gg 0$ , el error de observación  $e_{\tau_L}$ , converge a cero exponencialmente, cuando  $t \rightarrow \infty$ . Ahora, sustituyendo la ecuación (4.66) en (4.67), se tiene que:

$$\frac{d\hat{\tau}_L}{dt} = \lambda \left[ \frac{3}{2}k_m u_1 - \left( B y_1 + J \frac{dy_1}{dt} \right) - \hat{\tau}_L \right] \quad (4.71)$$

Depejando y reordenando la ecuación anterior, se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{d\hat{\tau}_L}{dt} + \lambda J \frac{dy_1}{dt} = \frac{3}{2} \lambda k_m u_1 - \lambda B y_1 - \lambda \hat{\tau}_L \quad (4.72)$$

Haciendo un cambio de variable, se define a  $\psi = \hat{\tau}_L + \lambda J y_1$ , por lo que se obtiene el siguiente observador de orden reducido:

$$\frac{d\psi}{dt} = -\lambda \psi + (J\lambda - B) \lambda y_1 + \frac{3}{2} \lambda k_m u_1 \quad (4.73)$$

$$\hat{\tau}_L = \psi - \lambda J y_1 \quad (4.74)$$

El valor estimado del parámetro de par de carga junto con los términos de fricción desconocidos,  $\hat{\tau}_L$ , se adaptan en línea a la ley de control de seguimiento suave de velocidad angular. El propósito de esta adaptación es disminuir los efectos producidos por la carga aplicada al eje del MSIP.

# Capítulo 5

## Diseño y simulación del control para el MSIP

En este capítulo se describe la estructura del diagrama eléctrico a nivel simulación del control de velocidad del MSIP sin sensor de posición. Se utiliza el software Matlab/Simulink<sup>®</sup> para realizar el diseño y simulación del controlador. Mientras que en el software de simulación PSIM<sup>®</sup> se realiza el diagrama esquemático y la cosimulación del modelo promedio de la planta. Este último involucra los circuitos electrónicos de potencia, circuito de tiempos muertos, PWM y el MSIP. La simulación se realiza en lazo cerrado, donde las corrientes de fase son las variables de retroalimentación del controlador. A través de la medición de las corrientes se estima la posición, velocidad y el parámetro de par de carga.

A partir del esquema general mostrado en la Figura 5.1 se hace la programación del algoritmo de control en bloques de Simulink. El conjunto de bloques que conforman el algoritmo de control, interactúan entre sí y dentro de ellos se encuentran los subsistemas que representan las ecuaciones desarrolladas en los capítulos anteriores. Además, simplifican el diseño en forma modular del algoritmo de control. La interacción entre el entorno de Matlab/Simulink<sup>®</sup> y PSIM<sup>®</sup> permite simular el controlador sobre el modelo promedio de la planta. A lo largo de este capítulo se describe cada bloque que integra el diagrama general del sistema. Y por último se presentan los resultados obtenidos a nivel simulación.

### 5.1. Esquema general del sistema

En la Figura 5.1 se observa el diagrama general del sistema, constituido por dos partes esenciales: el modelo promedio de la planta y el algoritmo de control. Los elementos que componen el modelo promedio de la planta son representados dentro del recuadro azul y los bloques mostrados en el recuadro rojo conforman el algoritmo de control.

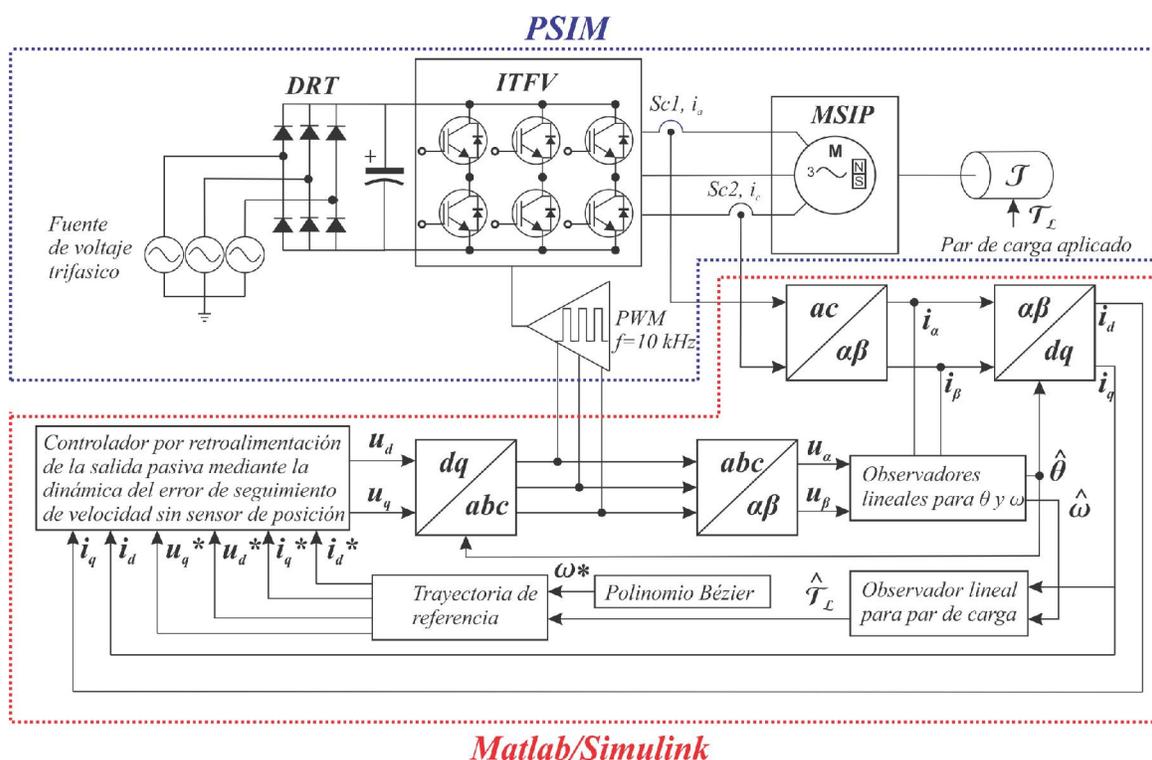


Figura 5.1: Esquema general del sistema

Cada bloque esta compuesto por:

- Modelo promedio de la planta: Bus de CD, circuito PWM con acoplamiento de tiempos muertos, inversor trifásico fuente de voltaje, MSIP, sensores de corriente y velocidad y el par de carga aplicado al eje del motor.
- Algoritmo de control: controlador basado en pasividad, circuito PLL, observador GPI, observador de par y términos de fricción no modelados, transformaciones de Clarke-Park, transformaciones  $dq - abc$  y  $abc - dq$  y por último la trayectoria de referencia deseada construida mediante un polinomio bésier.

## 5.2. Desarrollo del diagrama a bloques del algoritmo de control

El diagrama mostrado en la Figura 5.2, representa el esquema general del sistema en bloques de Simulink. Por medio de este algoritmo se simula el control de seguimiento suave de velocidad angular del MSIP, sin sensor de posición. Los valores de las ganancias del controlador, de los observadores y de las condiciones iniciales para la trayectaria de referencia, se determinan

por el usuario bajo un criterio de estabilización. Por otro lado, para la cosimulación entre el programa Matlab/Simulink y el software de simulación PSIM<sup>®</sup>, en este último se implementa la planta (MSIP), los parámetros se establecen de acuerdo a la hoja de datos del motor dados por el fabricante. A continuación se describe cada uno de los bloques que conforman el algoritmo de control.

### 5.2.1. Representación del modelo promedio de la planta en simulink

Se diseña y construye el diagrama eléctrico de la planta tal como se muestra en la Figura 5.3. El acoplamiento del modelo promedio de la planta sobre el entorno de Matlab/Simulink<sup>®</sup> se hace con la ayuda del bloque "*SimCoupler*". Este bloque proporciona un enlace entre PSIM<sup>®</sup> y Matlab/Simulink<sup>®</sup>, donde parte del sistema se implementa y se simula en PSIM<sup>®</sup> y el resto en Matlab/Simulink<sup>®</sup>. Con este tipo de herramienta se facilita la simulación del esquema general, además de visualizar y analizar el desempeño del controlador antes de realizar las pruebas experimentales en el laboratorio.

En el circuito de la Figura 5.3, el inversor trifásico fuente de voltaje suministra la potencia necesaria para el MSIP, donde las mediciones de las corrientes de fase se retroalimentan a través del controlador. Para la conmutación de los IGBT's del inversor se recurre a la modulación PWM sinusoidal mediante un circuito analógico, que compara la señal promedio del controlador con la señal triangular. La simulación del circuito de tiempos muertos no es incluido para simulación, pero se toma en cuenta durante la implementación física, únicamente se hace el negado de cada señal de cada fase para conmutar la parte inferior de cada rama del inversor. Las señales de entrada hacia el modulador PWM son proporcionadas por el controlador, y las señales de salida son obtenidas de la medición de de los sensores de corriente de la planta. Se observa otra señal de entrada que simula el parámetro de par de carga, y también se observa otra señal de salida que representa a la variable de velocidad angular, esto con el fin de hacer una comparativa en cuanto a precisión entre la velocidad real y la velocidad estimada. La adquisición de las señales de entradas y salidas se realizan a través de los nodos de enlace **In Link Node** y **Out Link Node**, donde se reciben las variables de control ( $u_a$ ,  $u_b$ ,  $u_c$  y  $In\_TLoad$ ) y se envían las variables ( $i_a$ ,  $i_b$ ,  $i_c$  y  $Out\_w$ ) del circuito hacia el diagrama del controlador realizado en Simulink.

Un aspecto importante a remarcar es que a través del software de simulación PSIM<sup>®</sup>, se simula de manera realística el comportamiento dinámico y estático del MSIP, donde se pueden ingresar los parámetros del motor dado por la hoja de datos del fabricante, mostrados en la Tabla 5.1 (modelo BSM80N-275AA).

Estos parámetros se ingresan en la configuración del módulo MSIP(ubicado en la pestaña Elements->Power->Motor Drive Module->Permanent-Magnet Mync. Machine de PSIM<sup>®</sup>), la cual se muestra en la Figura 5.4 .

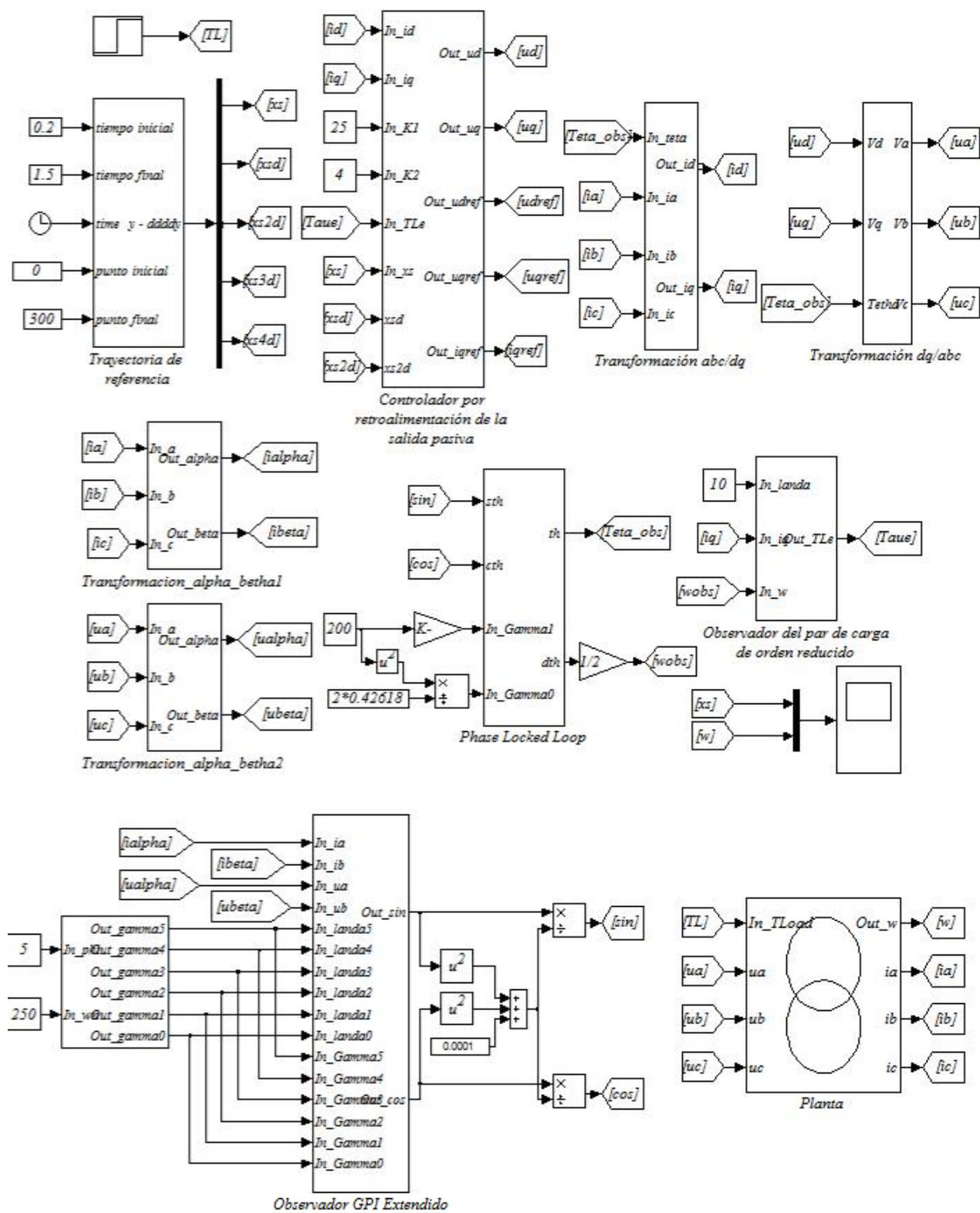


Figura 5.2: Diagrama a bloques del sistema.

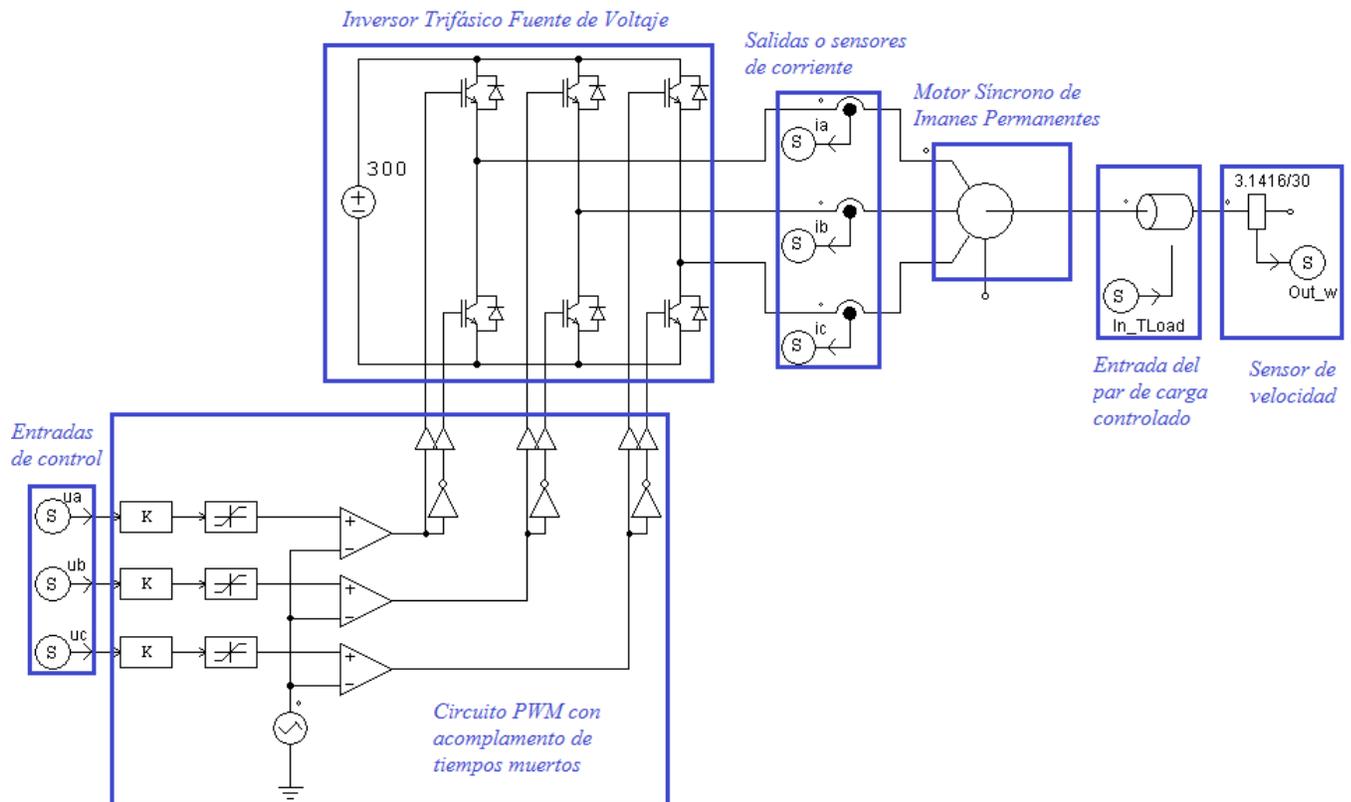


Figura 5.3: Modelo promedio de la planta en PSIM®.

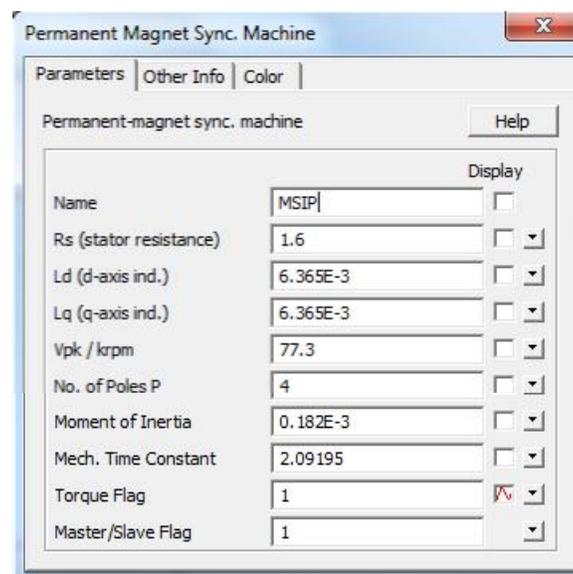


Figura 5.4: Ventana de configuración del módulo MSIP.

Descripción	Símbolo	Magnitud	Unidad
Resistencia de estator	$R_s$	1.6	$\Omega$
Inductancia del eje directo	$L_d$	6.365	$mH$
Inductancia del eje de cuadratura	$L_q$	6.365	$mH$
FCEM pico de línea a línea a velocidad constante	$V_{pk}/krpm$	77.3	$V$
Número de polos	$N_p$	4	$P$
Momento de inercia	$J$	0.182E-3	$Kgm^2$
Constante mecánica de tiempo	$T_m$	2.09195	$S$

Tabla 5.1: Parámetros del MSIP modelo BSM80N-275AA

Para las pruebas de simulación se alimenta el inversor trifásico que acciona al MSIP con un fuente de CD de 300 volts, y se establece una frecuencia de conmutación de 10 kHz para la señal triangular (portadora), la cual se utiliza en los circuitos de comparación del PWM.

Una vez terminado el diseño de la planta, se guarda el archivo en un directorio deseado, para este ejemplo se guarda el archivo con el nombre “planta.psimsch”. Por consiguiente, en Simulink, se selecciona el bloque SimCoupler en el menú S-funtion SimCoupler del explorador de librerías de Simulink® y haciendo doble clic en el bloque, se muestra un cuadro de dialogo, donde se agrega el archivo previamente guardado. Aplicando la modificación inmediatamente se cargan los puertos de entrada y salida establecidos en el programa de simulación PSIM®, tal como se muestra en la figura 5.5.

### 5.3. Representación del algoritmo de control en diagrama a bloques de Simulink

#### 5.3.1. Controlador por retroalimentación de la salida pasiva del error

En este bloque se incluye el subsistema que genera las señales de control  $u_d$  y  $u_q$ , las corrientes de fase y trayectorias de referencias, donde la Figura 5.6 muestra el diagrama a bloques del controlador. Donde, las ganancias del controlador fueron establecidas como:  $k_1 = 25$  y  $k_2 = 5$ . La Figura 5.7 representa el diagrama a bloques las ecuaciones del controlador (3.34) y las trayectorias de referencia deseadas (3.46).

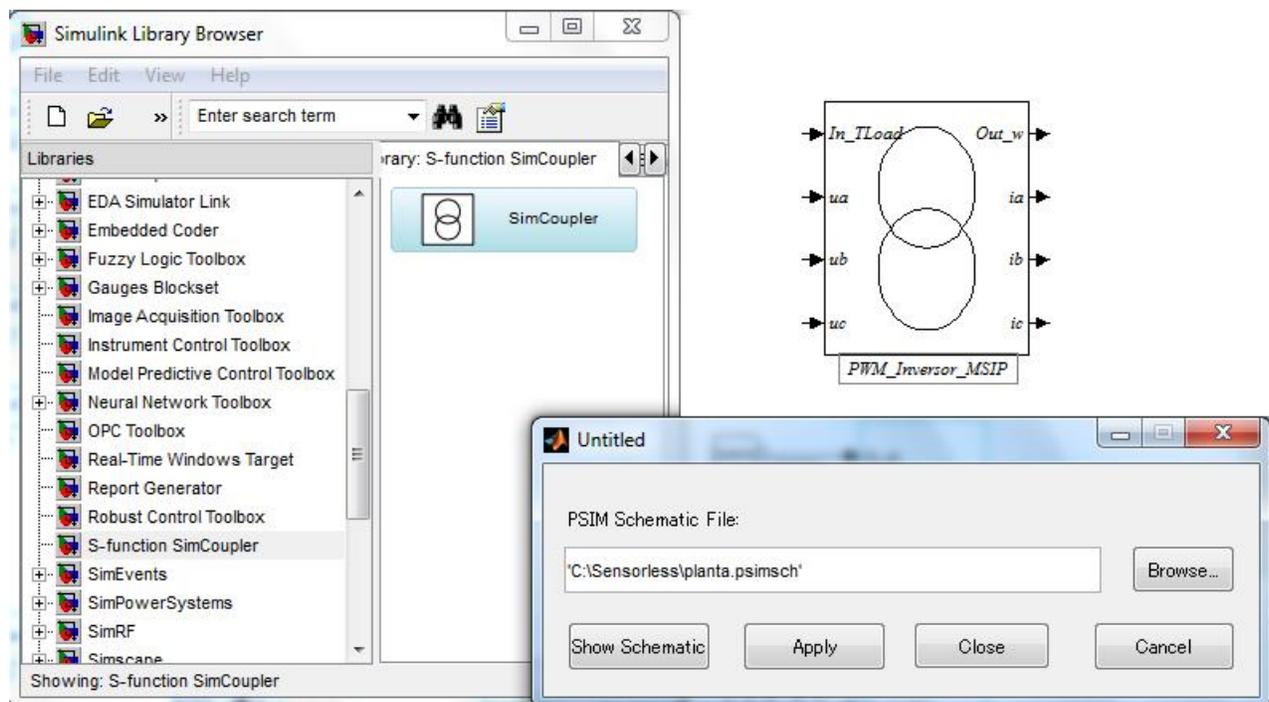


Figura 5.5: Bloque de enlace SimCoupler.

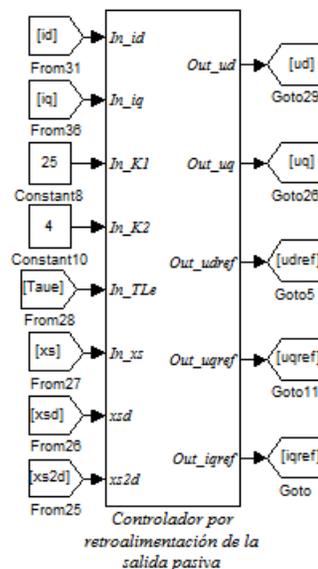


Figura 5.6: Controlador basado en pasividad.

### 5.3.2. Trayectorias de referencia

Mediante la propiedad de planitud diferencial del sistema se realiza la representación de la ecuaciones (??) y (3.47). En la Figura 5.8 se muestra el bloque de las trayectorias de velocidad

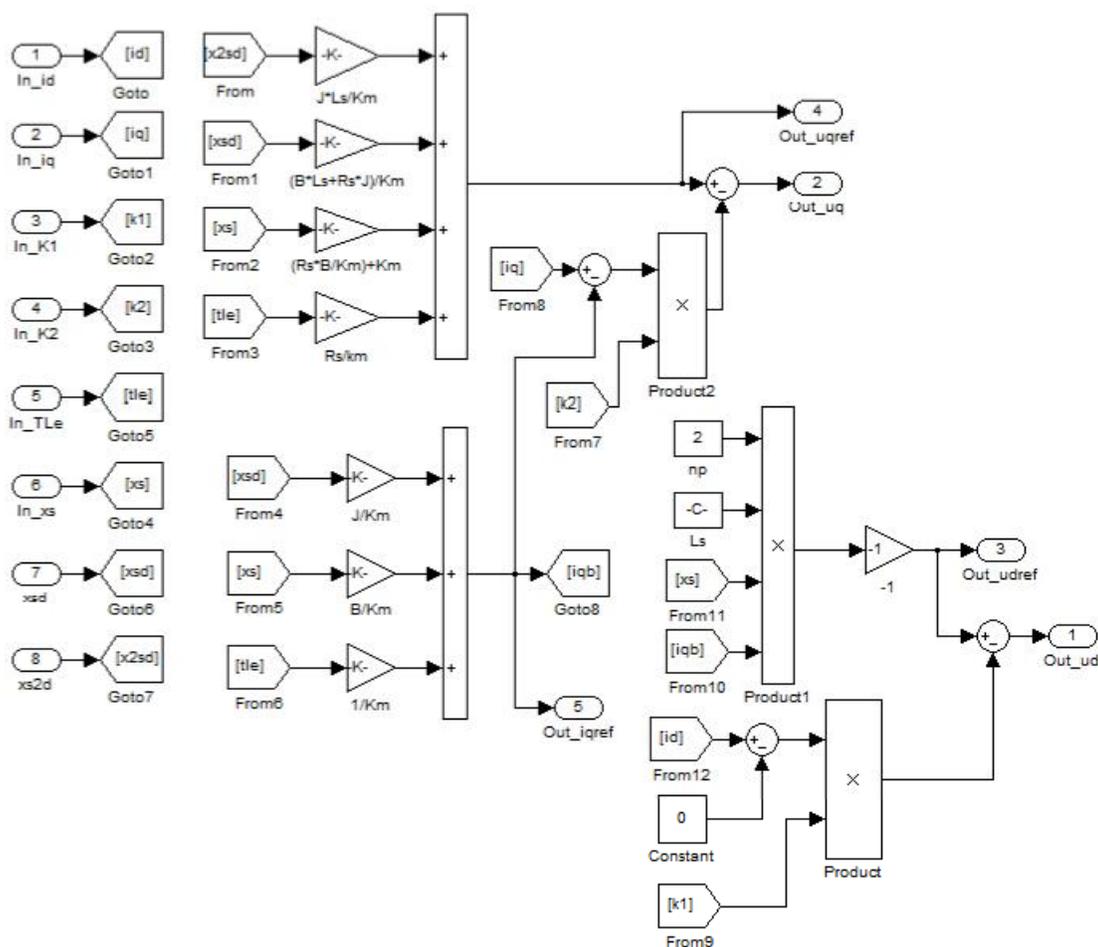


Figura 5.7: Subsistema del módulo del controlador basado en pasividad.

angular del controlador. A través de las trayectorias de  $i_d$  y  $\omega_m$  se calculan las trayectorias de referencia para  $i_q$ ,  $u_q$  y  $u_d$ .

### 5.3.3. Transformación de Park

Para llevar a cabo el diseño del controlador es necesario aplicar la transformada de Park al sistema trifásico  $(a, b, c/d-q)$ , debido a que se facilita la manipulación de las variables. Después de obtener la ley de control multivariable se aplica la transformada inversa  $(d-q/a, b, c)$ , la cual proporciona el voltaje trifásico que sirve como entrada al circuito PWM. En la Figura 5.9 se muestran los bloques de transformación en el marco de referencia rotatorio.

En la Figura 5.10 se observa la representación en bloques del sistema en ecuaciones (B.6). Las ecuaciones son implementadas en el bloque "Fcn".

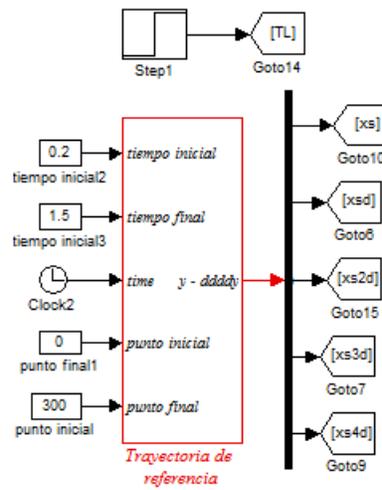


Figura 5.8: Trayectorias de referencias.

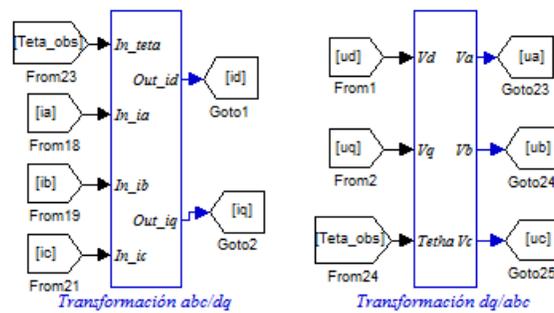


Figura 5.9: Transformación de Clarke.

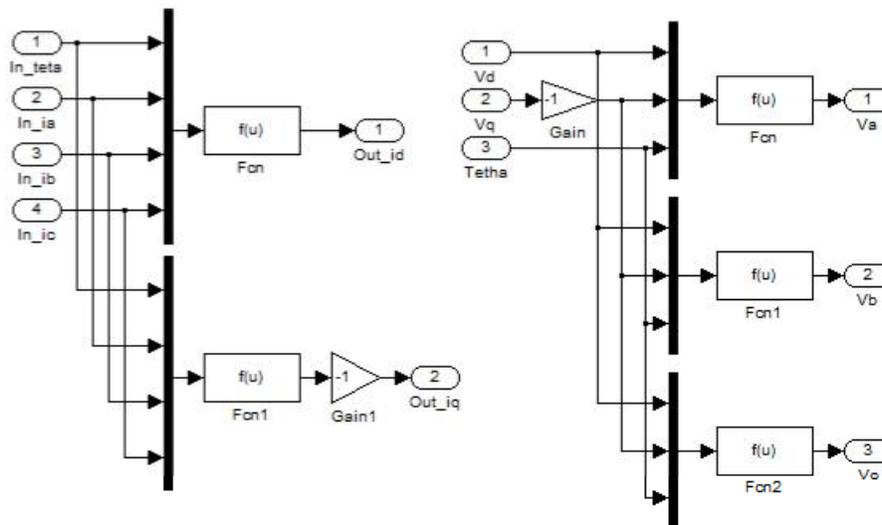


Figura 5.10: Subsistema del bloque de transformación de Park.

### 5.3.4. Transformación de Clarke

El diseño de los observadores de la FCEM se lleva cabo en el marco de referencia bifásico estacionario  $\alpha - \beta$ . Por lo tanto, el voltaje y la corriente trifásica son transformadas al marco de referencia estacionario mediante la transformación de Clarke (ver Figura 5.11).

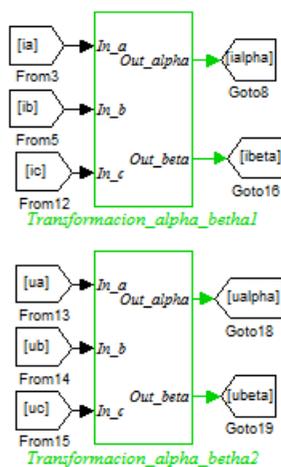


Figura 5.11: Transformación de Clarke.

Las ecuaciones de la transformada de Clarke presentadas en los anexos se representan en bloques de Simulink, tal como se muestra en el subsistema de la Figura 5.12.

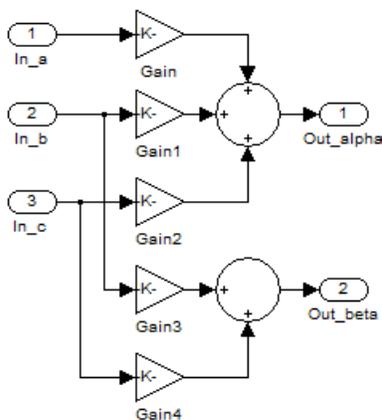


Figura 5.12: Subsistema del módulo de transformación de Clarke.

### 5.3.5. Observador GPI

El bloque del observador GPI para la estimación de la FCEM se muestra en la Figura 5.13. La cual tiene como entradas las señales de voltaje y de corriente en el marco de referencia

estacionario y las ganancias del polinomio Hurwitz de sexto orden. De este bloque se obtienen dos señales normalizadas que contienen información de la posición del rotor del MSIP.

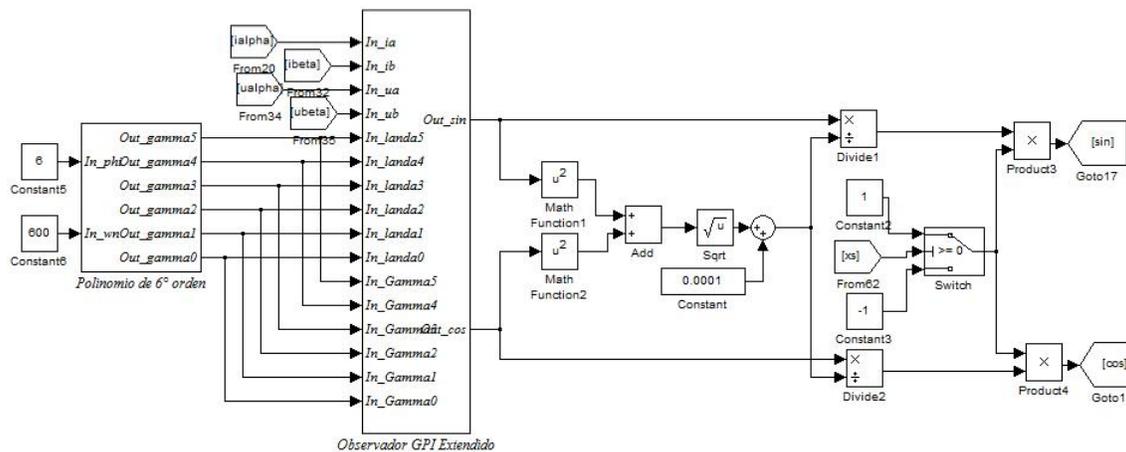


Figura 5.13: Observador GPI para la estimación de la FCEM.

El subsistema de la Figura 5.14 se observa la representación de las ecuaciones (4.28) y (4.29) en diagrama a bloques.

Las ganancias del observador son calculados de acuerdo al polinomio Hurwitz de sexto orden, con la cual se ingresan los valores del coeficiente de amortiguamiento y frecuencia natural. Las ecuaciones (4.35) en bloques simulink, se representan tal como se muestra en la Figura 5.15.

### 5.3.6. Estructura PLL

Posteriormente las señales generadas por el observador GPI pasan por un proceso de filtrado a través de una estructura PLL. El bloque PLL mostrado en la Figura 5.16 representa el diseño realizado. Se toman las señales del observador GPI como señales de referencia y las ganancias generadas por un polinomio Hurwitz de segundo orden.

El subsistema contenido en el bloque PLL se muestra en la Figura 5.17. A partir de este algoritmo se estima la variable de velocidad y posición del MSIP, además de eliminar sobrepicos causados por el observador GPI.

### 5.3.7. Observador de par de carga

Por último se realiza la representación del observador de par en bloques de simulink, para completar con el diseño propuesto. El bloque de la Figura 5.18 estima el par generado en el eje del motor, por lo que al incorporar la velocidad estimada y la corriente de cuadratura se calcula con precisión el parámetro de par.

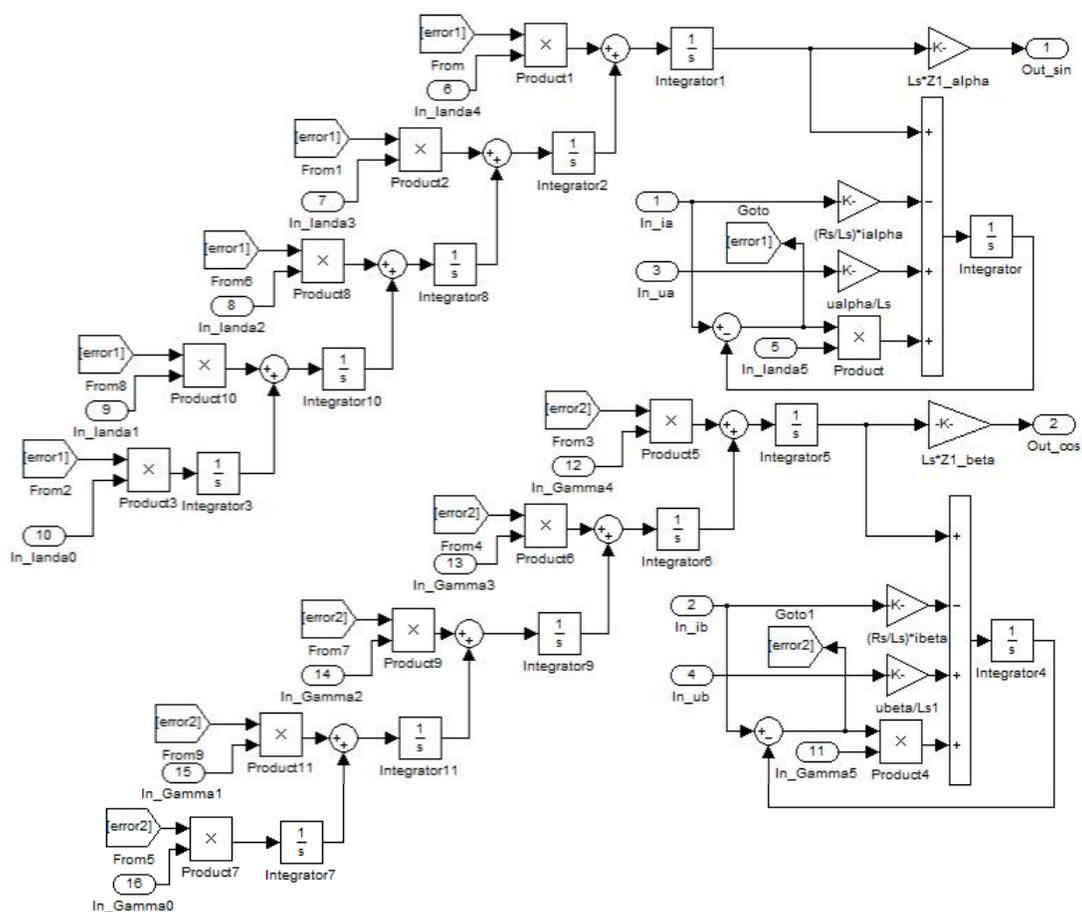


Figura 5.14: Subsistema del observador GPI.

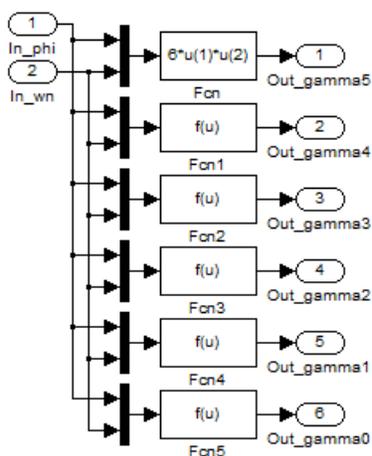


Figura 5.15: Subsistema del polinomio Hurwitz de 6o orden.

Al igual que todos los bloques, se obtiene la representación de la ecuación (4.54) en bloques de simulink. Tal como se muestra en la siguiente figura.

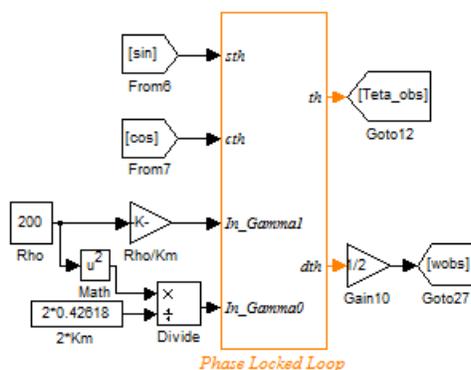


Figura 5.16: PLL (Lazo de Amarre de Fase).

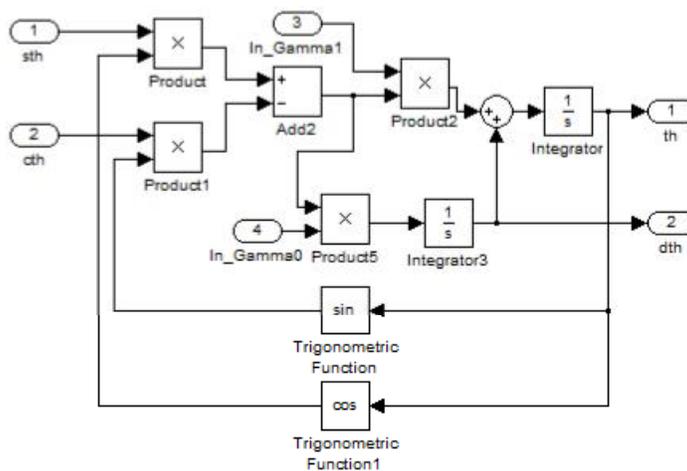


Figura 5.17: Subsistema del bloque PLL.

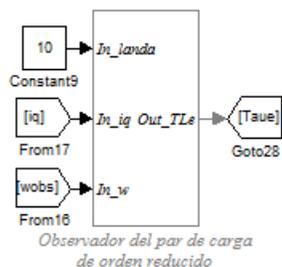


Figura 5.18: Observador de par de carga y términos no modelados.

## 5.4. Resultados de simulación

En esta sección se analizan los resultados obtenidos de la simulación del control de seguimiento de velocidad del MSIP, sin sensor de posición. Se realiza la simulación de una trayectoria suave de referencia y regulación de la velocidad del MSIP. Los resultados de la simulación del

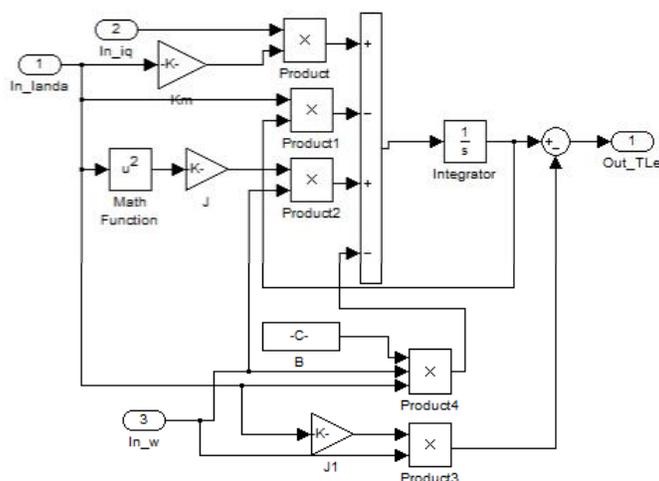


Figura 5.19: Subsistema del módulo de observador de par.

diagrama a bloques implementado en Matlab/Simulink<sup>®</sup> son presentados a continuación.

#### 5.4.1. Simulación para una trayectoria suave de referencia

En la Figura 5.20a) se aprecia la velocidad desarrollada por el MSIP. Se propone una velocidad de referencia de 300 rad/s con un arranque suave en un intervalo de tiempo entre  $[0, 1]$  segundos. En esta figura se incluye también la comparación de la velocidad mecánica del motor medido con un sensor, la velocidad estimada proporcionada por un observador PLL. Se aplica un par de carga de  $2 N - m$  sobre el rotor del motor, 2 segundos después de haber iniciado el arranque. Al aplicar la ley de control se observa que el controlador inyecta la potencia necesaria para que la velocidad estimada alcance a la señal de referencia sin ningún problema, aún después de haber aplicado un par de carga en el eje. En este proceso el rotor acelera de 0 a 1 segundo, llegando a mantener una velocidad estable.

Tiempo después de aplicar el par de carga, la ley de control hace que la velocidad del MSIP siga la velocidad de referencia sin perder la sincronismo entre el rotor y el estator. Aproximadamente 0,2 segundos es lo que tarda el controlador en volver a restablecer la velocidad del MSIP a la señal de referencia. La rapidez de convergencia dependerá de las ganancias del observador del parámetro de par de carga, esto sin afectar el desempeño de los observadores de FCEM, PLL y del mismo controlador.

En la Figura 5.20b) se muestra el error de velocidad que muestra la robustez del controlador desarrollado ante un cambio repentino de carga.

El perfil del par aplicado en el eje del MSIP se muestra la Figura 5.21a), donde inicialmente tiene un valor de 0 Nm, posteriormente después de 2 segundos cambia repentinamente a 2 Nm y se mantiene constante durante el resto de la simulación. Se observa que la señal del par de

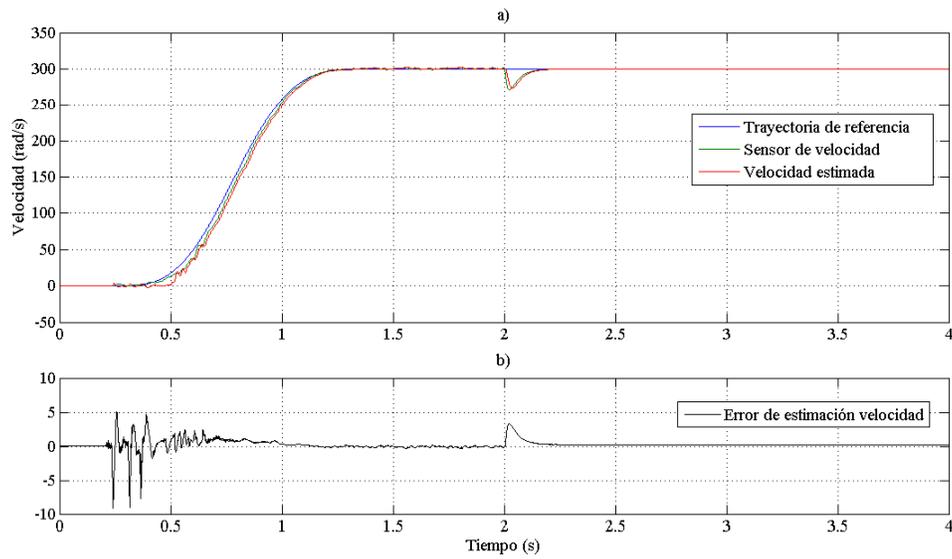


Figura 5.20: a) Velocidad mecánica del MSIP,  $\omega_m$ . b) Error de velocidad,  $e_{\omega_m}$ .

carga estimada sigue el perfil del par de carga aplicado. Este parámetro se retroalimenta al controlador para inyectar potencia cuando se presente algún cambio, sin necesidad de utilizar un sensor de par. El error de estimación se muestra en la Figura 5.21b), donde el error de estimación tiende a cero.

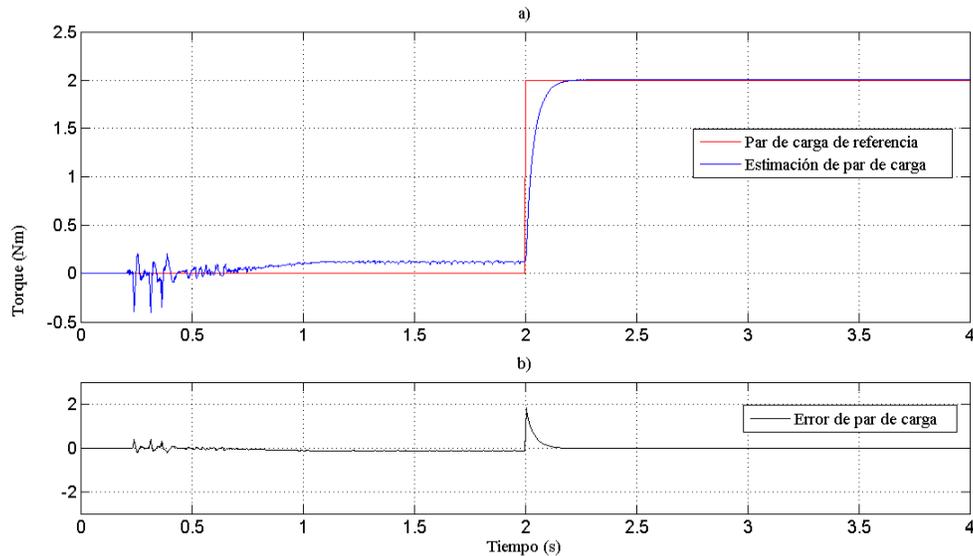


Figura 5.21: a) Par de carga en el eje del motor,  $\tau_L$ . b) Error de estimación del parámetro del par de carga,  $e_{\tau_L}$ .

Se propone una corriente directa de referencia,  $i_d^* = 0$ , para aprovechar el par máximo del

motor. En la Figura 5.22a) se observa como el controlador hace que la corriente  $i_d$  sea cercano al valor de referencia, teniendo un error de seguimiento lo más cercano a cero, tal como se muestra en la Figura 5.22b).

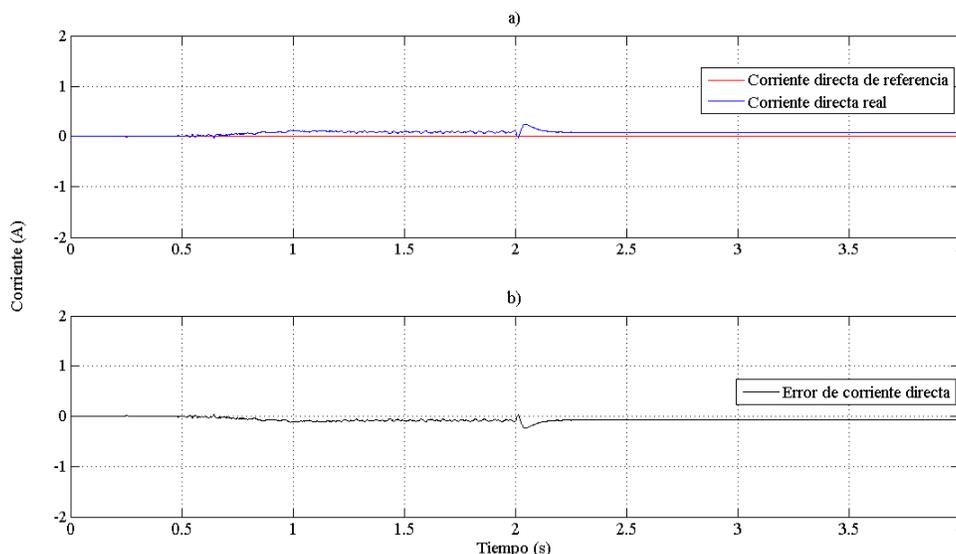


Figura 5.22: a) Corriente directa,  $i_d$ . b) Error de corriente de directa,  $e_{i_d}$ .

Conforme a la planitud del sistema se determina la corriente cuadratura de referencia para  $i_q^* = (\omega_m^*, i_d^*)$ , la cual se muestra en la Figura 5.23a). Se tiene que la corriente de cuadratura  $i_q$  aumenta de acuerdo a la velocidad desarrollada por el motor y a la aplicación del par de carga en el eje del motor. El controlador actúa para seguir al valor de referencia y se observa que el error de convergencia tiende a cero (ver Figura 5.23b)).

Se determinan los valores para las leyes de control de referencia  $u_d^*$  y  $u_q^*$ , mostrados en las Figuras 5.24 y 5.25 con sus respectivos errores de convergencia. Se observa que las variables del sistema vuelven a su valor de referencia cuando estos son afectados por la aplicación de par de carga en el sistema.

La fuente de voltaje trifásica del MSIP es proporcionada por el inversor trifásico. A través del circuito PWM se convierte la fuente de voltaje de CD de 300 V a un voltaje trifásico de CA balanceado. La obtención de la señal de control hacia el circuito PWM es dado por el controlador. En la Figura 5.26a) se muestran los voltajes de CA generados en cada una de las fases correspondientes a las leyes de control, se observa un aumento de voltaje  $t = 2$  segundos, debido a la aplicación de par en el eje del motor. En la figura 5.26b) se muestra un acercamiento del voltaje trifásico y se observa como se va generando los voltajes de cada fase durante el arranque del motor.

La corriente que circula en cada uno de los devanados del MSIP se muestra en la Figura 5.27a). Notése que no existe sobrepicos de corriente durante el arranque, como comúnmente sucede

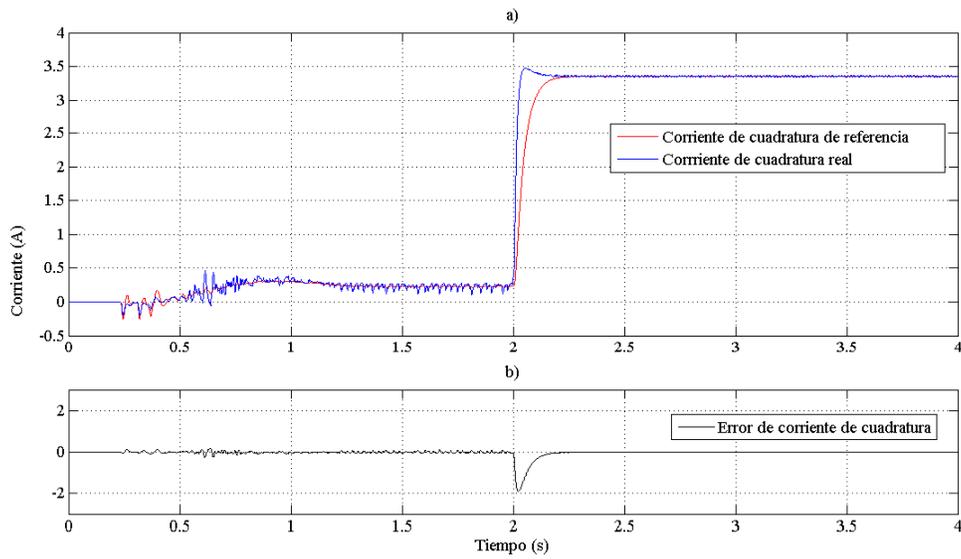


Figura 5.23: a) Corriente de cuadratura,  $i_q$ . b) Error de corriente de cuadratura,  $e_{i_q}$ .

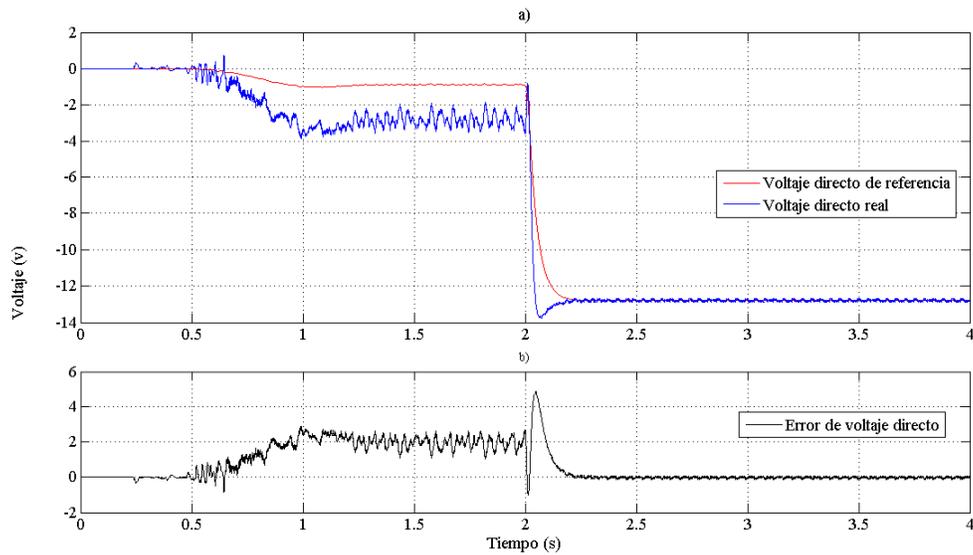


Figura 5.24: a) Voltaje de control directo,  $u_d$ . b) Error de de voltaje de control directo,  $e_{u_d}$ .

en un arranque abrupto. Al generar una trayectoria suave de referencia en lugar de un escalón, se mejora el desempeño del motor. La inercia que existe en el rotor durante el arranque no repercute cuando la velocidad se establece a la velocidad final de referencia, permitiendo el ahorro de energía. En la Figura 5.27b) se observa el consumo de corriente en cada uno de los devanados antes y después de aplicar el par de carga en el MSIP.

Por otro lado, para la estimación de las funciones de FCEM es necesario aplicar la transformada

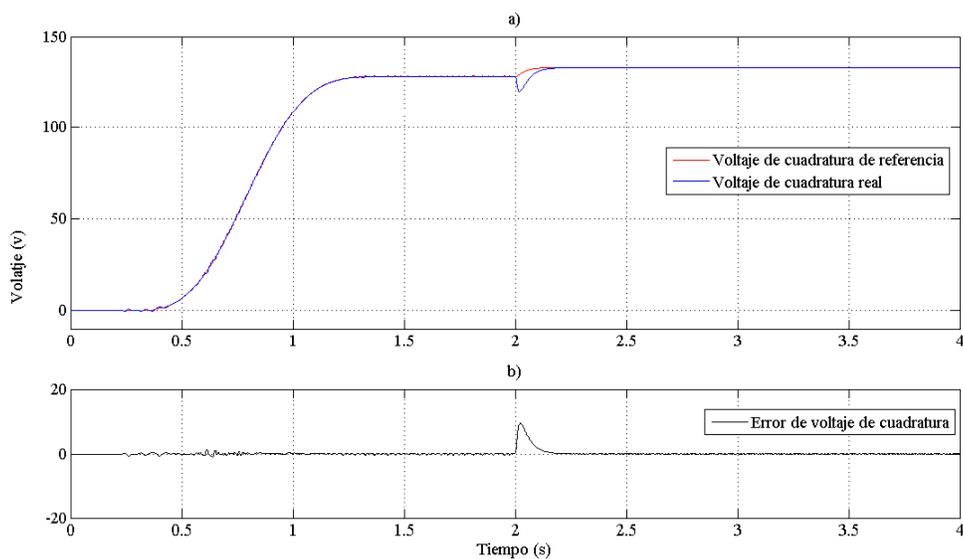


Figura 5.25: a) Voltaje de control de cuadratura,  $u_q$ . b) Error de voltaje de control de cuadratura,  $e_{uq}$ .

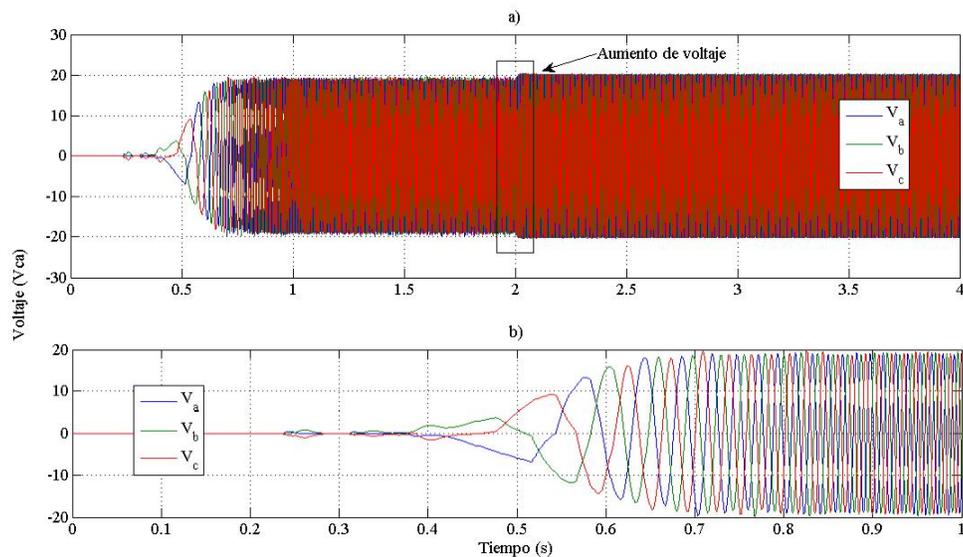


Figura 5.26: a) Voltaje trifásico suministrado al MSIP. b) Acercamiento del voltaje trifásico durante el arranque.

de Clark a los voltajes y corrientes mostrados anteriormente. En la Figura 5.26a) y b) se muestran los voltajes y corrientes en el eje  $\alpha - \beta$  utilizados en el observador GPI de alta ganancia.

En la Figura 5.29a) se muestran la estimaciones de las funciones de FCEM normalizadas en

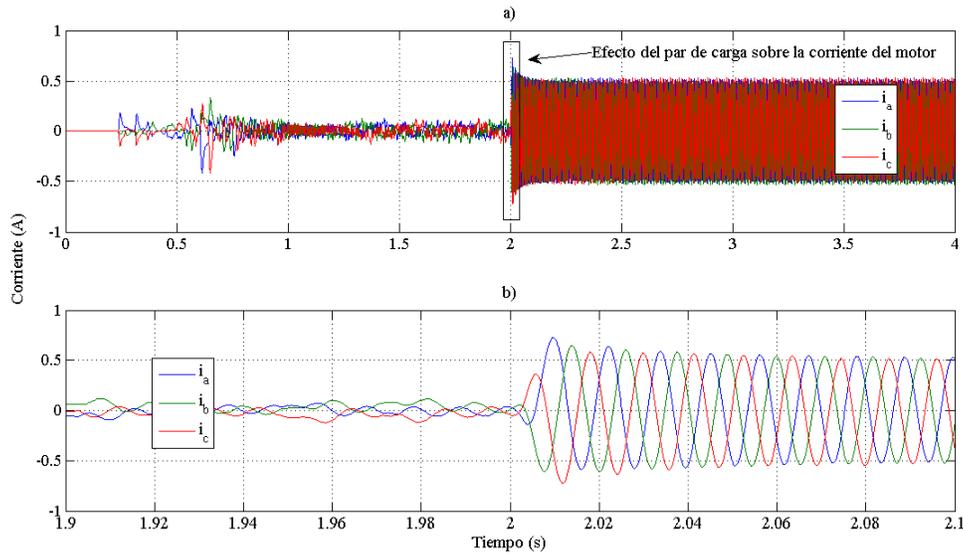


Figura 5.27: a) Corriente trifásica suministrado al MSIP. b) Acercamiento de la corriente trifásica ante el cambio de par de carga.

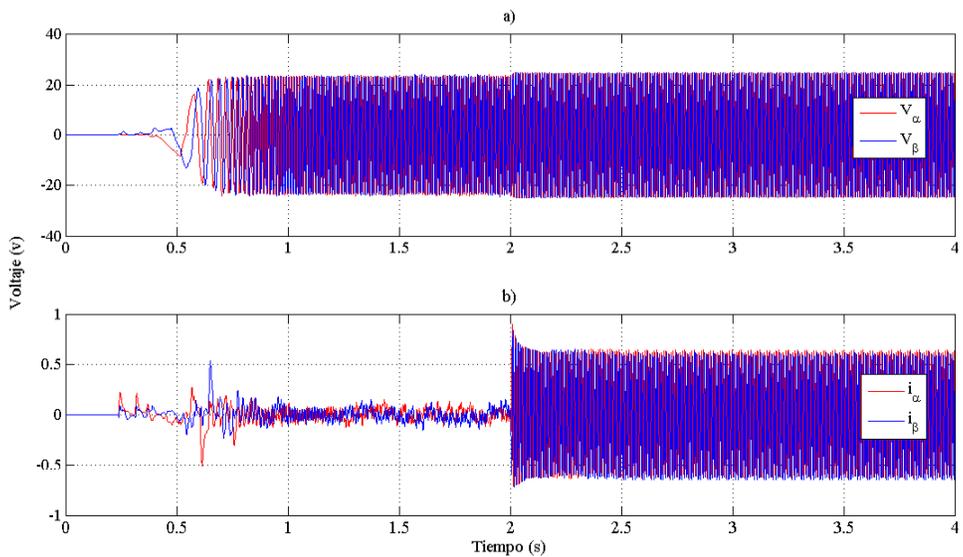


Figura 5.28: a) Voltaje trifásico en el eje  $\alpha - \beta$ . b) Corriente trifásica en el eje  $\alpha - \beta$ .

el eje de referencia  $\alpha - \beta$ , generados por los IP del eje del motor. Mediante la estimación de las funciones de FCEM es posible obtener la posición del rotor, aplicando una función trigonométrica (tangente inversa) que nos permite extraer el valor del ángulo de rotor  $\theta$ . Sin embargo, se observa que la estimación contiene ruido indeseable, por lo que no es factible utilizar estas funciones sin haber realizado una etapa de filtrado. Para mostrar este hecho,

se hace un acercamiento durante el arranque, tal como se muestra en la Figura 5.29b) y se observa la existencia de ruido acústico en las estimaciones de funciones de FCEM.

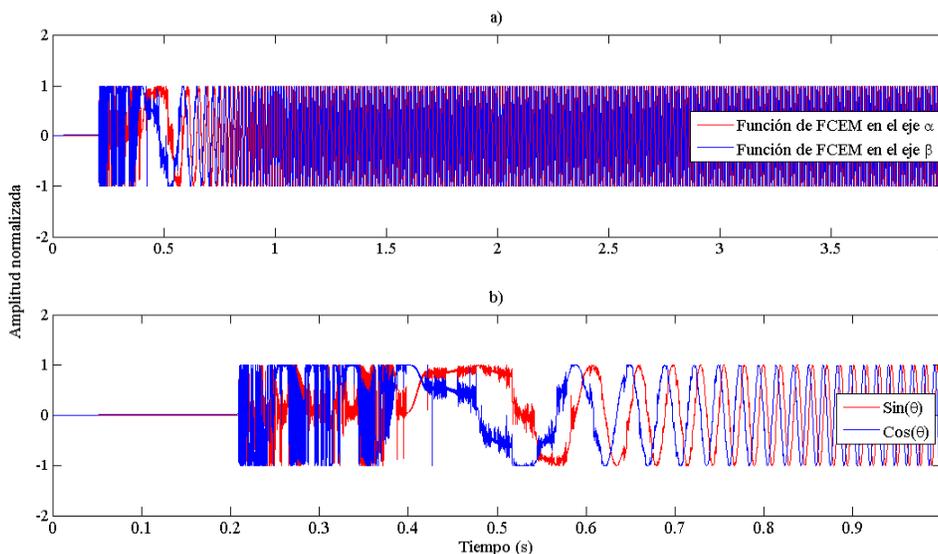


Figura 5.29: a) Funciones de FCEM normalizados. b) Acercamiento de la estimación de las funciones de FCEM durante el arranque.

Durante el proceso de simulación, la posición angular que se utilizó como variable de retroalimentación para las transformaciones  $abc/dq/$  y  $dq/abc$  se extrajo del PLL. Permitiendo un mejor desempeño durante la implementación del controlador. En la Figura 5.30a) se muestra la posición angular estimada por el PLL y por otro lado la tangente inversa de las funciones de FCEM, la cual representa la estimación de la posición angular. Haciendo un acercamiento durante el arranque, tal como se muestra en la 5.30b) se observa que no es recomendable retroalimentar la posición angular generado por el observador GPI, ya que el error es afectado por el ruido acústico (ver Figura 5.30c)), provocando la inestabilidad en el sistema.

El PLL atenúa y rechaza las componentes de alta frecuencia o ruido acústico, extrayendo la señal fundamental. Para visualizar a fondo este hecho, se hace la comparación entre la posición angular generado por el PLL y la medición directa de la posición angular del motor, tal como se muestra en la Figura 5.31a). Se hace un acercamiento durante el arranque (Ver Figura 5.31b)) y se observa que con el uso de un PLL el ruido acústico es eliminado. En la Figura 5.31c) se muestra el error que existe en el PLL y la medición del sensor de velocidad.

Se concluye que es factible utilizar la variable de la posición angular proporcionado por el PLL, ya que el error que existe entre ellos es aproximadamente a cero.

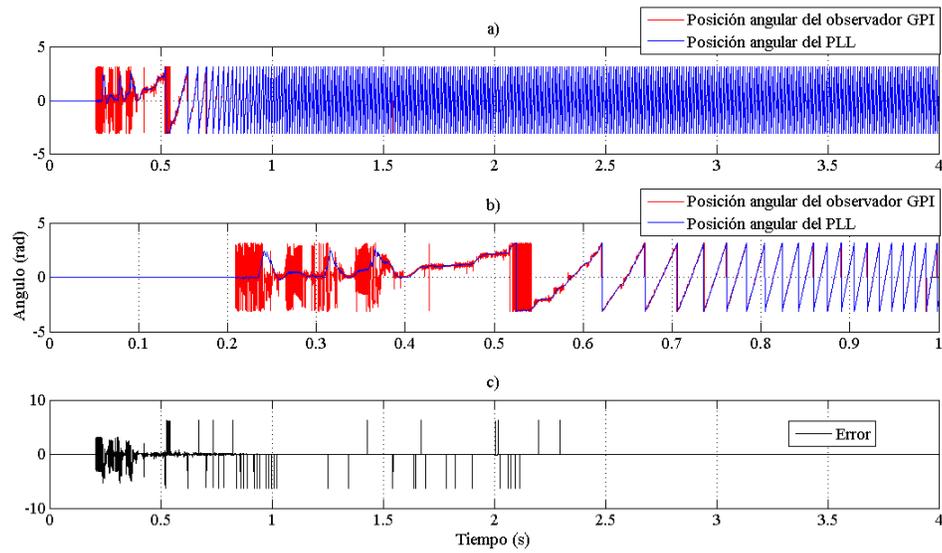


Figura 5.30: a) Posición angular de los observadores, GPI y PLL. b) Acercamiento de la posición durante el proceso de estimación. c) Error entre los estimadores GPI y PLL

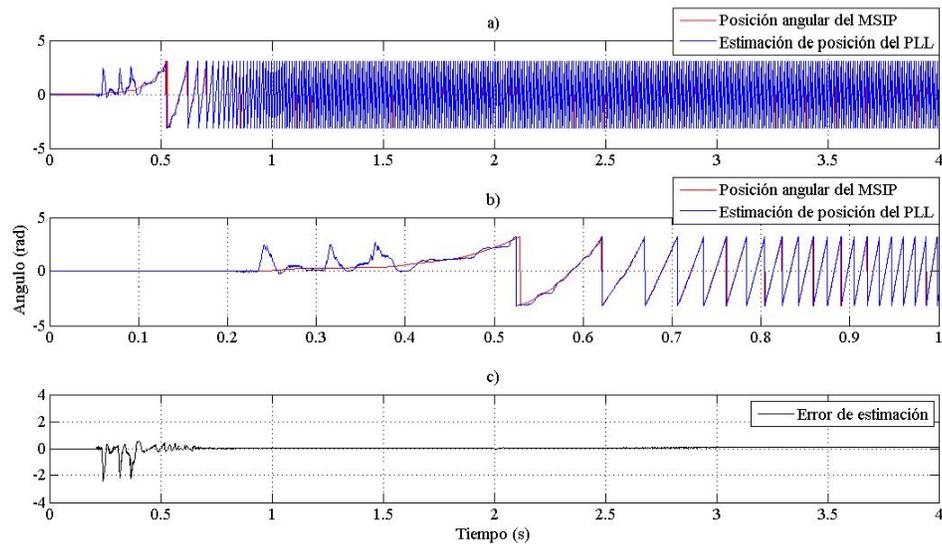


Figura 5.31: a) Posición angular del motor,  $\theta_m$ , y del PLL. b) Acercamiento de la posición durante el arranque. c) Error de estimación

#### 5.4.2. Simulación de la regulación del MSIP

Posteriormente se realiza una prueba de regulación de velocidad para el MSIP ante un cambio repentino de par de carga. Se propone una velocidad de referencia para ambos sentidos, tal como se muestra en la Figura 5.32a). Se observa que la velocidad desarrollada por el motor

sigue complementante a la velocidad de referencia, aún siendo perturbado en  $t = 1$  seg. por un par de carga en el eje del motor. El error entre la velocidad de referencia y la velocidad real del motor se muestra en la Figura 5.32b).

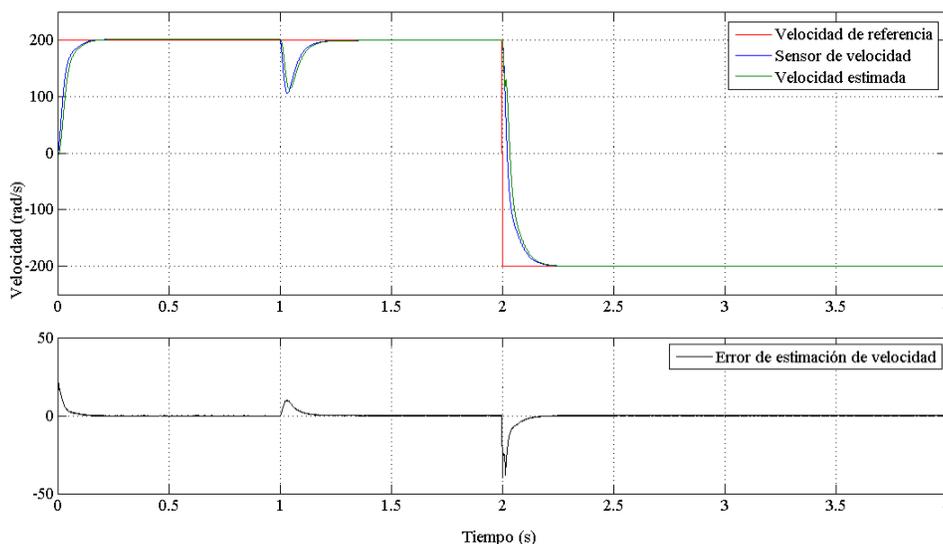


Figura 5.32: a) Regulación de velocidad del MSIP. b) Error de velocidad,  $e_{\omega_m}$

El controlador genera las leyes de control  $u_d$  y  $u_q$  para hacer que la velocidad del motor vuelva a su valor de referencia, tal que la posición retroalimentada hacia las transformaciones es estimada con precisión. Por otro lado, la velocidad retroalimentada hacia el observador de par de carga también es estimada con precisión, lo cual hace que se estime de manera real el valor del par de carga aplicado en el eje del motor. Estos valores estimados proporcionan la información necesaria para que el controlador inyecte la potencia necesaria hacia el motor. Durante el cambio de dirección en  $t = 2$  seg. se observa que la rapidez de respuesta dependerá del valor del coeficiente de amortiguamiento. En la figura 5.33a) se observa la respuesta de la velocidad ante el cambio de dirección para distintos coeficientes de amortiguamiento,  $\xi$ . En figura 5.33b) se nota que tomando un valor de  $\xi = 6$  el cambio de dirección es más rápido y suave para establecerse en la velocidad de referencia negativa.

El perfil del par de carga de referencia se muestra en la Figura 5.34a), donde se observa que el par de carga estimado difiere un poco del valor de referencia. Esto debido al cambio de dirección, la cual afecta a la ley de control, haciendo que se aleje ligeramente del valor deseado. El error de estimación del parámetro de par de carga se muestra la Figura 5.34b).

La corriente de cuadratura que demanda el MSIP se muestra en la Figura 5.36a), el consumo promedio después de aplicar el par de carga es de 3 A. La corriente es obtenida de los sensores de corriente es aproximadamente igual a la corriente de referencia, por lo que el error entre estas dos señales se muestra en la Figura 5.36b). Nótese que la corriente de cuadratura aumenta

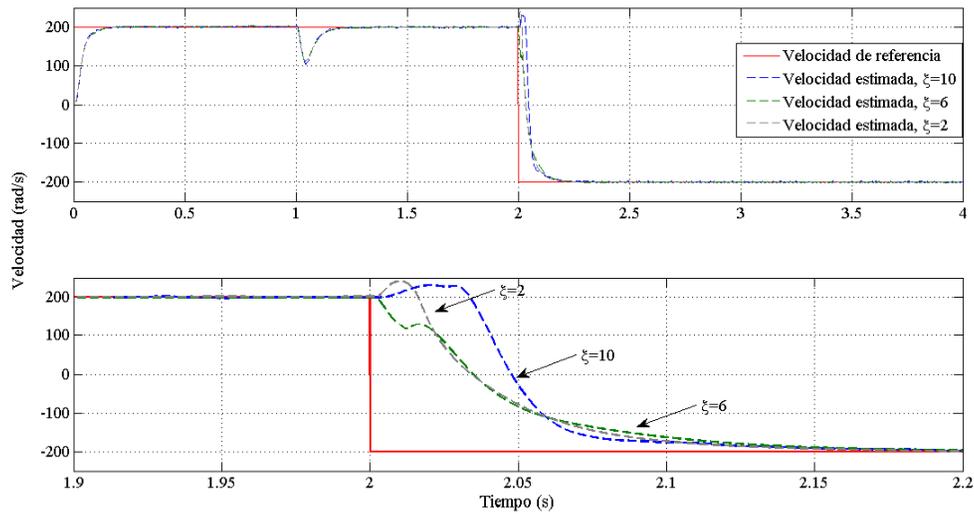


Figura 5.33: a) Efecto del valor del coeficiente de amortiguamiento,  $\xi$ , durante el cambio de dirección de la velocidad. b) Acercamiento de la velocidad durante el cambio de dirección.

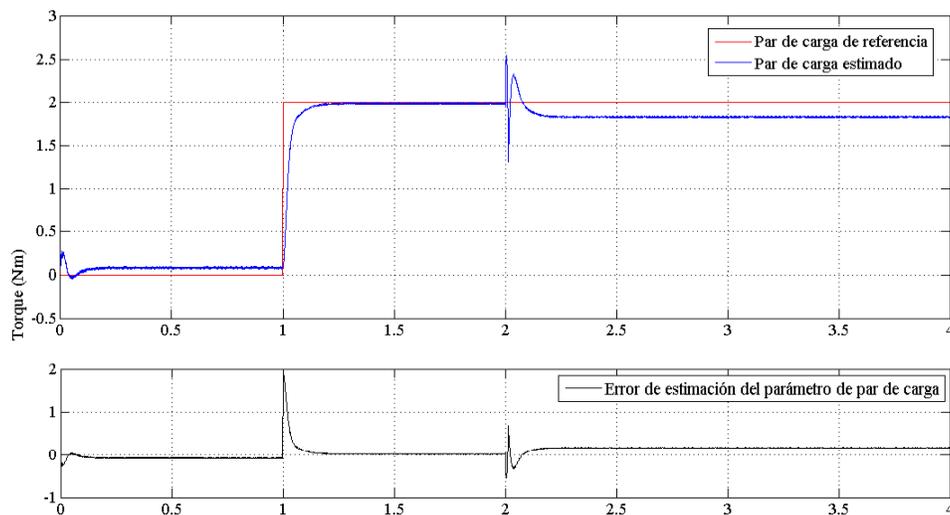


Figura 5.34: a) Par de carga en el eje del motor,  $\tau_L$ . b) Error de estimación del parámetro de par de carga.

debido al cambio abrupto, aplicación de par y al cambio de dirección de la velocidad.

Se propone una  $i_d = 0$ , para aprovechar el par máximo del motor [7], donde el efecto debido al cambio de dirección no repercute en la señal medida. Lográndose así un error aproximadamente a cero, tal como se muestra en la Figura 5.35.

De acuerdo a la planitud direfencial se determinan los voltajes de control de referencia  $u_d^*$  y  $u_q^*$ ,

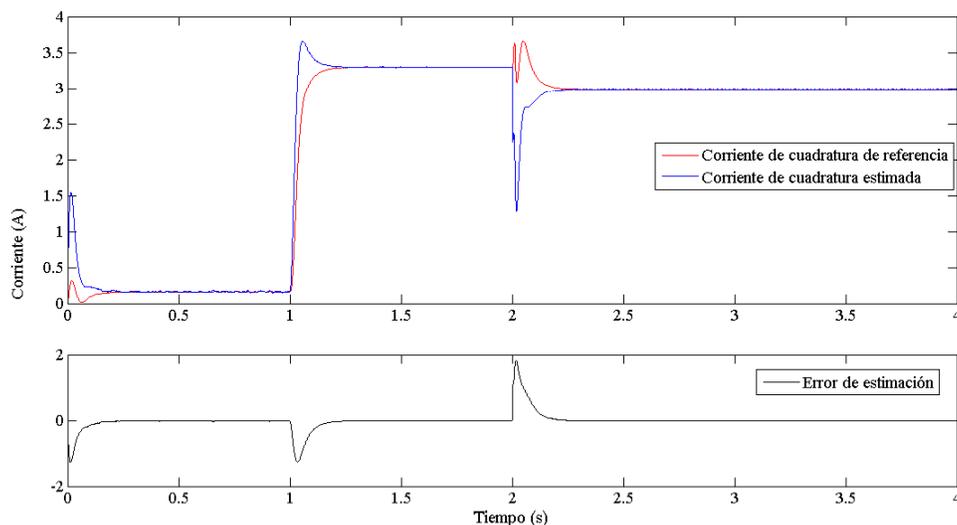


Figura 5.35: a) Corriente de cuadratura,  $i_q$ . b) Error de corriente de directa,  $e_{i_q}$ .

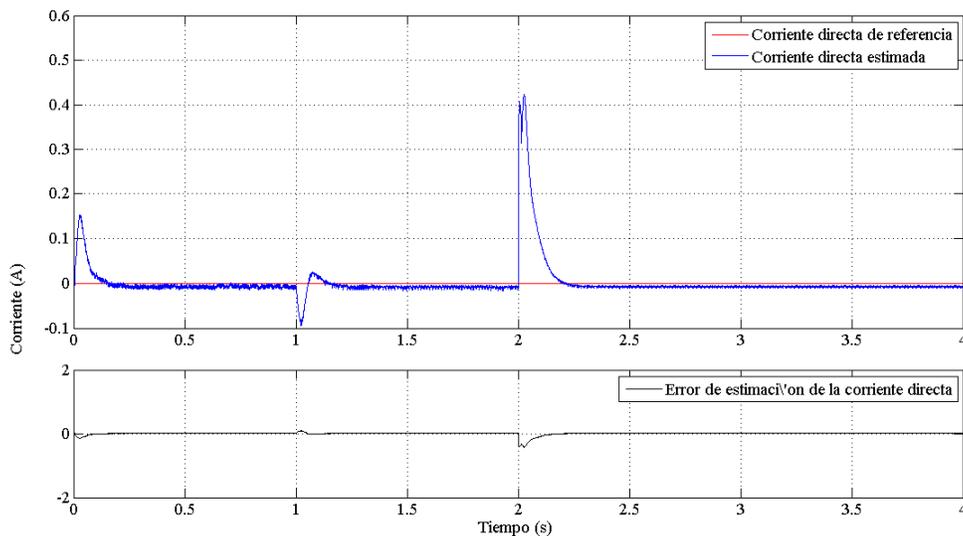


Figura 5.36: a) Corriente directa,  $i_d$ . b) Error de corriente directa,  $e_{i_d}$ .

las cuales se muestran en las Figuras 5.37 y 5.38. Se observa que el voltaje directo es afectado por el cambio de dirección de la velocidad, mientras que el voltaje de cuadratura se apega a la señal de referencia.

El voltaje trifásico suministrado por el inversor se muestra en la Figura 5.39a), donde sufre un aumento repetido debido al arranque y a la aplicación de par en el eje del motor (véase Figura 5.39b)). Durante el cambio de dirección se observa un cambio de fase entre la rama  $b$

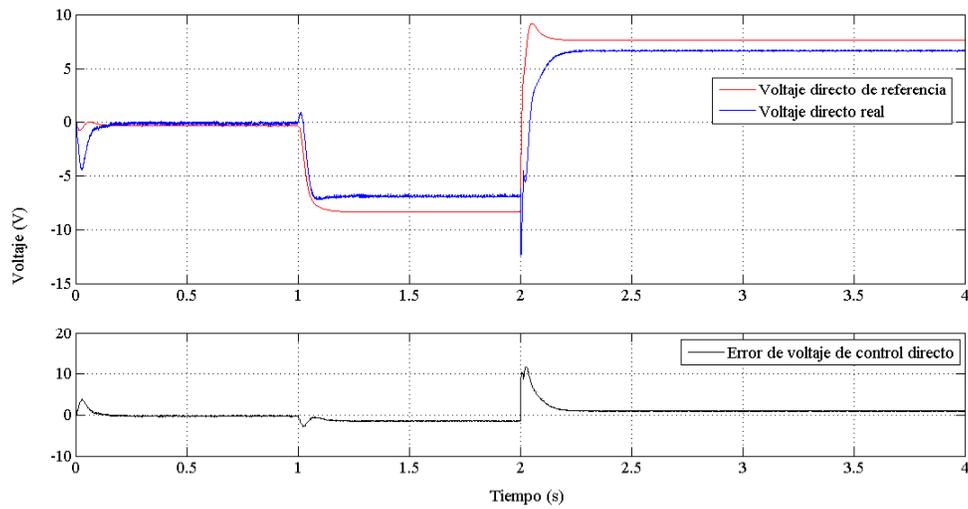


Figura 5.37: a) Voltaje de control directo,  $u_d$ . b) Error de de voltaje de control directo,  $e_{u_d}$ .

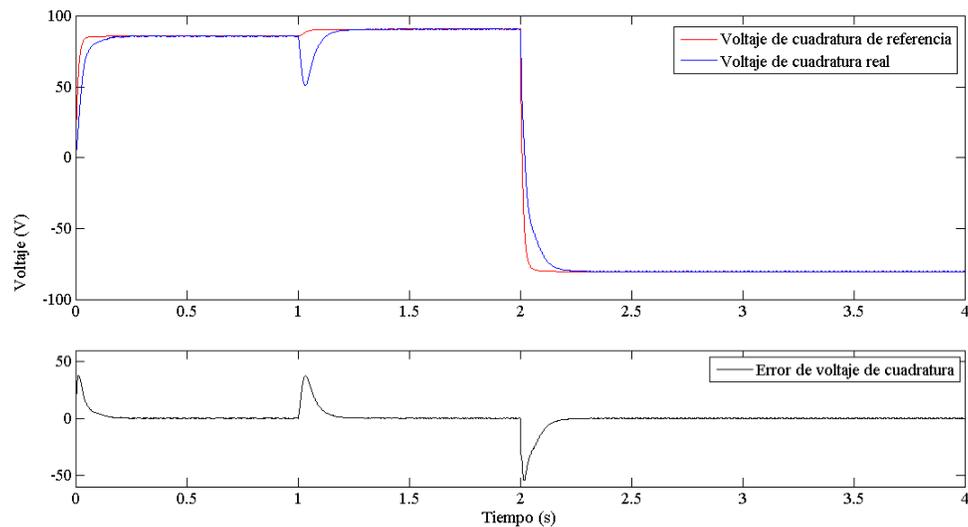


Figura 5.38: a) Voltaje de control de cuadratura,  $u_q$ . b) Error de voltaje de control de cuadratura,  $e_{u_q}$ .

y  $c$ , tal como se muestra en la Figura 5.39c).

La corriente trifásica que circula a través del motor se muestra en la Figura 5.40a). Antes de la aplicación de par, la corriente es mínima (aproximadamente 0,5 A), solamente durante el arranque sufre un aumento abrupto tal como se muestra en la Figura 5.40b). Al igual que el voltaje, las fases  $b$  y  $c$ , son intercambiadas (véase Figura 5.40b).

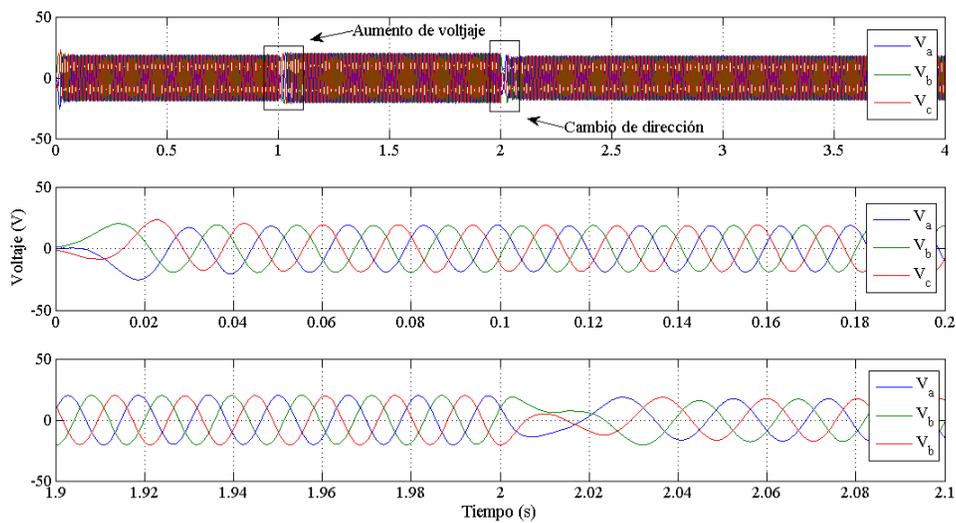


Figura 5.39: a) Voltaje trifásico suministrado al MSIP. b) Acercamiento en el arranque por regulación. c) Acercamiento durante el cambio de dirección.

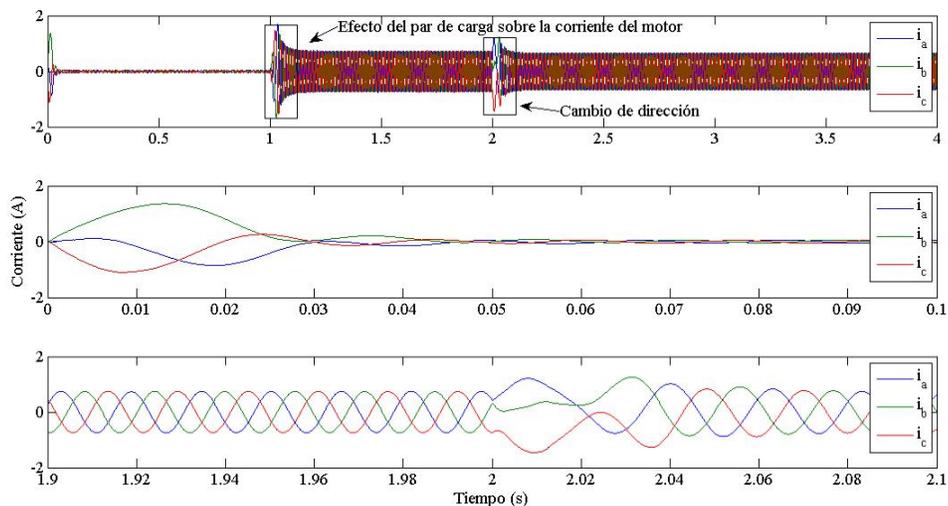


Figura 5.40: a) Corriente trifásica suministrado al MSIP. b) Acercamiento en el arranque por regulación. c) Acercamiento durante el cambio de dirección.

Las señales de voltaje y corriente utilizados en el observador GPI en el eje de referencia  $\alpha - \beta$  son mostradas en la Figura 5.41.

Las funciones de FCEM generadas por el observador GPI son normalizadas a la unidad, tal como se muestra en la Figura 5.42a). Se observa una distorsión en el arranque, esto debido a la ausencia de señal en la estimación y a la afectación por ruido acústico; conforme la señal en

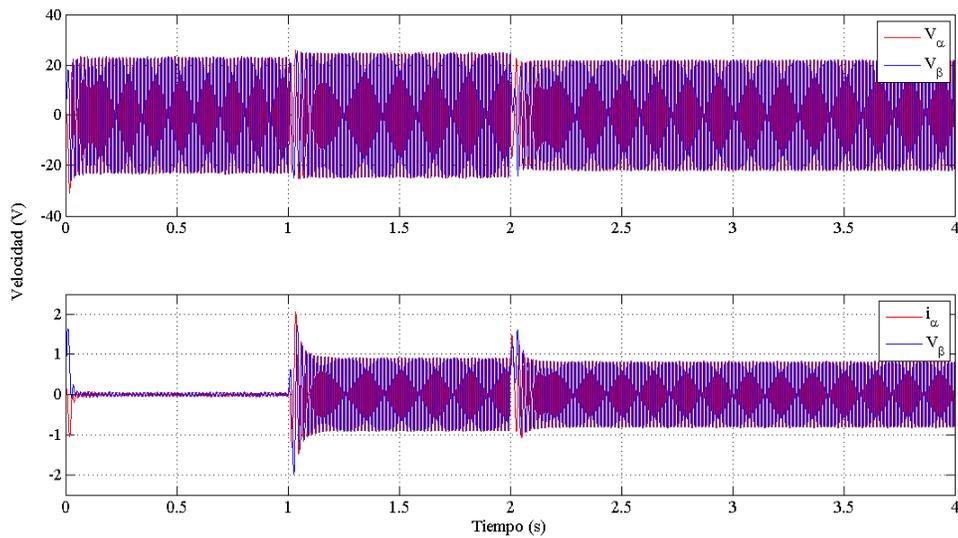


Figura 5.41: a) Voltaje trifásico en el eje  $\alpha - \beta$ . b) Corriente trifásica en el eje  $\alpha - \beta$ .

corriente va en aumento, la estimación se corrige y se sincroniza con la potencia suministrada en los devanados del estator (véase Figura 5.42b)). En el cambio de dirección se observa que las señales de las funciones de FCEM son invertidas, sufriendo una deformación en el intervalo de tiempo  $[2, 2,02]$  (véase Figura 5.42c)).

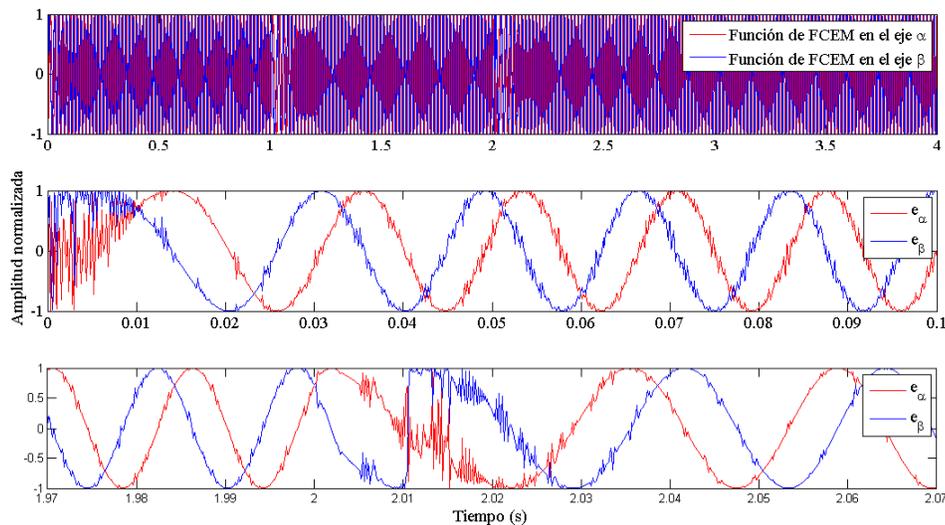


Figura 5.42: a) Estimación de las funciones de FCEM normalizados a uno. b) Acercamiento durante el arranque. c) Acercamiento durante el cambio de dirección

Como se mencionó anteriormente, la información de la posición angular puede ser tomada

por el observador GPI, utilizando simplemente un función trigonométrica que permita extraer el valor de  $\theta_m$ , sin embargo, no es muy recomendable debido a la presencia de ruido en la estimación. Por lo tanto, se filtran las señales a través de un PLL para eliminar el ruido acústico. En la Figura se 5.43 se muestran las posiciones estimadas por el observador GPI y el PLL, y se observa que nuevamente la posición dada por el PLL, sigue presentando una señal libre de ruido durante el arranque y en el cambio de dirección,

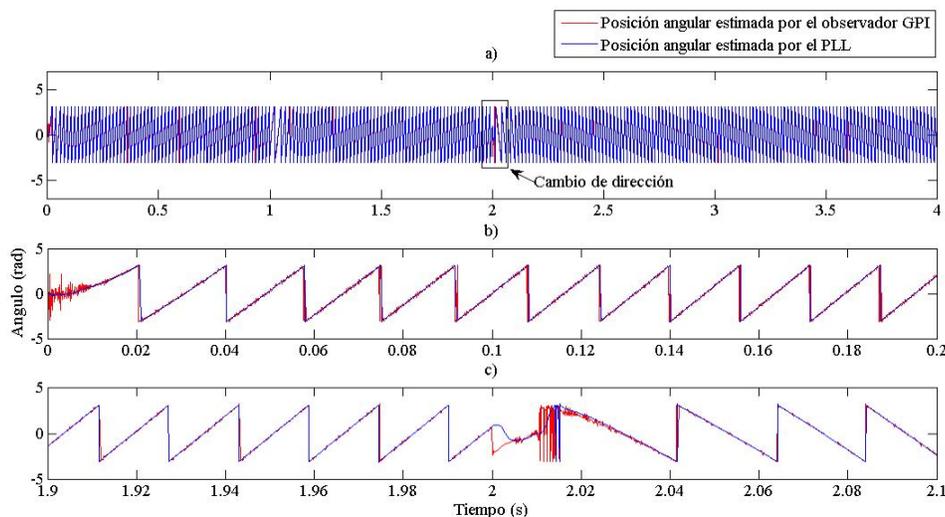


Figura 5.43: a) Posición angular de los observadores, GPI y PLL. b) Acercamiento de ambos observadores durante el arranque. c) Acercamiento durante el cambio de dirección.

La señal de posición dada por el PLL, se retroalimenta hacia las transformación como una señal de medición directa, tal como se muestra en la Figura 5.44a). Se observa que la posición angular estimada tiende al valor real de la posición angular mecánica del motor, teniendo como resultado un error aproximadamente a cero (véase Figura 5.44b)).

### 5.4.3. Comparativa entre el controlador basado en pasividad y el control por campo orientado

Con el fin de mostrar el desempeño del controlador basado pasividad durante el desarrollo de la simulación, se implementó otro controlador mediante campo orientado (FOC, por sus siglas en inglés) para hacer un comparativa en cuanto al desempeño en la regulación de la velocidad angular. Se utilizan los mismos observadores GPI y el observador basado en PLL para la estimación de la posición y velocidad angular del MSIP. Las ganancias son modificadas para seguir una trayectoria de referencia deseada. En la figura 5.45 se observa el desempeño de ambos controladores, en donde se propone una velocidad de referencia de  $\pm 200$  rad/s, tal

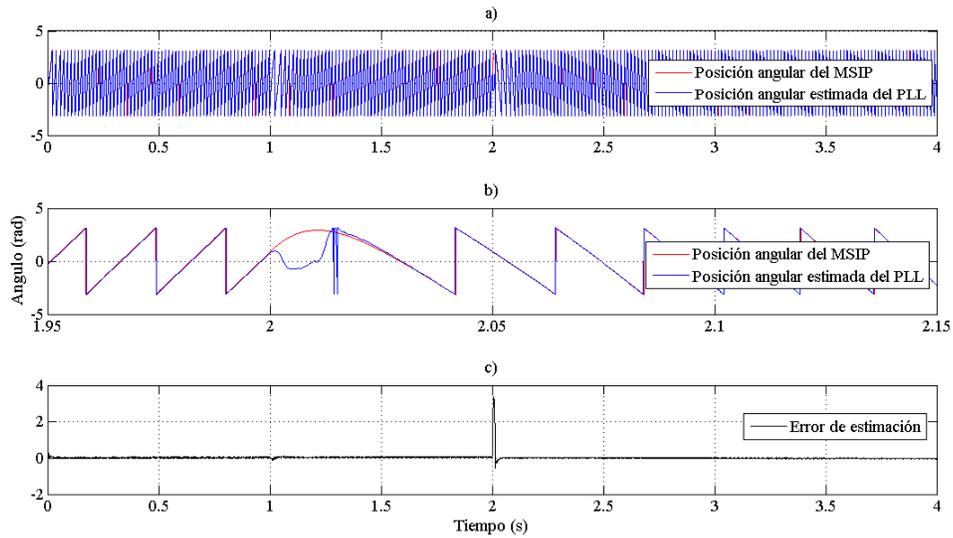


Figura 5.44: a) Posición angular del motor,  $\theta_m$ , y del PLL. b) Acercamiento de la posición durante el proceso de estimación. c) Error de estimación.

que el cambio de dirección se realiza a los 2 seg.

Durante el proceso de sintonización de las ganancias del FOC se notó que el sistema se desestabiliza cuando las ganancias de estabilización varían de un valor a otro. Esto debido a que los lazos de control involucran controladores proporcionales integrales (PI) de alta ganancia, que son sensibles ante estas variaciones. Además se observa que durante el arranque y el cambio de dirección, la velocidad es afectada por sobretiro, provocando un alto consumo en corriente. Por otro lado, se observa que durante la aplicación de par, la velocidad de respuesta es más rápida que el controlador basado en pasividad. Sin embargo, con este ejemplo se demuestra que mediante la utilización de los observadores GPI y del PLL para la estimación de la posición y velocidad angular, es posible implementar esta técnica de control.

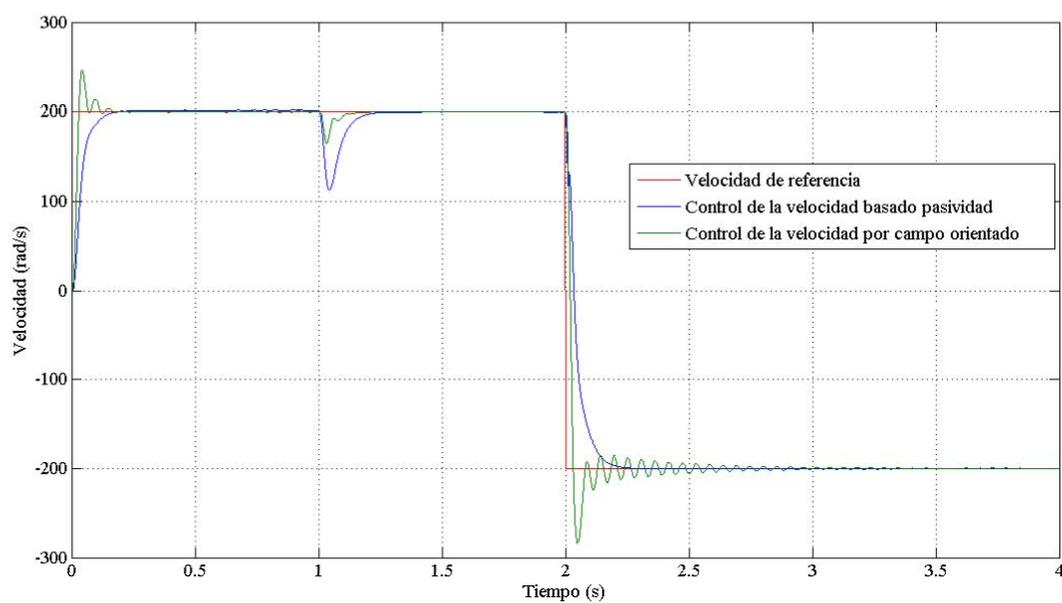


Figura 5.45: Comparativa entre el controlador basado en pasividad y el FOC

# Capítulo 6

## Resultados experimentales y conclusiones

En este capítulo se describe cada uno de los componentes utilizados en la plataforma experimental. Y se presentan los resultados experimentales, obtenidos la adquisición de datos del módulo dSPACE, a través del software "ControlDesk<sup>®</sup>".

### 6.1. Plataforma experimental

En la Figura 6.1 se muestra la plataforma experimental utilizada para las pruebas de laboratorio. Las señales de control son generados por el módulo dSPACE, que sirven para conmutar el inversor y generar la potencia necesaria para el MSIP de acuerdo a la trayectoria de referencia deseada. Mediante el software Control Desk se hace la manipulación del módulo dSPACE, así como la obtención de los datos de cada señal que se muestran a lo largo de esta sección. La

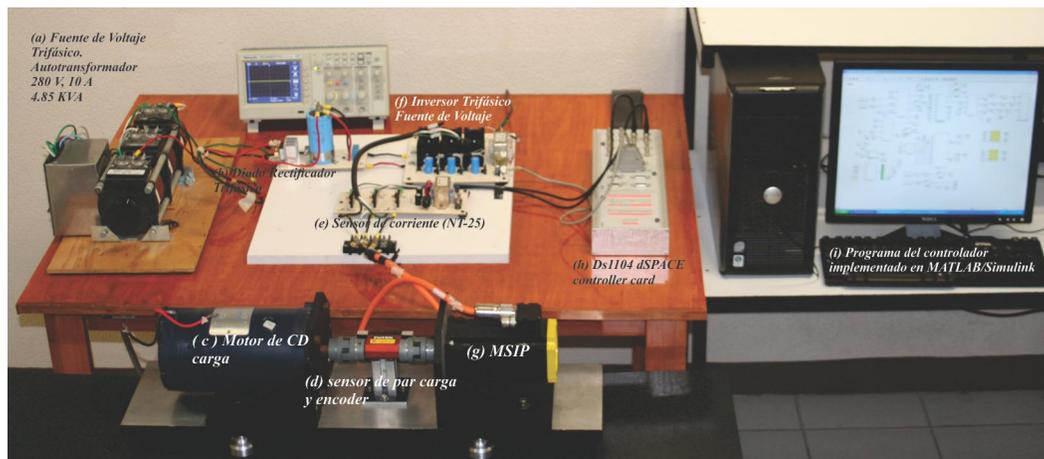


Figura 6.1: a) Plataforma experimental

plataforma experimental esta conformada por los siguientes elementos:

1. Fuente de voltaje trifásico.
2. Diodo rectificador trifásico.
3. Motor de CD/Dinamómetro.
4. Sensor de par de carga.
5. Sensores de corriente.
6. Inversor trifásico fuente de voltaje.
7. Motor Síncrono de Imanes Permanentes.
8. DS1104 dSPACE.
9. Programa del controlador implementado en MATLAB/Simulink.

### 6.1.1. Autotransformador trifásico

El suministro de alimentación de potencia es proporcionado por un autotransformador trifásico denominado “variac”. Esta es una máquina eléctrica, de construcción y características similares a las de un transformador trifásico, pero con la diferencia de que sus núcleos son variables, con esto se consigue cambiar la relación de transformación para cada fase. El variac emplea tres autotransformadores monofásicos, donde los circuitos magnéticos son completamente independientes, sin que se produzca una reacción o interferencia alguna entre los flujos. Al igual que un autotransformador monofásico se le varía el núcleo de transformación, el variac varía también sus tres núcleos al mismo tiempo. La variación de transformación se produce mediante la rotación de una perilla acoplada a un eje, fijado en cada autotransformador de fase (Para mas información sobre las conexiones eléctricas consulte el anexo). Teniendo como resultado salidas de voltajes y de corrientes variables.

El variac utilizado para las pruebas experimentales es de la marca STACO ENERGY PRODUCTS CO, de la serie 1000 modelo 1010B-3. El voltaje de salida en cada fase es de igual magnitud, pero desfasadas  $120^\circ$  uno con respecto a otro. El modelo 1010B-3 opera con un voltaje línea a línea de 240 V a 60 Hz en sus terminales de entrada, con capacidad de soportar un 17% arriba del voltaje nominal. El variac proporciona un voltaje de salida de 0 a 280 V, una corriente máxima de salida de 10 A, con una potencia máxima 4.85 KVA. Se acopla un interruptor termomagnético como protección contra voltajes altos y sobrecorrientes de la toma de corrientes trifásicas, además del encendido y apagado del variac.

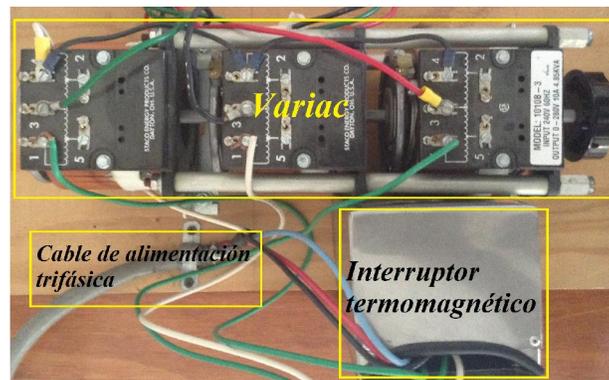


Figura 6.2: Autotransformador trifásico.

### 6.1.2. Circuito rectificador trifásico

El bus de CD de potencia suministra el voltaje al circuito inversor trifásico. Para ello, se diseñó y contruyó un circuito rectificador trifásico (CRT), tal como se muestra en la Figura 6.3. El CRT rectifica los voltajes generados por los devanados secundarios del variac. Cuenta con un capacitor electrolítico de 1000 mF a 350 V para alisar el voltaje rectificado en un voltaje de CD, y un capacitor MKP de 1  $\mu\text{F}$  a 850 V, para supresión de ruido. La fuente de alimentación de CD varía mediante la relación de transformación de los voltajes trifásicos conectados en los devanados primarios del variac.



Figura 6.3: Circuito rectificador trifásico.

### 6.1.3. Inversor trifásico fuente de voltaje

Para el accionamiento del MSIP se diseñó y construyó un circuito inversor trifásico. Con una corriente nominal de 40 A y un voltaje nominal de colector-emisor en cada IGBT de 600 V. En la Figura 6.4 se muestra el circuito construido y se señalan algunas de las partes importantes que lo constituyen.

El inversor consta de las siguientes partes:

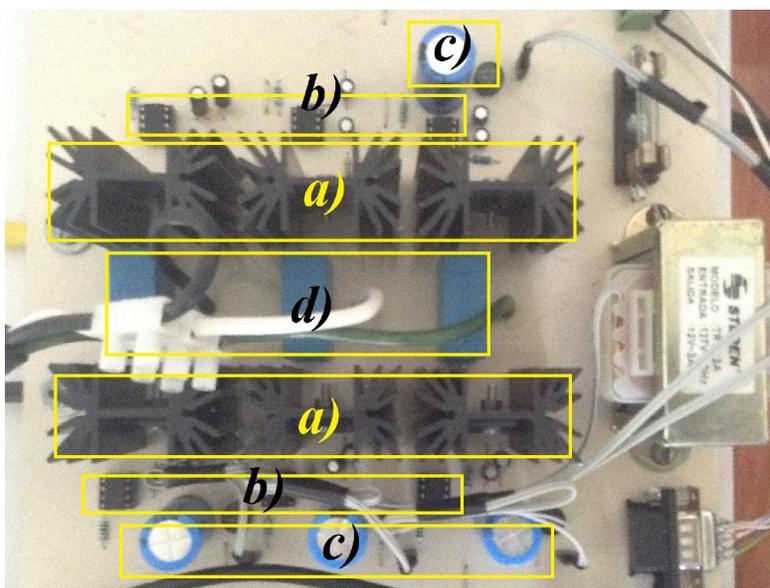


Figura 6.4: Inversor trifásico fuente de voltaje

- a) IGBT´s (FGAF40NUFD): Dispositivo semiconductor de potencia controlado por compuerta (interruptor).
- b) Opto-acopladores PC923: Dispositivo electrónico para el aislamiento galvánico y accionamiento de las compuertas de los IGBT´s.
- c) Alimentación de bajo voltaje (15 V): Alimentación para los opto-acopladores PC923.
- d) Capacitores MKP: Utilizado para la reducción de ruido en cada unas de las ramas del inversor.

Las señales que control que conmutaran los IGBT´s provienen del módulo dSPACE. El diseño del circuito de tiempos muertos no fue necesario, ya que es controlado y proporcionado por el módulo dSPACE. En el anexo se muestra el diagrama electrónico del inversor trifásico fuente de voltaje.

#### 6.1.4. Sensores de corriente

Se construyó una tarjeta electrónica tal como se muestra en la Figura 6.5, para medir de las corrientes de fase generadas por inversor trifásico. Esta tarjeta contiene un tres dispositivos de sensado (NT-50) que permite obtener información de la magnitud de la corriente en una señal de bajo voltaje. Estas señales se toma como variables de retroalimentación para el controlador incorporado en el módulo dSPACE. Por software de hace la calibración de las señales de

entrada y y por hardware se hace la relación de conversión. Para este caso se hizo una relacion de 1:5, es decir, por cada amper se obtuvo a la salida 200 mV. Esto con el fin de no sobrepasar los límites de voltajes en las entradas ADC del módulo dSPACE.



Figura 6.5: Sensores de corriente

### 6.1.5. Módulo dSPACE

Esta herramienta proporciona un entorno grafico interactivo y un conjunto de librerías de bloques que permiten diseñar, simular, implementar, probar una variedad de algoritmos y adquirir una variedad de variables en tiempo real. El módulo dSPACE es programado bajo la plataforma de Matlab/Simulink, lo que permite desarrollar diversidad de algoritmos, analizarlos y visualizarlos creando secuencias de comando de procesamiento por lotes y personalizar el entorno modelada, y definir las señales a visualizar, configurar los parámetros y obtener los datos de prueba. El diseño basado en modelos de control permite el ahorro en tiempo y una relación costo-eficiencia alta, razones por la cual estos sistemas son los más utilizados como material de prototípico rápido. En la Figura 6.6 se muestra el módulo dSPACE utilizado para la realización de las pruebas experimentales.

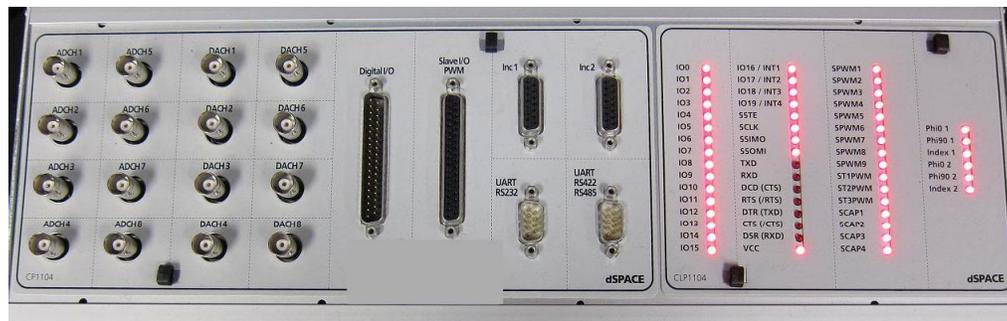


Figura 6.6: Módulo dSPACE.

La ejecución del algoritmo de control fue realizado mediante la programación de la tarjeta controladora DS1104 R&D (veáse Figura 6.7) que contiene un microcontrolador DSP esclavo

modelo TMS320F240. Estos componentes están incorporados dentro del módulo dSPACE, la cual contiene conectores de entrada y salida de señales. Este sistema de desarrollo de prototipo rápido facilita la implementación del algoritmo de control, ya que combina las capacidades de cálculo del DSP (por sus siglas en inglés, Digital Signals Processor) y los de un microcontrolador.



Figura 6.7: Tarjeta controladora DS1104 R&D.

Las características que posee el módulo dSPACE son las que se listan a continuación:

- Procesador principal modelo MPC8240, núcleo PowerPC 603e , 250 MHz, memoria cache de 32 kB.
- Memoria de 32 MB en SDRAM y memoria flash de 8 MB.
- Temporizadores de 32 bits (contador descendente), 4 temporizadores de propósito general y para conteo del tiempo de 64 bits.
- Interruptores controlados para el manejo de los temporizadores, encoders, puerto UART, DSP esclavo, PWM, ADC y conectores de entradas y salidas.
- Entradas analógicas conformado por 4 ADC independientes y un ADC de 16 bits (multiplexado).
- 8 DACs como salidas analógicas (canales) de 16 bits.
- 20 Entradas y salidas digitales.
- 2 encoders incrementales de entrada (TTL o RS422) de 24 bits.
- Interfaz serial UART.

- DSP esclavo TMS320F240.
- Conexión del módulo mediante un conector PCI de 32 bits
- Tamaño físico del conector: 185x106.68 mm
- Temperatura rango de operación: 0-55 °C.
- Fuente de alimentación de +5 V a 2.5 A, +12.V a 0.3 A y -12V a 0.2 A.
- Consumo de potencia: 18.5 W.

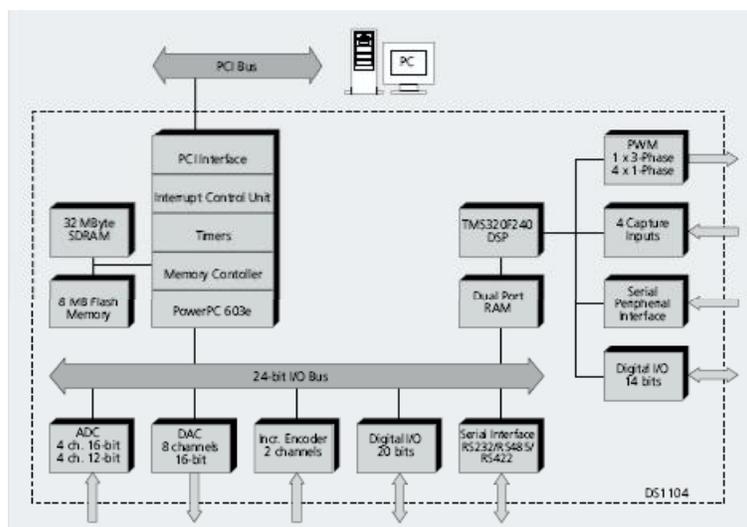
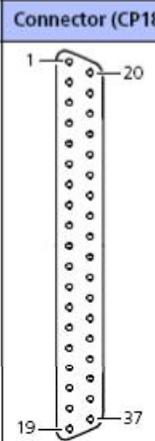


Figura 6.8: Arquitectura de Tarjeta controladora DS1104 R&D.

De las características que posee el módulo dSPACE únicamente se abordarán aquellas que son utilizadas para el control de velocidad del MSIP, tales como el módulo PWM y convertidores analógico/digital. La configuración de los pines de salida de las señales PWM al circuito inversor se muestran en la Figura 6.9 , por lo que se adaptó un conector DB25 para facilitar las conexiones.

Las características del módulo PWM son las siguientes:

- DSP esclavo con 3 canales de salidas para la generación de señales PWM trifásicas con un rango de frecuencia de 1.25 Hz a 5 MHz.
- Tres señales PWM controladas por medio del periodo (modo simétrico).
- Las señales PWM tienen componentes complementarias (Señales negadas).
- Control del tiempo muerto entre cada señal PWM no invertido (PWM1, PWM3 y PWM 5) e invertido (PWM2, PWM4 y PWM 6).



Connector (CP18)	Pin	Signal	Pin	Signal
	1	GND	20	GND
	2	SCAP1	21	SCAP2
	3	SCAP3	22	SCAP4
	4	GND	23	ST1PWM
	5	ST2PWM	24	ST3PWM
	6	GND	25	GND
	7	SPWM1	26	SPWM2
	8	SPWM3	27	SPWM4
	9	SPWM5	28	SPWM6
	10	SPWM7	29	SPWM8
	11	SPWM9	30	GND
	12	GND	31	GND
	13	GND	32	GND
	14	GND	33	GND
	15	GND	34	SSOMI
	16	SSIMO	35	SSTE
	17	SCLK	36	GND
	18	VCC (+5 V)	37	GND
	19	VCC (+5 V)		

Figura 6.9: Señales de conexión de los pines de salida del PWM.

- El ciclo de trabajo son programados de manera independientes y el tiempo muerto es especificado por el usuario.
- Salidas PWM individuales controladas por software.
- Voltajes de salida TTL.
- Capacidad de corriente de salida de 13 mA en cada pin del módulo PWM

El módulo de conversión analógico/digital (ADC) está formado por 5 canales ADCs, el funcionamiento puede ser de manera simultánea, y sonde 2 tipos.

- Un ADC con multiplexor con las siguientes características:
  - 4 canales ADC multiplexados y equipados con circuitos de muestreo y sostenimiento (Sample and hold ADC)
  - Resolución de 16 bits.
  - Rango de voltaje de entrada de -10 V a +10 V.
  - Tiempo de conversión de 2 us.
- ADCs con funcionamiento de manera independiente:
  - Resolución de 12 bits

- Rango de voltaje de entrada de -10 V a +10 V.
- Tiempo de conversión de 800 ns.

El software ControlDesk versión 7.3.1 es utilizado para el manejo de las señales y manipulación del algoritmo programado en el dSPACE. Mediante la utilización de este software se hace la adquisición de los datos de cada una de las señales que fluye a través del algoritmo de control. En el siguiente capítulo se muestran los resultados experimentales adquiridos en tiempo real.

### 6.1.6. Módulo Motor/Dinamómetro

El Motor/Dinamómetro (Modelo 8960-1X) básicamente consiste de un motor de CD de imanes permanentes. Se puede configurar como motor o dinamómetro, por medio de un interruptor. Es necesario alimentar con una fuente de CD a través de 2 conectores en el panel frontal cuando es configurado como motor. Cuando se utiliza como dinamómetro, los imanes permanentes del motor operan como un generador de CD, donde las terminales del generador son conectadas hacia una carga eléctrica. La carga mecánica es aplicada por un circuito accionador (inversor) acoplado al motor/dinamómetro. Se puede controlar y variar la carga mecánica de manera manual a través de una perilla acoplada en el panel frontal o externamente por un voltaje de control, para nuestro experimento la aplicación del voltaje será proporcionado por el módulo dSPACE. La manera de seleccionar y controlar la carga mecánica es a través de un interruptor en el panel frontal.

En ambos modos de operación el módulo presenta indicadores digitales de velocidad y par de carga. Otro interruptor permite visualizar cualquiera de las dos variables. Consta de terminales de salida, que contienen información de la velocidad (tacogenerador) y par aplicado (sensor de par de carga). Estas señales son utilizadas para la obtención de las graficas de los resultados experimentales, la cual determina la velocidad del motor y dirección de rotación.

En los ejes del motor/dinamómetro y MSIP se incorporan coples para fijar los ejes de ambas maquinas, a través de una banda que acopla los dos ejes, tal como se muestra en la Figura 6.10. Esto permitirá la medición de la velocidad del MSIP y la aplicación de la carga mecánica hacia el MSIP, controlada por el módulo dSPACE.

## 6.2. Resultados obtenidos

Se desarrollaron las pruebas experimentales para una velocidad angular deseada y se obtuvieron los datos con la ayuda del software ControlDesk® del módulo dSPACE. La trayectoria de referencia para la velocidad angular del MSIP fue elegida de acuerdo al diagrama de *velocidad-par* proporcionado por la hoja de datos del fabricante. Se consideraron los siguientes parámetros para no exceder los límites de operación del motor:



Figura 6.10: Fotografía del Motor/Dinamómetro utilizado.

- Par continuo ( $\tau_c$ ): 3,2 [Nm]. Par nominal que se puede aplicar en el eje del MSIP sin exceder los límites térmicos.
- Par pico ( $\tau_c$ ): 12,8 [Nm]. Máximo par que puede aplicarse en el eje del MSIP por cortos periodos de tiempo.
- Velocidad promedio  $\omega_n$ : 419 [rad/s]. Máxima velocidad angular con un par constante en el eje y una fuente de voltaje de 300 V.
- Potencia máxima: 1340 [W]: Máxima potencia generada por el MSIP:

De acuerdo con la información obtenida, se considera el caso donde solamente se limita la corriente en el eje de referencia  $d-q$ . En este caso, uno de las salidas planas  $i_d^* = 0$ , esto con la finalidad de aprovechar el par máximo a bajas velocidades (ver [7]). Las trayectorias deseadas para  $i_q^*$ ,  $u_d^*$  y  $u_q^*$ , son establecidas por medio la propiedad de planitud diferencial, mostrados en las ecuaciones (3.47).

Se propuso una trayectoria de 300 rad/s con un arranque suave de 6 segundos. Los valores de la velocidad inicial y final para la trayectoria de referencia son:  $\bar{\omega}_{ini} = 0$  y  $\bar{\omega}_{fin} = 300$ , donde posteriormente se le aplica un par de carga sobre el eje del motor a través del dinamómetro del equipo LabVolt.

Los resultados obtenidos durante las pruebas experimentales son mostrados a continuación:

En la Figura 6.11 a) se muestra las trayectoria de referencia deseada  $\omega^*$ , la velocidad real obtenida de la lectura de un sensor de velocidad  $\omega_n$  y la velocidad estimada por los observadores. En esta prueba se aplicó un par de carga en el eje del motor en  $t = 8$  seg. El error de estimación de velocidad se muestra en la Figura 6.11 b) y se observa que mediante la aplicación del controlador y los observadores el error converge asintóticamente a cero.

Por medio del módulo dSPACE se envió una señal hacia el dinamómetro para tener un perfil de par de carga deseado, tal como se muestra en la Figura 6.12 a). Se observa un par de

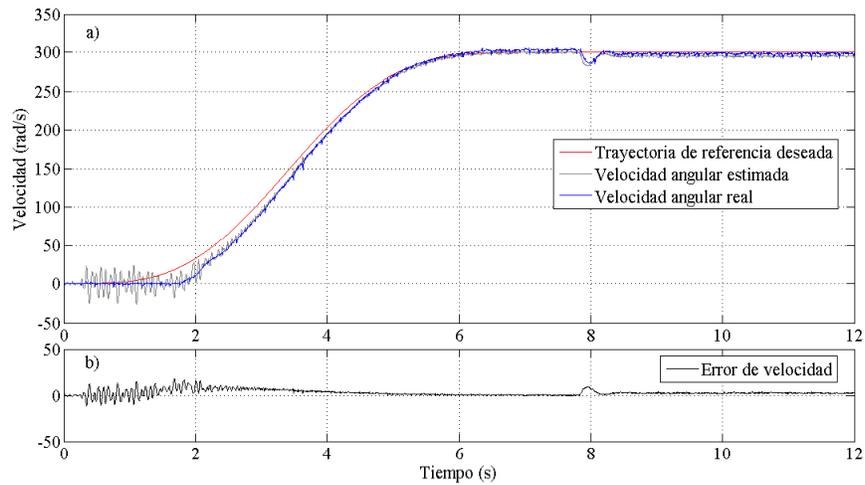


Figura 6.11: a) Velocidad desarrollada por el MSIP. b) Error de estimación de la velocidad.

un 1 Nm en  $t = 8$  (s) medida por un sensor de par. Nótese que la estimación no converge antes de los ocho segundos, esto debido a que el módulo no proporciona la medición de las condiciones iniciales de par, por lo que durante el arranque el estimador se encarga de dar esta lectura de manera precisa. Esta estimación incluye los términos de fricción no modeladas y el par generado por la banda que une el eje del motor y del dinamómetro. El error entre el par medido y el estimado se muestra en la 6.12 b).

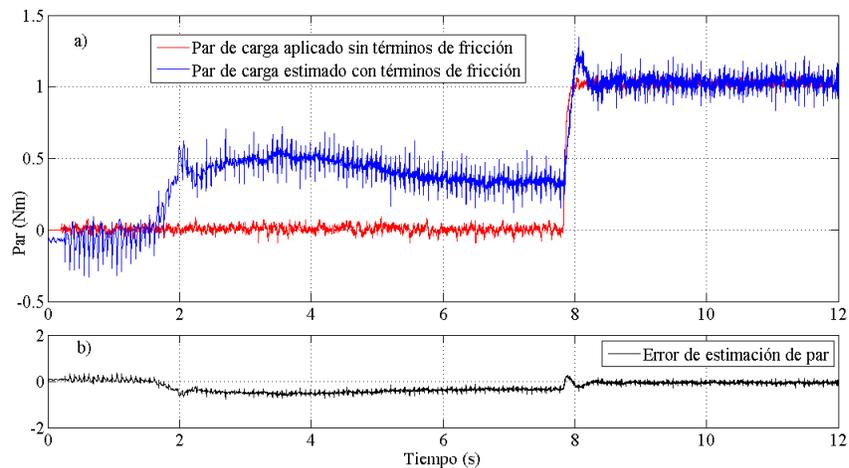


Figura 6.12: a) Par de carga en el eje del motor. b) Error de estimación de par.

La corriente directa se muestra en la Figura 6.13 a). El controlador hace que  $i_d$  se ubique cerca del valor de referencia, tal que el error converge asintóticamente a cero (ver Figura 6.13 b)).

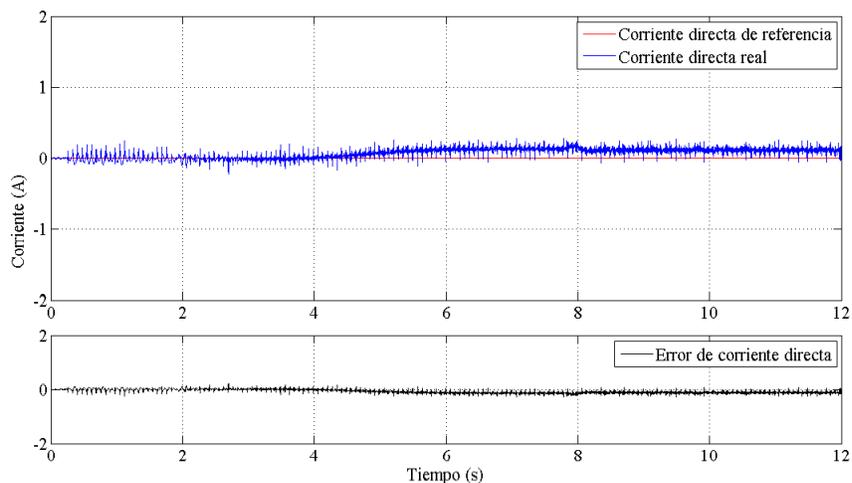


Figura 6.13: a) Corriente directa del MSIP. b) Error de corriente directa.

En la Figura 6.14 a) se muestra la respuesta de la corriente de cuadratura. En esta figura, se observa un incremento en la amplitud de la corriente durante la aplicación del par de carga en el eje del motor. Esto debido a que el MSIP desarrolla un par electromagnético para contrarrestar el par aplicado en el eje. Los términos de fricción no modeladas son adaptados en la corriente nominal de cuadratura a través del valor estimado por el observador de par de carga.

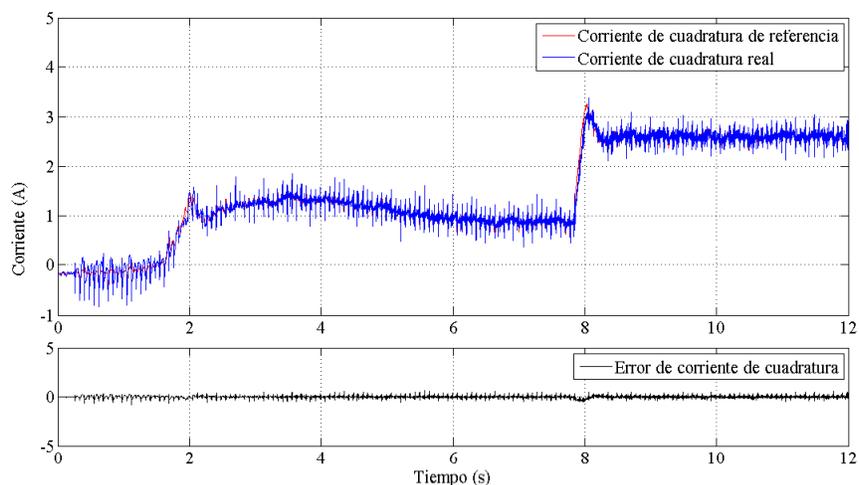


Figura 6.14: a) Corriente de cuadratura del MSIP. b) Error de corriente de cuadratura.

La respuesta del controlador en el eje  $d - q$  se muestran en las Figuras 6.15 y 6.16. Estas señales de control garantizan un arranque suave del MSIP.

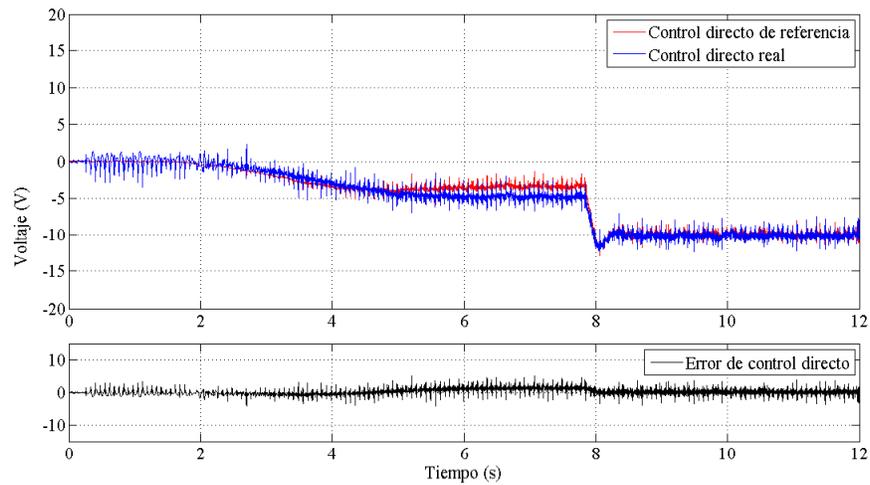


Figura 6.15: a) Control directo. b) Error de control directo.

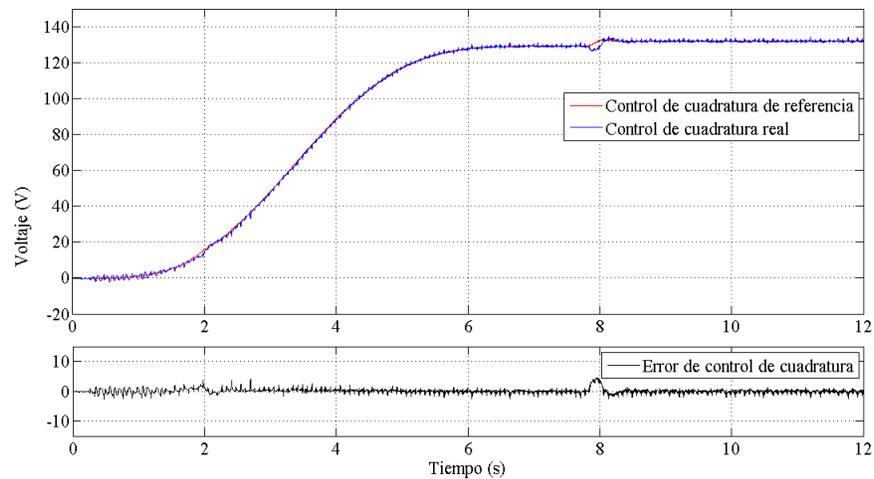


Figura 6.16: a) Control de cuadratura. b) Error de control de cuadratura

En la Figura 6.17 a) se observa la convergencia de la posición angular hacia el valor de referencia deseado. El trabajo realizado por los observadores hace que la posición angular estimada se enganche a la posición angular medida. En la Figura 6.17 b) se observa como el valor estimado empieza a seguir al valor medido, teniendo como resultado un óptimo desempeño del controlador. El error de estimación se muestra en la Figura 6.17 c).

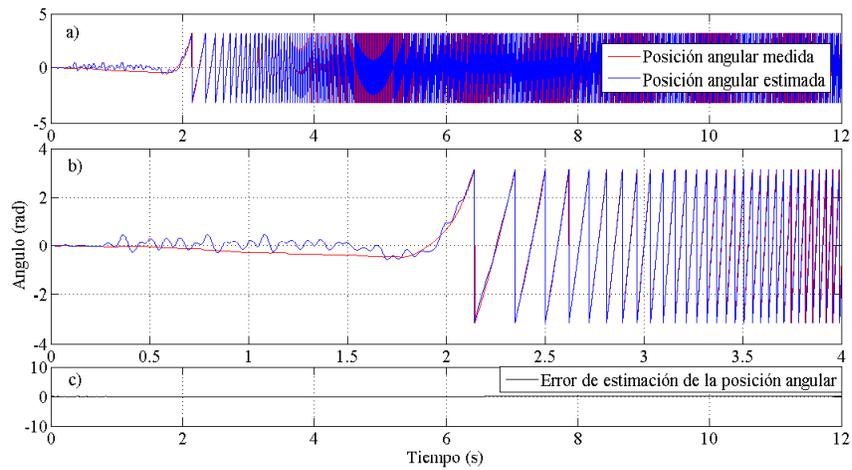


Figura 6.17: a) Posición angular del MSIP. b) Acercamiento durante el arranque. c) Error de estimación.

## 6.3. Conclusiones

En este trabajo se presentó el controlador basado en pasividad para el seguimiento suave de velocidad angular, sin utilizar un sensor de posición para operar. El desempeño del controlador y de los observadores muestran excelentes resultados en cuanto a la regulación y seguimiento de velocidad. Los resultados obtenidos durante la simulación y las pruebas experimentales en velocidad muestran un buen desempeño en estado estable y estado transitorio con un porcentaje de error menor al 1 %, además de tener una robustez ante la presencia de ruido acústico y cambios repentinos de carga.

Por otra parte, las características encontradas a lo largo del desarrollo de este trabajo se presentan a continuación:

- La estructura del modelo matemático del MSIP facilita la implementación del método ETEDPOF.
- Los observadores de las variables de posición, velocidad y par de carga se estiman en línea y se aproximan a su valor real, con un error de estimación muy cercano a cero. Aún con la presencia de par de carga constante y fuerzas de fricción no modeladas y desconocidas.
- Mediante la aplicación del PLL como filtro pasa bajas se elimina el ruido generado por el observador GPI.
- Se logra controlar la velocidad del MSIP en condiciones nominales de operación, a través de una ley de control basado en pasividad mostrando una estructura simple y eficaz.
- Se logró regular a bajas velocidades, en un intervalo de 50 a 100 rad/s.
- Por medio de la planeación de una trayectoria suave de referencia de velocidad angular en el arranque del MSIP, se evitan sobretiros de corriente y voltaje en los devanados del motor, así como la reducción considerable del contenido armónico.
- La velocidad angular del rotor sigue a la trayectoria de referencia deseada con precisión, aún cuando no se modelan términos desconocidos, y esto se logra mediante la adaptación del par de carga estimado dentro de la ley de control.

El diseño modular del algoritmo de control es adecuado para ser implementado en tiempo real. La metodología de estimación de posición y velocidad permite la reutilización en la aplicación de otro tipo de controladores, tal como se mostró en el diseño del control de campo orientado. El algoritmo de control implementado en el módulo dSPACE tiene una arquitectura secuencial y contiene una gran cantidad de bloques de Simulink que representan cada una de las

ecuaciones desarrolladas en los capítulos presentados. El consumo de recursos del controlador en el equipo dSPACE, muestra saturación con un periodo de muestreo menor a  $1 \times 10^{-4}$  segundos. Sin embargo, esto no fue una limitante para desarrollar las pruebas experimentales, ya que con un periodo de muestreo de 0.0001 segundos fué suficiente para procesar el algoritmo de control, esto sin reducir el desempeño del controlador en términos de eficiencia y rapidez.

## 6.4. Trabajos futuros

Para mejorar y aplicar este controlador de velocidad sin sensor de posición se realizarán los siguientes trabajos futuros:

- Implementar el algoritmo de control en un dispositivo FPGA para reducir el periodo de muestreo en forma considerable. Por otro lado, al reducir el tiempo de muestreo cabe la posibilidad de disminuir el grado del observador GPI para la estimación de las FCEM, teniendo como resultado una mejor eficiencia en la utilización de los recursos del dispositivo FPGA. Además de conseguir que el sistema sea totalmente independiente de un ordenador.
- Implementar otras técnicas de control para la regulación o el seguimiento suave de velocidad del MSIP, utilizando la metodología de estimación para la posición y velocidad desarrollada en este proyecto.
- Realizar un control de posición con un MSIP que cuente con más pares de polos, utilizando la misma metodología de estimación de posición y velocidad angular.
- Utilizar la plataforma experimental desarrollada en una aplicación industrial para observar el desempeño del controlador en ambientes perturbados.
- Aumentar el grado del observador del parámetro de par de carga para obtener un mejor desempeño durante la presencia de perturbaciones variantes en el tiempo.

# Apéndice



# Apéndice A

## Modelo matemático del MSIP

En esta apéndice se obtiene el modelo matemático del MSIP, se iniciará con la obtención del modelo eléctrico general en el eje de referencia  $a, b, c$ , posteriormente se aplicarán las transformaciones de Clark y Park para la obtención del modelo en coordenadas  $\alpha - \beta$  y  $d - q$ , finalizando con la obtención del modelo electromecánico.

### A.1. Consideraciones para la obtención del modelo matemático

Para el desarrollo del modelado matemático en estado estable y transitorio del MSIP de manera ideal, se asumen los siguientes criterios [32]:

- Los efectos de saturación no son tomados en cuenta.
- Las corrientes de Eddy e histéresis no son tomadas en cuenta durante el desarrollo del análisis.
- El devanado del estator es trifásico y se encuentra conectado en estrella.
- Las resistencias eléctricas en los devanados de cada fase, son iguales.
- Cada uno de los tres devanados se encuentra distribuido exactamente a  $120^\circ$  mecánicos.
- El rotor está compuesto por un núcleo de hierro con IP montados en la superficie del rotor.
- Los imanes permanentes empleados, son hechos de un material magnético con gran resistencia eléctrica, por lo tanto las corrientes inducidas en el rotor no son consideradas.

- La distribución de la FCEM en el devanado del estator, tiene una forma sinusoidal.
- Debido a que la máquina se considera como una carga completamente balanceada sin neutro, las componentes de secuencia cero son nulas.

## A.2. Circuito equivalente del MSIP

Para obtener el modelo matemático del circuito equivalente del MSIP. Como primer paso se muestra la representación del devanado trifásico y las variables eléctricas asociadas a él. Después se determinan los elementos de la matriz de inductancias y los elementos del vector de enlaces de flujo debido al imán. Por último se utiliza el circuito equivalente para la fase  $a$  con el propósito de analizar el régimen estacionario. Estos resultados son fácilmente extrapolados para las fases  $b$  y  $c$ , para obtener la representación trifásica completa.

El devanado trifásico del estator del MSIP generalmente se conecta en estrella y cada devanado se representa por una resistencia y una inductancia como se muestra en la Figura A.1. Por construcción los devanados tienen una misma resistencia  $r_e$ . Las corrientes en los devanados son  $i_a$ ,  $i_b$ ,  $i_c$  y  $v_a$ ,  $v_b$ ,  $v_c$  son los voltajes aplicados a cada fase del estator.

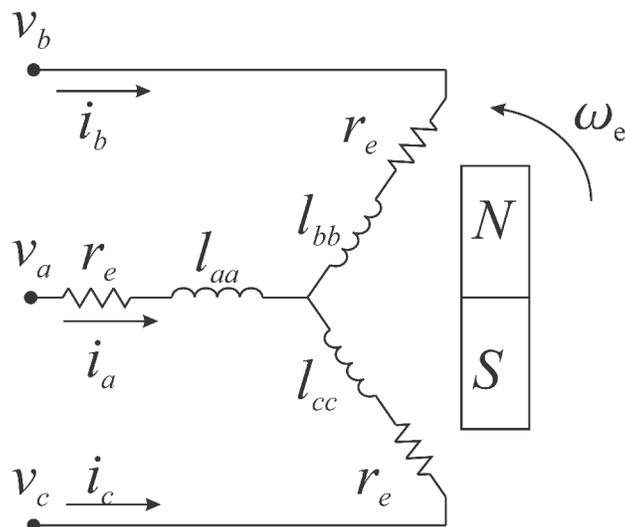


Figura A.1: Devanados del estator del MSIP.

Los enlaces de flujo del motor se expresan como una suma de enlaces de flujo propias y mutuas en cada fase del estator (definidos por el producto de las inductancias por las corrientes) más

los enlaces de flujo dados por el material magnético en el rotor, esta suma tiene la forma:

$$\begin{aligned}\lambda_a &= l_{aa}i_a + l_{ab}i_b + l_{ac}i_c + \lambda_{am} \\ \lambda_b &= l_{ba}i_a + l_{bb}i_b + l_{bc}i_c + \lambda_{bm} \\ \lambda_c &= l_{ca}i_a + l_{cb}i_b + l_{cc}i_c + \lambda_{cm}\end{aligned}\tag{A.1}$$

donde  $\lambda_a$ ,  $\lambda_b$  y  $\lambda_c$  son los enlaces de flujo del motor,  $l_{aa}$ ,  $l_{ab}$ ,  $l_{ac}$ ,  $l_{ba}$ ,  $l_{bb}$ ,  $l_{bc}$ ,  $l_{ca}$ ,  $l_{cb}$ ,  $l_{cc}$ , son inductancias de los devanados del estator y  $\lambda_{am}$ ,  $\lambda_{bm}$  y  $\lambda_{cm}$  son los enlaces de flujo establecidos por el imán permanente, estos enlaces de flujo son funciones periódicas de  $\theta_e$  y están dados por la ecuación (A.2). La magnitud de los enlaces está dado por  $\lambda_m$  determinada por el material del imán permanente.

$$\begin{aligned}\lambda_{am} &= \lambda_m \cos(\theta_e) \\ \lambda_{bm} &= \lambda_m \cos(\theta_e - \frac{2}{3}\pi) \\ \lambda_{cm} &= \lambda_m \cos(\theta_e + \frac{2}{3}\pi)\end{aligned}\tag{A.2}$$

Las ecuaciones (A.1) se pueden reescribir matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{aa} & l_{ab} & l_{ac} \\ l_{ba} & l_{bb} & l_{bc} \\ l_{ca} & l_{cb} & l_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_{am} \\ \lambda_{bm} \\ \lambda_{cm} \end{bmatrix}\tag{A.3}$$

donde:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} l_{aa} & l_{ab} & l_{ac} \\ l_{ba} & l_{bb} & l_{bc} \\ l_{ca} & l_{cb} & l_{cc} \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad y \quad \Lambda_m = \begin{bmatrix} \lambda_{am} \\ \lambda_{bm} \\ \lambda_{cm} \end{bmatrix}\tag{A.4}$$

Entonces la ecuación matricial de los enlaces de flujo (A.3) se puede expresar de la siguiente forma:

$$\Lambda = LI + \Lambda_m\tag{A.5}$$

con  $\Lambda$  como el vector de enlaces de flujo del motor,  $L$  la matriz de inductancias,  $I$  el vector de corrientes de fase y  $\Lambda_m$  el vector de enlaces de flujo debido al imán. De esta última ecuación se quiere conocer los elementos de  $L$ , para después calcular el circuito que representa a la fase  $a$  del motor.

### A.3. Determinación de la matriz de inductancias del estator

Los elementos de la matriz  $L$  (ecuación (A.4))son inductancias dependientes del desplazamiento angular eléctrico  $\theta_e$  entre los ejes magnéticos del rotor y estator. Si los subíndices de las

inductancias  $l$  son iguales indican que son inductancias propias ( $l_{aa}$ ,  $l_{bb}$  y  $l_{cc}$ ) y si son diferentes indican que es una inductancia mutua entre dos devanados ( $l_{ab}$ ,  $l_{ac}$ ,  $l_{ba}$ ,  $l_{bc}$ ,  $l_{ca}$ ,  $l_{cb}$ ). De forma general la inductancia  $l_{ij}$  es la inductancia del devanado de la fase  $i$ , debida a la corriente del devanado de la fase  $j$ .

### A.3.1. Inductancias propias del estator

La inductancia propia o autoinductancia  $l_{aa}$  es igual a la razón del enlace de flujo del devanado de la fase  $a$  con respecto a la corriente  $i_a$  con todas las demás corrientes iguales a cero, además, esta inductancia propia cuenta con una componente de dispersión ( $L_{ls}$ ), debida al flujo disperso en el devanado y una componente de magnetización, debida al flujo de magnetización causada por el devanado. La inductancia  $l_{aa}$  es un máximo cuando  $\theta_e = 0^\circ$ , es un mínimo cuando  $\theta_e = 90^\circ$  y vuelve a ser un máximo con  $\theta_e = 180^\circ$  y así sucesivamente. La fuerza magnetomotriz de la fase  $a$  ( $F_{ma}$ ) tiene una distribución sinusoidal con un valor máximo  $N_s i_a$  centrado en el eje magnético de la fase  $a$ . La Figura A.2 muestra las componentes de la fuerza magnetomotriz de la fase  $a$  a lo largo de los ejes  $d$  y  $q$ .

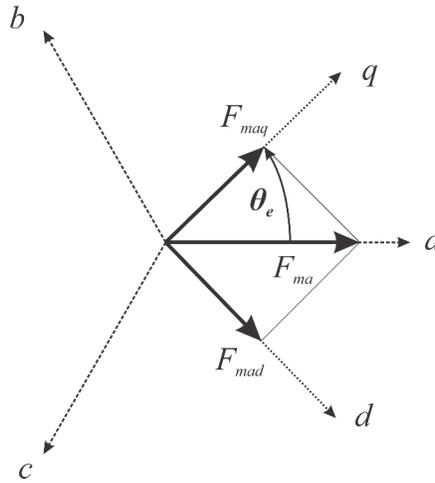


Figura A.2: Componentes  $F_{mad}$  y  $F_{maq}$  de la fuerza  $F_{ma}$

Entonces, si  $F_{ma} = N_s i_a$  es la fuerza magnetomotriz de la fase  $a$ , sus componentes a lo largo de los ejes del rotor están dados por:

$$\begin{aligned} F_{mad} &= F_{ma} \sin \theta_e \\ F_{maq} &= F_{ma} \cos \theta_e \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Si el rotor es de polos salientes tendrá distintos coeficientes de permeancia magnética  $P_d$  y  $P_q$ , entonces los flujos por polo en el entrehierro a lo largo de los dos ejes son:

$$\begin{aligned} \Phi_{ad} &= P_d F_{ma} \sin \theta_e \\ \Phi_{aq} &= P_q F_{ma} \cos \theta_e \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

El enlace de flujo total de la fase  $a$  en el entrehierro es:

$$\lambda_{aa0} = N_s(\Phi_{ad} \sin \theta_e + \Phi_{aq} \cos \theta_e) \quad (\text{A.8})$$

al sustituir los valores de  $\Phi_{ad}$  y  $\Phi_{aq}$  en la ecuación anterior se obtiene:

$$\lambda_{aa0} = N_s F_{ma} (P_d \sin^2 \theta_e + P_q \cos^2 \theta_e) \quad (\text{A.9})$$

y al usar las identidades trigonométricas  $\cos^2 \theta_e = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta_e$  y  $\sin^2 \theta_e = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta_e$ , se tiene que:

$$\lambda_{aa0} = N_s F_{ma} \left( \frac{P_d + P_q}{2} - \frac{P_d - P_q}{2} \cos 2\theta_e \right) \quad (\text{A.10})$$

La relación entre el enlace de flujo  $\lambda_{aa0}$  y la inductancia  $l_{aa0}$  es:

$$l_{aa0} = \frac{\lambda_{aa0}}{i_a} = \frac{\lambda_{aa0}}{F_{ma}/N_s} = \frac{N_s \lambda_{aa0}}{F_{ma}} \quad (\text{A.11})$$

La componente de magnetización de la inductancia propia de la fase  $a$  está dada por:

$$l_{aa0} = N_s^2 \left( \frac{P_d + P_q}{2} - \frac{P_d - P_q}{2} \cos 2\theta_e \right) = \bar{L}_m - L_{\Delta m} \cos 2\theta_e \quad (\text{A.12})$$

donde  $\bar{L}_m = N_s^2 \left( \frac{P_d + P_q}{2} \right)$  es el valor promedio de la inductancia de magnetización y la amplitud pico de la variación sinusoidal de la inductancia de magnetización es  $L_{\Delta m} = N_s^2 \left( \frac{P_d - P_q}{2} \right) \cos 2\theta_e$ . A esta inductancia  $l_{aa0}$  se le suma la inductancia de la componente de dispersión  $L_{ls}$ , debida al flujo producido por  $i_a$  que no cruza el entrehierro y sólo afecta al devanado de la fase  $a$ , entonces la inductancia propia queda:

$$l_{aa} = L_{ls} + \bar{L}_m - L_{\Delta m} \cos 2\theta_e \quad (\text{A.13})$$

y la variación de la inductancia propia  $l_{aa}$  con respecto a  $\theta_e$  se muestra en la Figura A.3.

Dado que los devanados de las fases  $b$  y  $c$  son idénticos al devanado de la fase  $a$  con un desplazamiento de  $-\frac{2\pi}{3}$  y  $\frac{2\pi}{3}$  radianes eléctricos respectivamente, las inductancias propias del estator son:

$$\begin{aligned} l_{aa} &= L_{ls} + \bar{L}_m - L_{\Delta m} \cos 2\theta_e \\ l_{bb} &= L_{ls} + \bar{L}_m - L_{\Delta m} \cos \left( 2\theta_e - \frac{2\pi}{3} \right) \\ l_{cc} &= L_{ls} + \bar{L}_m - L_{\Delta m} \cos \left( 2\theta_e + \frac{2\pi}{3} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

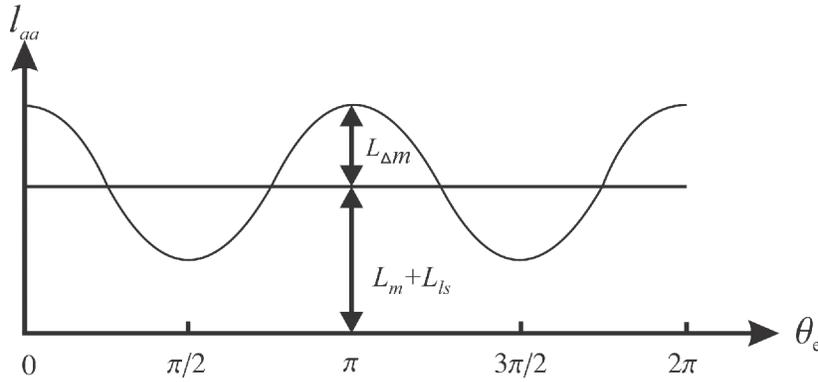


Figura A.3: Comportamiento de la inductancia propia del devanado  $a$ .

### A.3.2. Inductancias mutuas del estator

Estas se definen como la razón del enlace de flujo de un devanado debido a la corriente que circula en un segundo devanado, con todas las demás corrientes iguales a cero. La inductancia mutua  $l_{ba}$  se puede encontrar por la evaluación del enlace de flujo de la fase  $b$  ( $\lambda_{ba}$ ) en el entrehierro cuando la fase  $a$  es excitada. Para encontrar los enlaces de flujo de la fase  $b$  debido a la fuerza magnetomotriz de la fase  $a$ , se reemplaza  $\theta_e$  por  $\theta_e - \frac{2\pi}{3}$  en la ecuación (A.8):

$$\lambda_{ba} = N_s \left[ \Phi_{ad} \sin \left( \theta_e - \frac{2\pi}{3} \right) + \Phi_{aq} \cos \left( \theta_e - \frac{2\pi}{3} \right) \right] \quad (\text{A.15})$$

al sustituir los valores de  $\Phi_{ad}$  y  $\Phi_{aq}$  dados en (2.9) en la ecuación anterior, se obtiene:

$$\lambda_{ba} = N_s F_{ma} \left[ P_d \sin \theta_e \sin \left( \theta_e - \frac{2\pi}{3} \right) + P_q \cos \theta_e \cos \left( \theta_e - \frac{2\pi}{3} \right) \right] \quad (\text{A.16})$$

para simplificar la expresión anterior se usan las identidades trigonométricas:

$$\begin{aligned} \cos \left( \theta_e - \frac{2\pi}{3} \right) &= \cos \theta_e \cos \frac{2\pi}{3} + \sin \theta_e \sin \frac{2\pi}{3} \\ \sin \left( \theta_e - \frac{2\pi}{3} \right) &= \sin \theta_e \cos \frac{2\pi}{3} + \cos \theta_e \sin \frac{2\pi}{3} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Por lo que:

$$\lambda_{ba} = N_s F_{ma} \left[ P_d \left( -\frac{1}{2} \sin^2 \theta_e - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta_e \sin \theta_e \right) + P_q \left( -\frac{1}{2} \cos^2 \theta_e + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta_e \sin \theta_e \right) \right] \quad (\text{A.18})$$

Al usar las identidades trigonométricas  $\cos^2 \theta_e = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\theta_e)$ ,  $\sin^2 \theta_e = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\theta_e)$  y  $\cos \theta_e \sin \theta_e = \frac{1}{2} \sin 2(2\theta_e)$ , se tiene que:

$$\lambda_{ba} = N_s F_{ma} \left[ -\frac{P_d + P_q}{4} - \frac{P_d - P_q}{2} \left( -\frac{1}{2} \cos 2\theta_e + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(2\theta_e) \right) \right] \quad (\text{A.19})$$

Tomando en cuenta la igualdad de la ecuación (A.20):

$$\cos 2 \left( \theta_e - \frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} \cos 2\theta_e + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin (2\theta_e) \quad (\text{A.20})$$

Sustituyendo y factorizando la identidad, se tiene que:

$$\lambda_{ba} = N_s F_{ma} \left[ -\frac{P_d + P_q}{4} - \frac{P_d - P_q}{2} \cos 2 \left( \theta_e - \frac{2\pi}{3} \right) \right] \quad (\text{A.21})$$

Sustituyendo la ecuación anterior en (A.22):

$$l_{ba} = \frac{\lambda_{ba}}{i_a} = \frac{\lambda_{ba}}{F_{ma}/N_s} = \frac{N_s \lambda_{ba}}{F_{ma}} \quad (\text{A.22})$$

Se tienen expresiones similares tales como la ecuación como (A.12). La inductancia mutua entre las fases a y b es igual a :

$$l_{ba} = l_{ab} = -\frac{1}{2} \bar{L}_m - L_{\Delta m} \cos 2 \left( \theta_e - \frac{2\pi}{3} \right) \quad (\text{A.23})$$

Entonces las inductancias mutuas entre los devanados del estator se expresan con las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} l_{ab} = l_{ba} &= -\frac{1}{2} \bar{L}_m - L_{\Delta m} \cos 2 \left( \theta_e - \frac{2\pi}{3} \right) \\ l_{ac} = l_{ca} &= -\frac{1}{2} \bar{L}_m - L_{\Delta m} \cos 2 \left( \theta_e + \frac{2\pi}{3} \right) \\ l_{bc} = l_{cb} &= -\frac{1}{2} \bar{L}_m - L_{\Delta m} \cos 2 (\theta_e + \pi) \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

El término del valor promedio de la inductancia  $\bar{L}_m$  es multiplicado por  $-\frac{1}{2}$ , esto se debe al desfaseamiento entre los devanados del estator que es de  $\frac{2\pi}{3}$ ; y el coseno de este desfaseamiento es  $-\frac{1}{2}$ . Una vez determinados todos los elementos de  $L$  y considerando que  $\theta_e = n_p \theta_m$ , la matriz de inductancias del MS es:

$$L = \begin{bmatrix} l_{aa} & l_{ab} & l_{ac} \\ l_{ba} & l_{bb} & l_{bc} \\ l_{cc} & l_{cb} & l_{cc} \end{bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

con las siguientes expresiones para cada elemento:

$$\begin{aligned}
l_{aa} &= L_{ls} + \bar{L}_m - L_{\Delta m} \cos(2n_p\theta_m) \\
l_{bb} &= L_{ls} + \bar{L}_m - L_{\Delta m} \cos 2\left(n_p\theta_m - \frac{2\pi}{3}\right) \\
l_{cc} &= L_{ls} + \bar{L}_m - L_{\Delta m} \cos 2\left(n_p\theta_m + \frac{2\pi}{3}\right) \\
l_{ab} = l_{ba} &= -\frac{1}{2}\bar{L}_m - L_{\Delta m} \cos 2\left(n_p\theta_m - \frac{2\pi}{3}\right) \\
l_{ac} = l_{ca} &= -\frac{1}{2}\bar{L}_m - L_{\Delta m} \cos 2\left(n_p\theta_m + \frac{2\pi}{3}\right) \\
l_{bc} = l_{cb} &= -\frac{1}{2}\bar{L}_m - L_{\Delta m} \cos 2(n_p\theta_m + \pi)
\end{aligned} \tag{A.26}$$

Para motores síncronos de imán permanente de rotor cilíndrico se cumple que,  $P_d = P_q$ , entonces los elementos de la matriz de inductancias se simplifican, ya que  $L_{\Delta m} = 0$ , por tal motivo, las inductancias ya no están en función del desplazamiento angular eléctrico  $\theta_e$ . Realizando las operaciones, las expresiones de los elementos simplificados quedan:

$$\begin{aligned}
l_{aa} = l_{bb} = l_{cc} &= L_{ls} + \bar{L}_m \\
l_{ab} = l_{ba} = l_{ac} = l_{ca} = l_{bc} = l_{cb} &= \bar{L}_m \cos\left(\pm \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\bar{L}_m
\end{aligned} \tag{A.27}$$

#### A.4. Modelado en el eje de referencia $a, b, c$

Analizando el diagrama eléctrico mostrado en la Figura A.1 y al aplicar la ley de voltajes Kirchhoff al devanado de la fase  $a$  se tiene que:

$$v_a = r_e i_a + \frac{d\lambda_a}{dt} \tag{A.28}$$

Donde la ecuación del flujo de enlace en la fase  $a$  esta dada por la siguiente igualdad:

$$\lambda_a = l_{aa}i_a + l_{ab}i_b + l_{ac}i_c + \lambda_{am} \tag{A.29}$$

Las inductancias mutuas y propias expresa usando los términos de las inductancias correspondientes definidas en el anexo A:

$$\lambda_a = (L_{ls} + \bar{L}_m) i_a + \left(-\frac{1}{2}\bar{L}_m\right) (i_b + i_c) + \lambda_m \cos \theta_e \tag{A.30}$$

Por otro lado, cuando un conjunto de voltajes trifásicos balanceados con la misma amplitud alimenta a los devanados del motor se cumple que:  $v_a + v_b + v_c = 0$ . Estos voltajes de

alimentación son:

$$\begin{aligned} v_a &= V_m \cos(\omega_e t) \\ v_b &= V_m \cos\left(\omega_e t - \frac{2\pi}{3}\right) \\ v_c &= V_m \cos\left(\omega_e t + \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

donde  $V_m$  es la amplitud pico de voltaje. Entonces, los voltajes aplicados al estator producen corrientes que circulan por los devanados; estos se representan por:

$$\begin{aligned} i_a &= I_m \cos(\omega_e t - \varphi) \\ i_b &= I_m \cos\left(\omega_e t - \varphi - \frac{2\pi}{3}\right) \\ i_c &= I_m \cos\left(\omega_e t - \varphi + \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

donde  $I_m$  es la amplitud máxima de las corrientes y  $\varphi$  es el ángulo cuyo coseno es el factor de potencia al cual opera el motor. Estas corrientes cumplen con:

$$i_a + i_b + i_c = 0 \quad (\text{A.33})$$

Despejando la corriente de la fase  $a$  ( $i_a = -(i_b + i_c)$ ) y sustituyendo el valor de  $i_a$  en (A.30) se tiene:

$$\lambda_a = \left(L_{ls} + \frac{3}{2}\bar{L}_m\right) i_a + \lambda_m \cos \theta_e \quad (\text{A.34})$$

si se considera el desplazamiento de  $-\frac{2\pi}{3}$  y  $+\frac{2\pi}{3}$  para las fases  $b$  y  $c$ , respectivamente, entonces se obtienen los enlaces de flujo.

$$\begin{aligned} \lambda_b &= \left(L_{ls} + \frac{3}{2}\bar{L}_m\right) i_b + \lambda_m \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \lambda_c &= \left(L_{ls} + \frac{3}{2}\bar{L}_m\right) i_c + \lambda_m \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

al tomar en cuenta que  $\theta_e = \omega_e t + \theta_{e0}$ , donde  $\theta_{e0}$  es la posición inicial del rotor, entonces el voltaje en la fase  $a$  es:

$$v_a = r_e i_a + \left(L_{ls} + \frac{3}{2}\bar{L}_m\right) \frac{di_a}{dt} + \lambda_m \frac{d}{dt} (\cos(\omega_e t + \theta_{e0})) \quad (\text{A.36})$$

donde  $\lambda_m$  es la magnitud de los enlaces de flujo la cual es determinada por el material magnético del rotor. Al desarrollar la derivada restante, la ecuación que define el circuito equivalente para la fase  $a$  es:

$$v_a = r_e i_a + \left(L_{ls} + \frac{3}{2}\bar{L}_m\right) \frac{di_a}{dt} - \lambda_m \omega_e \sin(\omega_e t + \theta_{e0}) \quad (\text{A.37})$$

de esta última ecuación se dice que el voltaje  $v_a$  está formado por:

1. La caída de voltaje en  $r_e i_a$ . Donde la resistencia en cada devanado del estator es la misma.

$$r_e = r_a = r_b = r_c \quad (\text{A.38})$$

2. El voltaje  $(L_{ls} + \frac{3}{2}\bar{L}_m) \frac{di_a}{dt}$  en la inductancia efectiva de la fase  $a$ . A esta inductancia se le conoce como inductancia síncrona, definida como:

$$L_e = L_a = L_b = L_c = L_{ls} + \frac{3}{2}\bar{L}_m \quad (\text{A.39})$$

3. El voltage  $e_{ag}$  generado o fuerza electromotriz inducida por el movimiento del rotor se define como:

$$e_{ag} = \lambda_m \omega_e \sin(\omega_e t + \theta_{e0}) \quad (\text{A.40})$$

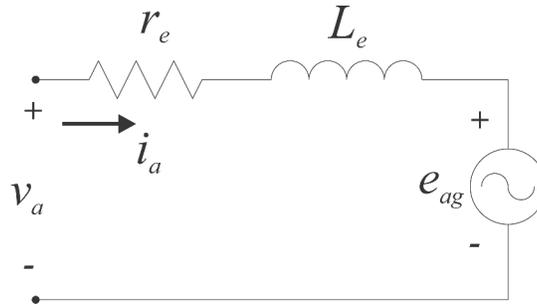


Figura A.4: Circuito equivalente de la fase  $a$ .

Así finalmente el circuito equivalente para la fase  $a$  se muestra en la Figura A.4. Para la fase  $b$  y  $c$ , se obtienen circuitos similares, solo se requiere considerar el desfaseamiento  $-\frac{2\pi}{3}$  y  $\frac{2\pi}{3}$ , respectivamente.

Tomando en cuenta la ecuación (A.37), la igualdad (A.39) y la fuerza electromotriz inducida en las fases  $b$  y  $c$ , se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} v_a &= r_e i_a + L_e \frac{di_a}{dt} - e_{ag} \\ v_b &= r_e i_b + L_e \frac{di_b}{dt} - e_{bg} \\ v_c &= r_e i_c + L_e \frac{di_c}{dt} - e_{cg} \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

despejando las derivadas:

$$\begin{aligned} L_e \frac{di_a}{dt} &= v_a - r_e i_a + e_{ag} \\ L_e \frac{di_b}{dt} &= v_b - r_e i_b + e_{bg} \\ L_e \frac{di_c}{dt} &= v_c - r_e i_c + e_{cg} \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

## A.5. Modelado en el eje de referencia $\alpha - \beta$

Para la estimación de la posición del rotor, es necesario obtener el modelado matemático del MSIP en el eje de referencia  $\alpha - \beta$ . Para ello, se parte de la ecuación (A.42), y se considera la siguiente expresión:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.43})$$

Por otro lado, el sistema de ecuaciones (A.42) en su forma matricial, se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} L_e & 0 & 0 \\ 0 & L_e & 0 \\ 0 & 0 & L_e \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_e & 0 & 0 \\ 0 & r_e & 0 \\ 0 & 0 & r_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{ag} \\ e_{bg} \\ e_{cg} \end{pmatrix} \quad (\text{A.44})$$

donde,

$$L = \begin{pmatrix} L_e & 0 & 0 \\ 0 & L_e & 0 \\ 0 & 0 & L_e \end{pmatrix}; \quad I = \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix}; \quad V = \begin{pmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{pmatrix}; \quad R = \begin{pmatrix} r_e & 0 & 0 \\ 0 & r_e & 0 \\ 0 & 0 & r_e \end{pmatrix}; \quad E_g = \begin{pmatrix} e_{ag} \\ e_{bg} \\ e_{cg} \end{pmatrix}$$

Por tanto (A.44), se reescribe en su forma vectorial como:

$$L \frac{dI}{dt} = V - RI + E_g \quad (\text{A.45})$$

Aplicando la transformada de Clarke ( $T_{\alpha\beta}$ ) a las variables de voltaje, corriente y fuerza electromotriz inducida, se tiene que:

$$\begin{aligned} V_{\alpha\beta} &= T_{\alpha\beta} V & V &= T_{\alpha\beta}^{-1} V_{\alpha\beta} \\ I_{\alpha\beta} &= T_{\alpha\beta} I & I &= T_{\alpha\beta}^{-1} I_{\alpha\beta} \\ E_{g\alpha\beta} &= T_{\alpha\beta} E_g & E_g &= T_{\alpha\beta}^{-1} E_{g\alpha\beta} \end{aligned} \quad \text{ó}$$

Sustituyendo las igualdades anteriores en la ecuación (A.45), se obtiene lo siguiente:

$$L \frac{d(T_{\alpha\beta}^{-1} I_{\alpha\beta})}{dt} = T_{\alpha\beta}^{-1} V_{\alpha\beta} - R T_{\alpha\beta}^{-1} I_{\alpha\beta} + T_{\alpha\beta}^{-1} E_{g\alpha\beta} \quad (\text{A.46})$$

Como  $T_{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}^{-1} = I$  es una matriz identidad  $3 \times 3$ , entonces la ecuación anterior se multiplica por  $T_{\alpha\beta}$ .

$$T_{\alpha\beta} L (T_{\alpha\beta}^{-1}) \frac{d(I_{\alpha\beta})}{dt} = T_{\alpha\beta} (T_{\alpha\beta}^{-1}) V_{\alpha\beta} - T_{\alpha\beta} R (T_{\alpha\beta}^{-1}) I_{\alpha\beta} + T_{\alpha\beta} (T_{\alpha\beta}^{-1}) E_{g\alpha\beta} \quad (\text{A.47})$$

Al desarrollar los términos  $T_{\alpha\beta}L(T_{\alpha\beta}^{-1}) = L$  y  $T_{\alpha\beta}R(T_{\alpha\beta}^{-1}) = R$  se consigue lo siguiente:

$$L \frac{d(I_{\alpha\beta})}{dt} = V_{\alpha\beta} - RI_{\alpha\beta} + E_{g\alpha\beta} \quad (\text{A.48})$$

Aplicando la transformada de clarke a (A.48) y tomando en cuenta la igualdad de las inductancias en (A.39), se obtiene lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} L_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & L_\beta & 0 \\ 0 & 0 & L_0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \\ v_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_e & 0 & 0 \\ 0 & r_e & 0 \\ 0 & 0 & r_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{\alpha g} \\ e_{\beta g} \\ e_{0g} \end{pmatrix} \quad (\text{A.49})$$

Debido a que el sistema (A.49) es balanceado se deduce que los valores de secuencia cero son nulos,  $e_{\alpha g} = \lambda_m \omega_e \sin(\theta_e) = \lambda_m n_p \omega_m \sin(n_p \theta_m)$  y  $e_{\beta g} = \lambda_m \omega_e \cos(\theta_e) = -\lambda_m n_p \omega_m \cos(n_p \theta_m)$ . Además como las inductancias en cada fase son iguales se tiene que  $L_s = L_\alpha = L_\beta$ , por lo tanto el sistema obtenido en el eje de referencia  $\alpha - \beta$  es:

$$\frac{di_\alpha}{dt} = \frac{1}{L_s} (v_\alpha - r_e i_\alpha + e_{\alpha g}) \quad (\text{A.50})$$

$$\frac{di_\beta}{dt} = \frac{1}{L_s} (v_\beta - r_e i_\beta - e_{\beta g}) \quad (\text{A.51})$$

## A.6. Modelado en el eje de referencia $d - q$

Del circuito equivalente del MSIP, por ley de voltajes de Kirchoff se determina que los voltajes de fase están descritos por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} v_a &= r_e i_a + \frac{d\lambda_a}{dt} \\ v_b &= r_e i_b + \frac{d\lambda_b}{dt} \\ v_c &= r_e i_c + \frac{d\lambda_c}{dt} \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

Las transformaciones de Clark y Park son válidas para cualquiera de las variables de flujo, corriente o voltaje. Aplicando la transformacion directa de Clark y Park a los flujos de fase del estator trifásico del MSIP ( $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c$ ), se obtienen las siguientes componentes del vector espacial de flujo del estator en el marco de referencia bifásico síncrono ( $d, q$ ):

$$\begin{pmatrix} \lambda_d \\ \lambda_q \\ \lambda_0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \cos(\theta_e) & \cos(\theta_e - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_e + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin(\theta_e) & -\sin(\theta_e - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_e + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \end{pmatrix} \quad (\text{A.53})$$

$$\begin{pmatrix} v_d \\ v_q \\ v_0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \cos(\theta_e) & \cos(\theta_e - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_e + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin(\theta_e) & -\sin(\theta_e - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_e + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{pmatrix} \quad (\text{A.54})$$

$$\begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \cos(\theta_e) & \cos(\theta_e - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_e + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin(\theta_e) & -\sin(\theta_e - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_e + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} \quad (\text{A.55})$$

Desarrollando  $\lambda_d$  de la matriz (A.53) se obtiene:

$$\lambda_d = \frac{2}{3} \left[ \cos(\theta_e) \lambda_a + \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) \lambda_b + \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \lambda_c \right] \quad (\text{A.56})$$

Ahora derivando (A.56) se consigue:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_d}{dt} = \frac{2}{3} & \left[ \cos(\theta_e) \frac{d\lambda_a}{dt} - \lambda_a \sin(\theta_e) \frac{d\theta_e}{dt} + \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) \frac{d\lambda_b}{dt} \right. \\ & \left. - \lambda_b \sin\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) \frac{d\theta_e}{dt} + \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \frac{d\lambda_c}{dt} - \lambda_c \sin\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \frac{d\theta_e}{dt} \right] \quad (\text{A.57}) \end{aligned}$$

por otro lado  $\omega_e = \frac{d\theta_e}{dt}$ , entonces la ecuación (A.57) se simplifica de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_d}{dt} = \frac{2}{3} & \left[ \cos(\theta_e) \frac{d\lambda_a}{dt} + \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) \frac{d\lambda_b}{dt} + \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \frac{d\lambda_c}{dt} \right. \\ & \left. - \left( \lambda_a \sin(\theta_e) + \lambda_b \sin\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) + \lambda_c \sin\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \right) \omega_e \right] \quad (\text{A.58}) \end{aligned}$$

Observando (A.53), se deduce de (A.58) que el primer término es el vector espacial del flujo en el eje  $q$ , es decir:

$$\lambda_q = \frac{2}{3} \left[ -\lambda_a \sin(\theta_e) - \lambda_b \sin\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) - \lambda_c \sin\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \right] \quad (\text{A.59})$$

despejando de las ecuaciones (A.52), las derivadas de los flujos por fase, se obtienen las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_a}{dt} &= v_a - r_e i_a \\ \frac{d\lambda_b}{dt} &= v_b - r_e i_b \\ \frac{d\lambda_c}{dt} &= v_c - r_e i_c \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

Sustituyendo las ecuaciones (A.59) y (A.60) en (A.61), se obtiene:

$$\frac{d\lambda_d}{dt} = \frac{2}{3} \left[ \cos(\theta_e)(v_a - r_e i_a) + \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right)(v_b - r_e i_b) + \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right)(v_c - r_e i_c) + \frac{3}{2}\lambda_q\omega_e \right] \quad (\text{A.61})$$

Ordenando la ecuación (A.61) y reduciendo términos se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_d}{dt} = \frac{2}{3} \left[ \frac{3}{2}\lambda_q\omega_e + v_a \cos(\theta_e) + v_b \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) + v_c \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \right. \\ \left. - \left( r_e i_a \cos(\theta_e) + r_e i_b \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) + r_e i_c \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \right) \right] \quad (\text{A.62}) \end{aligned}$$

reordenando la ecuación (A.62) se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_d}{dt} = \lambda_q\omega_e + \frac{2}{3} \left( v_a \cos(\theta_e) + v_b \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) + v_c \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \right) \\ - \frac{2}{3} r_e \left( i_a \cos(\theta_e) + i_b \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) + i_c \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \right) \quad (\text{A.63}) \end{aligned}$$

Por medio de la transformación de park, se observa la componente del vector de voltaje y corriente en el eje  $d$ , en la ecuación anterior y se sustituye por los términos  $v_d$  e  $i_d$  en (A.64).

$$\frac{d\lambda_d}{dt} = \lambda_q\omega_e + v_d - r_e i_d \quad (\text{A.64})$$

Despejando (A.64) para la componente de voltaje en el eje  $d$  se obtiene:

$$v_d = \frac{d\lambda_d}{dt} + r_e i_d - \lambda_q\omega_e \quad (\text{A.65})$$

Desarrollando  $\lambda_q$  de la matriz (A.53) se deduce la ecuación (A.66).

$$\lambda_d = \frac{2}{3} \left[ -\sin(\theta_e)\lambda_a - \sin\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right)\lambda_b - \sin\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right)\lambda_c \right] \quad (\text{A.66})$$

Derivando (A.66) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_q}{dt} = \frac{2}{3} \left[ -\sin(\theta_e) \frac{d\lambda_a}{dt} - \lambda_a \cos(\theta_e) \frac{d\theta_e}{dt} - \sin\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) \frac{d\lambda_b}{dt} \right. \\ \left. - \lambda_b \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) \frac{d\theta_e}{dt} - \sin\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \frac{d\lambda_c}{dt} - \lambda_c \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \frac{d\theta_e}{dt} \right] \end{aligned}$$

Factorizando y tomando en cuenta a la derivada temporal de la posición, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_q}{dt} = -\frac{2}{3} \left( \lambda_a \cos(\theta_e) \frac{d\theta_e}{dt} + \lambda_b \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) \frac{d\theta_e}{dt} + \lambda_c \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \frac{d\theta_e}{dt} \right) \quad (\text{A.67}) \\ -\frac{2}{3} \left( \sin(\theta_e) \frac{d\lambda_a}{dt} + \sin\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) \frac{d\lambda_b}{dt} + \sin\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \frac{d\lambda_c}{dt} \right) \end{aligned}$$

El primer término agrupado es igual a  $\lambda_d$ , mientras que en el segundo término se sustituyen las ecuaciones (A.60) en (A.67) obteniendo la siguiente expresión matemática:

$$\frac{d\lambda_q}{dt} = -\lambda_d\omega_e - \frac{2}{3} \left[ \sin(\theta_e)(v_a - r_e i_a) + \sin\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right)(v_b - r_e i_b) + \sin\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right)(v_c - r_e i_c) \right] \quad (\text{A.68})$$

Tomando en cuenta el criterio de (A.38) y factorizando (A.68), ésta se expresa como:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_q}{dt} = \lambda_d\omega_e - \frac{2}{3} \left( v_a \sin(\theta_e) + v_b \sin\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) + v_c \sin\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \right) \\ + \frac{2}{3} r_e \left( i_a \sin(\theta_e) + i_b \sin\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) + i_c \sin\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

De acuerdo a la transformada de Park para voltajes y corrientes se tiene que:

$$\begin{aligned} v_q &= -\frac{2}{3} \left( v_a \sin(\theta_e) + v_b \sin\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) + v_c \sin\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \right) \\ -i_q &= \frac{2}{3} \left( i_a \sin(\theta_e) + i_b \sin\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) + i_c \sin\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.70})$$

Sustituyendo (A.70) en la ecuación (A.69) se tiene que:

$$\frac{d\lambda_q}{dt} = -\lambda_d\omega_e + v_q - r_e i_q \quad (\text{A.71})$$

Por lo tanto, el vector espacial en el eje  $q$ , del voltaje de entrada es:

$$v_q = \frac{d\lambda_q}{dt} + r_e i_q + \lambda_d\omega_e \quad (\text{A.72})$$

El modelo matemático del MSIP en función del flujo magnético, voltajes y corrientes de fase expresado en el marco de referencia  $d - q$ , quedan definidos de la siguiente manera:

$$v_d = \frac{d\lambda_d}{dt} + r_e i_d - \lambda_q\omega_e \quad (\text{A.73})$$

$$v_q = \frac{d\lambda_q}{dt} + r_e i_q + \lambda_d\omega_e \quad (\text{A.74})$$

Asumiendo que:

$$T_{dq} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \cos(\theta_e) & \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sin(\theta_e) & -\sin\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.75})$$

Aplicando la transformada de Park  $T_{dq}$  al vector de enlace de flujo mostrado en la ecuación (A.5), se obtiene lo siguiente:

$$\Lambda_{dq} = LT_{dq}I + T_{dq}\Lambda_m \quad (\text{A.76})$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_d \\ \lambda_q \\ \lambda_0 \end{pmatrix} = LT_{dq} \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} + T_{dq} \begin{pmatrix} \lambda_{am} \\ \lambda_{bm} \\ \lambda_{cm} \end{pmatrix} \quad (\text{A.77})$$

Por lo tanto, realizando los cálculos y simplificando se tiene la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} \lambda_d \\ \lambda_q \\ \lambda_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_d i_d \\ L_q i_q \\ L_{st} i_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_m \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.78})$$

Teniendo en cuenta que es un sistema balanceado donde  $\lambda_0 = 0$  y sustituyendo la ecuación anterior en la ecuación, se obtiene el siguiente modelo matemático.

$$v_d = L_d \frac{di_d}{dt} + r_e i_q - L_q i_q \omega_e \quad (\text{A.79})$$

$$v_q = L_q \frac{d\lambda_q}{dt} + r_e i_d + L_d i_d \omega_e + \lambda_m \omega_e \quad (\text{A.80})$$

Como  $L_d = L_q = L$  y  $\omega_e = n_p \omega_m$ , entonces se despeja de las derivadas temporales, entonces se tiene:

$$\frac{di_d}{dt} = \frac{1}{L} (v_d - r_e i_d + L i_q n_p \omega_m) \quad (\text{A.81})$$

$$\frac{d\lambda_q}{dt} = \frac{1}{L} (v_q - r_e i_q - L i_d n_p \omega_m - \lambda_m n_p \omega_m) \quad (\text{A.82})$$

Para el calculo del flujo de enlace del iman permanente  $\lambda_m$ , se define la siguiente ecuación (ver manual de PSIM )

$$\lambda_m = \frac{60V_{pk}/krpm}{\sqrt{3}\pi n_p 1000} \quad (\text{A.83})$$

donde:

- $V_{pk}/krpm$ : Es la voltaje pico a pico de la fuerza contra electromotriz (obtenido a velocidad constante de 1000 rpm, impulsada por otro motor).
- $P$ : Es el número de polos del MSIP.

## A.7. Modelado electromecánico

La representación del elemento mecánico sobre el eje del rotor se muestra en la siguiente figura. Analizando el diagrama electromecánico de la figura anterior y aplicando la segunda ley de Newton se obtiene la siguiente ecuación diferencial que define al subsistema electromecánico:

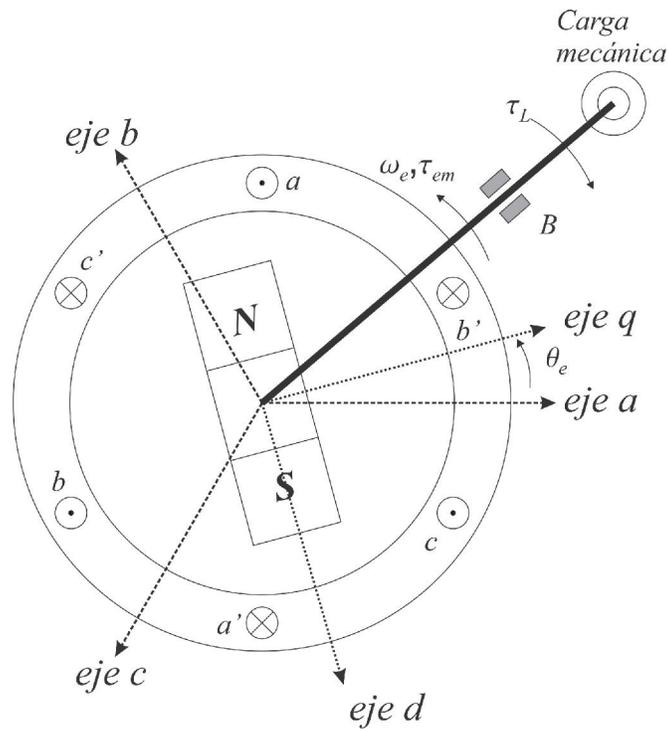


Figura A.5: Diagrama electromecánico del MSIP.

$$J_{mec} \frac{d\omega_m}{dt} + \tau_L + B\omega_m = \tau_{em} \quad (A.84)$$

Al despejar la derivada de la velocidad angular mecánica y sustituyendo  $\tau_{em} = \frac{3}{2}K_m i_q$  (véase anexo C), la ecuación anterior queda de la siguiente manera:

$$\frac{d\omega_m}{dt} = \frac{1}{J_{mec}} \left( \frac{3}{2}K_m i_q - B\omega_m - \tau_L \right) \quad (A.85)$$

Donde  $J_{mec}$  es la inercia rotacional del rotor y  $B$  es el coeficiente de fricción viscosa del motor.



# Apéndice B

## Transformaciones de Clarke y Park

### B.1. Transformación de Clarke

En la figura B.1 se observan 3 variables  $f_a$ ,  $f_b$ ,  $f_c$  desfasadas exactamente  $120^\circ$  ubicadas en el eje de referencia  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , también se observa un eje bifásico ortogonal conocido como eje de referencia estacionario  $\alpha - \beta$ . Se observa que el eje  $\alpha$  del eje de referencia estacionario, se encuentra alineado con el eje  $a$  del eje de referencia trifásico.

La transformación clarke permite transformar las variables que se encuentran en el eje de referencia trifásico  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , al eje de referencia estacionario  $\alpha - \beta$ .

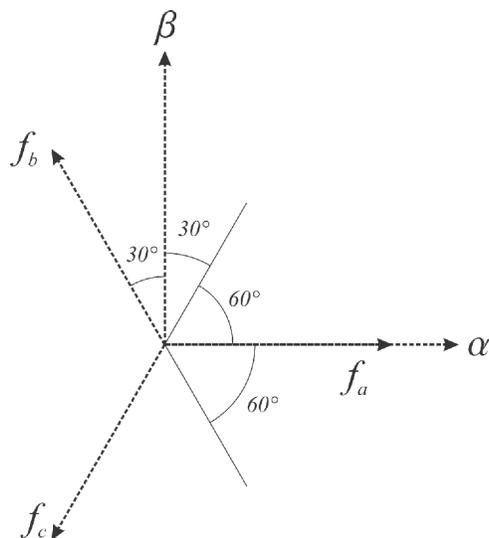


Figura B.1: Eje de referencia  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y eje de referencia  $\alpha - \beta$ .

Analizando la proyección de las variables del eje de referencia  $a$ ,  $b$ ,  $c$  al eje de referencia  $\alpha - \beta$ , realizando las sumas vectoriales necesarias y ordenando matricialmente se obtiene:

$$\begin{pmatrix} f_a \\ f_b \\ f_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\cos(60^\circ) & \cos(30^\circ) & 1 \\ -\cos(60^\circ) & -\cos(30^\circ) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\alpha \\ f_\beta \\ f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\alpha \\ f_\beta \\ f_0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

La inversa de transformación de clarke, esta dado por la siguiente ecuación:

$$\begin{pmatrix} f_\alpha \\ f_\beta \\ f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_a \\ f_b \\ f_c \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_a \\ f_b \\ f_c \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

En términos trigonométricos (B.2) puede ser expresada como:

$$\begin{pmatrix} f_\alpha \\ f_\beta \\ f_0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & -\cos(60^\circ) & -\cos(60^\circ) \\ 0 & \cos(30^\circ) & -\cos(30^\circ) \\ \cos(60^\circ) & \cos(60^\circ) & \cos(60^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_a \\ f_b \\ f_c \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

La ecuación (B.2) o (B.3) es la transformación de clarke, con la cual se representan variables  $f_a, f_b, f_c$  en un eje de referencia bifásico estacionario  $f_\alpha, f_\beta$ .

Una ventaja de aplicar la transformación  $\alpha - \beta$ , es que separa las componentes de frecuencia cero al ubicarlas en el eje de secuencia cero. Si el sistema es de tres hilos (no tiene conductor de neutro) no se tienen entonces componentes de secuencia cero, por lo que la voltajes y corrientes en la componente cero puede eliminarse de las ecuaciones anteriores.

## B.2. Transformación de Park

La transformada de Park permite obtener valores trifásicos de un sistema de referencia fijo en un sistema de referencia ortonormal giratorio. La transformada inversa permite hacer lo contrario, si se tiene un sistema ortonormal con eje de referencia fijo, y el desfase, se puede obtener el sistema con eje de referencia giratorio. Además, es la combinación de la transformada de Clarke y el giro. Esta transformada convierte un sistema trifásico estacionario en un sistema trifásico ortogonal que gira en sincronismo con el ángulo  $\theta_m$  del rotor. Permite como tal un cambio de coordenadas, desde el un sistema trifásico estacionario al sistema coordinado giratorio. La transformada de Park utiliza la de transformada de clarke para obtener el equivalente en cuadratura de los ejes fijos a los giratorios con un ángulo. El significado físico de la transformada de Park es colocarse en un eje de referencia fijo o giratorio.

En la figura B.2 se observa el eje de referencia bifásico estacionario  $\alpha - \beta$ , así como también se visualizan dos variables  $f_d$  y  $f_q$  que se encuentran en un eje de referencia bifásico síncrono

$d - q$ . El eje de referencia síncrono  $d - q$ , así como sus variables  $f_d$  y  $f_q$  se encuentran rotando respecto al eje de referencia estacionario  $\alpha - \beta$ , con una velocidad angular  $\omega_e$ .

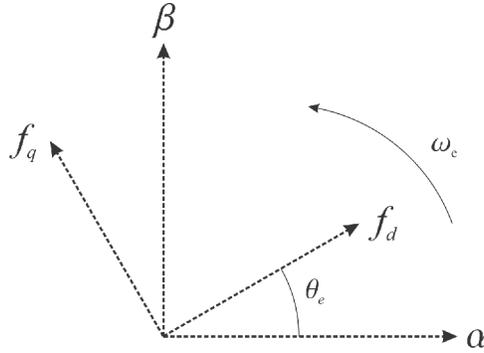


Figura B.2: Eje de referencia síncrono  $d - q$ , eje de referencia  $\alpha - \beta$ .

Con el apoyo de la figura B.2 se analiza la proyección de las variables  $f_d$  y  $f_q$  sobre el eje de referencia  $\alpha - \beta$ ; por lo tanto, se obtiene la ecuaciones de la proyecciones en su forma matricial, la cual expresa las variables del eje de referencia  $d - q$  en función de las variables del eje de referencia  $\alpha - \beta$ , tal como se muestra en la ecuación siguiente.

$$\begin{pmatrix} f_d \\ f_q \\ f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_e) & \sin(\theta_e) & 0 \\ -\sin(\theta_e) & \cos(\theta_e) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\alpha \\ f_\beta \\ f_0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

En su forma inversa, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\begin{pmatrix} f_\alpha \\ f_\beta \\ f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_e) & \sin(\theta_e) & 0 \\ -\sin(\theta_e) & \cos(\theta_e) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_d \\ f_q \\ f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_e) & -\sin(\theta_e) & 0 \\ \sin(\theta_e) & \cos(\theta_e) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_d \\ f_q \\ f_0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Sustituyendo la ecuación (B.2) en (B.4) y simplificando, se obtiene:

$$\begin{pmatrix} f_d \\ f_q \\ f_0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \cos(\theta_e) & \cos(\theta_e - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_e + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin(\theta_e) & -\sin(\theta_e - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_e + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_a \\ f_b \\ f_c \end{pmatrix} \quad (\text{B.6})$$

De (B.6) claramente se observa que es posible aplicar la transformada de clark y la transformada de park a un sistema en el eje de referencia  $a, b, c$ , la cual es de gran utilidad para el desarrollo de los modelos del MSIP y del ITFV. Estas transformaciones son válidas para cualquiera de las variables de flujo de enlace, corriente o voltaje trifásico.



# Apéndice C

## Cálculo del par electromagnético

Para la obtención de la ecuación de par electromagnético ( $\tau_{em}$ ), se parte de la potencia que existe en cada devanado de fase en el marco de referencia  $d - q$ , para ello se desarrollan las ecuaciones que deducen matemáticamente el  $\tau_{em}$ , generado internamente en el MSIP. Se sabe que la potencia de entrada al motor está dada por:

$$P = vi \quad (C.1)$$

Considerando una alimentación trifásico al MSIP, se tiene que:

$$P = \begin{pmatrix} v_a & v_b & v_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} \quad (C.2)$$

Aplicando la transformada de Park a los voltjes de entrada  $a, b, c$  se obtiene las siguientes expresiones matemáticas en el eje de referencia rotatorio  $d - q$ .

$$\begin{pmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_e) & -\sin(\theta_e) & 1 \\ \cos(\theta_e - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_e - \frac{2\pi}{3}) & 1 \\ \cos(\theta_e + \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_e + \frac{2\pi}{3}) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_d \\ v_q \\ v_0 \end{pmatrix} \quad (C.3)$$

La transformación es válida también para las corrientes de estator, entre otras (flujo de enlace y fuerza electromotriz inducida).

$$\begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_e) & -\sin(\theta_e) & 1 \\ \cos(\theta_e - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_e - \frac{2\pi}{3}) & 1 \\ \cos(\theta_e + \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_e + \frac{2\pi}{3}) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{pmatrix} \quad (C.4)$$

Sustituyendo la ecuaciones (C.3) y (C.4) en la ecuación de potencia (C.1), ésta se puede

expresar de la siguiente manera:

$$P = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta_e) & -\sin(\theta_e) & 1 \\ \cos(\theta_e - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_e - \frac{2\pi}{3}) & 1 \\ \cos(\theta_e + \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_e + \frac{2\pi}{3}) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_d \\ v_q \\ v_0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \cos(\theta_e) & -\sin(\theta_e) & 1 \\ \cos(\theta_e - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_e - \frac{2\pi}{3}) & 1 \\ \cos(\theta_e + \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_e + \frac{2\pi}{3}) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{pmatrix} \end{bmatrix}^T \quad (C.5)$$

Realizando las operaciones matriciales necesarias, simplificando y factorizando se demuestra que la potencia del sistema es igual a:

$$P = \begin{pmatrix} v_d & v_q & v_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_d \\ v_q \\ v_0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{pmatrix} \quad (C.6)$$

Por otro lado, se sabe que el flujo electromagnético es igual al producto de la inductancia por la corriente, de ahí se tiene la siguiente expresión:

$$\lambda = LI \quad (C.7)$$

Aplicando la derivada temporal a la ecuación (C.7) y sustituyéndolo en el modelo vectorial del MSIP, se puede expresar matricialmente como:

$$\begin{pmatrix} v_d \\ v_q \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d\lambda_d}{dt} \\ \frac{d\lambda_q}{dt} \\ \frac{d\lambda_0}{dt} \end{pmatrix} + r_e \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_d \\ \lambda_q \\ \lambda_0 \end{pmatrix} \quad (C.8)$$

donde,

$$\begin{pmatrix} \frac{d\lambda_d}{dt} \\ \frac{d\lambda_q}{dt} \\ \frac{d\lambda_0}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_d & 0 & 0 \\ 0 & L_q & 0 \\ 0 & 0 & L_{ls} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{di_d}{dt} \\ \frac{di_q}{dt} \\ \frac{di_0}{dt} \end{pmatrix} \quad (C.9)$$

El término  $L_{ls}$  se refiere a la inductancia de dispersión del estator en (C.9), sustituyendo la ecuación anterior en (C.8), se obtiene que:

$$\begin{pmatrix} v_d \\ v_q \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_d & 0 & 0 \\ 0 & L_q & 0 \\ 0 & 0 & L_{ls} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{di_d}{dt} \\ \frac{di_q}{dt} \\ \frac{di_0}{dt} \end{pmatrix} + r_e \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{pmatrix} + \left[ \begin{pmatrix} 0 & -L_q & 0 \\ L_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_m \\ 0 \end{pmatrix} \right] \omega_e \quad (C.10)$$

Sustituyendo (C.10) en la ecuación de potencia (C.6):

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = P = & \left\{ \left( \frac{di_d}{dt} \quad \frac{di_q}{dt} \quad \frac{di_0}{dt} \right) \begin{pmatrix} L_d & 0 & 0 \\ 0 & L_q & 0 \\ 0 & 0 & L_{ls} \end{pmatrix} + r_e \begin{pmatrix} i_d & i_q & i_0 \end{pmatrix} \right. \\ & \left. + \left[ \begin{pmatrix} i_d & i_q & i_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & L_d & 0 \\ -L_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \lambda_m & 0 \end{pmatrix} \right] \omega_e \right\} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{pmatrix} \right\} \quad (\text{C.11}) \end{aligned}$$

Desarrollando las operaciones matriciales se prosigue que:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = & \left[ \begin{pmatrix} \frac{di_d}{dt} & \frac{di_q}{dt} & \frac{di_0}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3L_d}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3L_q}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3L_{ls} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{pmatrix} \right] + \left[ r_e \begin{pmatrix} i_d & i_q & i_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{pmatrix} \right] \\ & + \left[ \begin{pmatrix} i_d & i_q & i_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{3L_d}{2} & 0 \\ -\frac{3L_q}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{3\lambda_m}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{pmatrix} \right] \omega_e \quad (\text{C.12}) \end{aligned}$$

El primer término de (C.12) representa la potencia almacenada en los inductores:

$$\left[ \begin{pmatrix} \frac{di_d}{dt} & \frac{di_q}{dt} & \frac{di_0}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3L_d}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3L_q}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3L_{ls} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{pmatrix} \right] \quad (\text{C.13})$$

Mientras que el segundo término de (C.12) representa las pérdidas de potencia disipada en los resistores:

$$\left[ r_e \begin{pmatrix} i_d & i_q & i_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{pmatrix} \right] \quad (\text{C.14})$$

El modelo del MSIP que se desarrolla en este trabajo está enfocado en la operación de la fuerza electromotriz inducida por el movimiento rotatorio de los IPs sobre el rotor, por lo tanto se desprecian los primeros términos de la ecuación (C.12) implicando que la potencia disponible del MSIP para desarrollar el par electromagnético es:

$$\left[ \begin{pmatrix} i_d & i_q & i_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{3L_d}{2} & 0 \\ -\frac{3L_q}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{3\lambda_m}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{pmatrix} \right] \omega_e \quad (\text{C.15})$$

Desarrollando los productos de la (C.15) se expresa como:

$$\frac{dE}{dt} = P = \frac{3}{2} (L_d \dot{i}_d \dot{i}_q - L_q \dot{i}_q \dot{i}_d + \lambda_m \dot{i}_q) \omega_e \quad (\text{C.16})$$

Se sabe que el  $\tau_{em}$  del MSIP se puede expresar como:

$$\tau_{em} = \frac{P}{\omega_m} \quad (\text{C.17})$$

donde  $\omega_e = n_p \omega_m$ , y sustituyendo en la (C.16), se tiene que el par electromagnético desarrollado internamente por el MSIP es:

$$\tau_{em} = \frac{3}{2} n_p (L_d \dot{i}_d \dot{i}_q - L_q \dot{i}_q \dot{i}_d + \lambda_m \dot{i}_q) \quad (\text{C.18})$$

En este proyecto de tesis se utiliza un MSIPS (Motor Síncrono de Imanes Permanentes Superficiales), Por lo tanto  $L_d = L_q$ , entonces la ecuación de par queda de la siguiente manera:

$$\tau_{em} = \frac{3}{2} n_p \lambda_m \dot{i}_q \quad (\text{C.19})$$

Donde  $K_m = n_p \lambda_m$ , y por consiguiente:

$$\tau_{em} = \frac{3}{2} K_m \dot{i}_q \quad (\text{C.20})$$

# Apéndice D

## Artículos realizados

Durante el proceso de realización de este proyecto de tesis se obtuvieron dos artículos de publicación, las cuales se muestran a continuación:

Journal:	<i>IEEE Transactions on Power Electronics</i>
Manuscript ID:	Draft
Manuscript Type:	Regular Paper
Date Submitted by the Author:	n/a
Complete List of Authors:	Linares-Flores, Jesús; Universidad Tecnológica de la Mixteca, Instituto de Electrónica y Mecatrónica Sira-Ramirez, H.; Cinvestav-IPN, Electrical Engineering; García-Rodríguez, Carlos; Universidad Tecnológica de la Mixteca, Instituto de Electrónica y Mecatrónica Escobar-Noriega, Carlos; Universidad Tecnológica de la Mixteca, Departamento de Posgrado
Keywords:	AC motor drives, Control systems, AC motors

# Robust Sensorless Speed Tracking for a Permanent Magnet Synchronous Motor : An Exact Tracking Error Dynamics Passive Output Feedback Control Approach

J. Linares-Flores, H. Sira-Ramírez, C. García-Rodríguez, and C. Escobar-Noriega

**Abstract**—A sensor-less angular velocity trajectory tracking control scheme is proposed for a Permanent Magnet Synchronous Motor (PMSM) using an Exact Tracking Error Dynamics Passive Output Feedback (ETEDPOF) control approach. The main result is the introduction of a robust linear time-varying controller based only on the measurement of the motor currents. The rotor position and rotor angular velocity are on line estimated using two linear Generalized Proportional Integral (GPI) observers, gathering accurate estimates of the back Electro Motive Force (EMF) functions defined at the stationary reference frame  $-$ . A third GPI linear observer is interpreted as a baseband equivalent Phase Locked Loop (PLL) circuit. The control law is derived using the ETEDPOF control scheme from which a static linear passive output tracking error feedback is obtained. The main departure from traditional ETEDPOF control schemes is represented by the fact that PMSM's exhibit a state dependent conservative vector field in its dynamics. The unknown load torque effect is estimated by means of a reduced order observer which is then adapted to the angular position reference trajectory. The differential flatness property of the PMSM multi-variable system is exploited throughout. The discrete switching control realization of the designed continuous feedback control law is accomplished by means of a traditional PWM modulation scheme. Successful experimental results, using a DS1104 controller board, are also reported.

**Index Terms**—Permanent Magnet Synchronous Motor Control, Robust Control, Sensorless Speed tracking, ETEDPOF Control, Differential Flatness.

## I. INTRODUCTION

Speed sensorless control of permanent magnet synchronous machines, based on EMF information, has been of constant interest among research and practitioners of PMSM's over the past 12 years. Gathering position and velocities from current and voltage measurements, whenever feasible, is a desirable option in many industrial applications due to its simplicity and high efficiency. Some applications, such as: vacuum pumps, crane and elevator applications (where the distance between the motor and inverter is large enough so that sensor signal attenuation and noise interference are high), home appliances (refrigerators and air conditioners) where cost constraints generally stymie the use of speed sensors (See [9] and [13]).

J. Linares, C. García-Rodríguez and C. Escobar-Noriega are with the Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapán de León, Oaxaca, México.

H. Sira-Ramírez is with the Electrical Engineering Department of Cinvestav-IPN, México D.F., México

Solsona *et al.* [19] compare two reduced -order observers for position and speed estimation, a linear adaptive observer (AO) and a nonlinear observer (NLO). Analysis of the results shows that the NLO scheme has better performance than the observer AO, with lower computational load. However, the NLO implementation would requires a higher computational complexity than the AO algorithm, but smaller that needed by the Model Reference Adaptive System (MRAS) techniques for speed estimation. De Angelo *et al.* [3] proposes a new sensorless scheme for high-performance speed control of PMSM driving an unknown load. This scheme uses an extended nonlinear reduced order observer to estimate the induced electromotive force (EMF) and the load torque.

Lee *et al.* [9] design a nonlinear observer for surface mount PMSM. The nonlinear observer generates the position estimate  $\hat{\theta}$  via estimates of  $\sin \theta$  and  $\cos \theta$ . This observer does not require speed information, thus eliminating the complexity associated with speed estimation errors. The experimental results are very good, with and without loads, above 10 [rpm].

Genduso *et al.* [5] propose a low time consuming and low cost sensorless control algorithm for high dynamic performance in PMSM's. This control algorithm is based on the estimation of rotor speed and rotor angular position based on the back EMF space vector determination. As such, it does not require voltage sensors since it uses the references voltages given by the current controllers instead of the actual ones. Wang [22] proposes a new startup procedure based on closed loop current regulation. This new starting method can work under different load conditions and allows smooth transition from the startup procedure to the back EMF based sensorless control mode. This procedure offers an attractive low cost solution.

Ortega *et al.* [13] propose a simple two dimensional position nonlinear observer, which is easily implementable. The speed observer is designed following the immersion and invariance technique. This scheme yields good experimental results under sudden load changes at middle speed range.

This article proposes the use of GPI linear observers for the estimation of the rotor position and its corresponding speed in a PMSM. Two GPI observers estimate the back EMF functions at the stationary reference frame  $-$ , while a third GPI observer is used for the estimation of the rotor position and the angular speed. This GPI linear observer is designed following the PLL baseband equivalent methodology given in Harnefors

et al. [6]. The trajectory tracking feedback controller, based only on motor current measurements, is linear and designed to work under different uncertain load conditions. Using a reduced order linear observer, the load torque is accurately estimated to achieve an on-line adaptation on the prescribed reference trajectory. The approach exploits the differential flatness property of the nonlinear multivariable PMSM system.

## II. MATHEMATICAL MODEL OF THE PMSM, PROBLEM FORMULATION AND MAIN RESULTS

The mathematical model of a PMSM, written in a stationary reference frame, is given by, [2]

$$L_s \frac{di}{dt} = R_s i + e + u \quad (1)$$

$$L_s \frac{di}{dt} = R_s i - e + u \quad (2)$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = e - D\omega - L \quad (3)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \quad (4)$$

where  $i$ ,  $i$ ,  $e$ ,  $e$ ,  $u$ , and  $u$  represent, respectively, the motor currents, the induced-back EMF's, and the excitation-voltage components. The parameters,  $R_s$  and  $L_s$  denote, respectively, the stator resistance and the stator inductance;  $\theta$ ,  $\omega$  and  $e$  represent the rotor angular position, the angular speed, and the electromotive torque developed by the machine;  $D$  is the rotational friction coefficient,  $J$  and  $L$  are, respectively, the moment inertia and the load torque. The load torque is considered to be constant but, otherwise, completely unknown.

The back EMF functions, induced into the stator windings, are given by

$$e = K_m \sin(n_p \theta) \quad (5)$$

$$e = K_m \cos(n_p \theta) \quad (6)$$

and the electromagnetic torque developed by the PMSM is just expressed as,

$$e = K_m [ i \sin(n_p \theta) + i \cos(n_p \theta) ] \quad (7)$$

In this article, we consider three fundamental problems:

**Problem 1: Back EMF function observers.** Assume that only the electrical variables (motor currents and applied voltages) are available for measurement. Namely,  $i$  and  $u$ . Assume also that the numerical values of the electrical parameters,  $L_s$ ,  $R_s$ , and  $n_p$  are well known. The problem consists in designing two observers, one for each back EMF function, that asymptotically estimate the actual value of back EMF functions appearing in the electrical equations (1) and (2). For this problem, a set of two GPI linear observers are proposed which solve the formulated estimation problem.

**Problem 2: Rotor angular position and rotor angular speed observer.** The availability of the back EMF's from the solution of the previous problem is used to obtain a first estimate of the angular position and of the angular velocity in a direct fashion. To further correct these estimates, a nonlinear observer, proposed by Harnefors et al. in [6], is used. This

observer is readily interpreted as a baseband equivalent PLL circuit. This nonlinear observer has the virtue of having a tangent linearization coincident with a traditional Luenberger observer. Locally, then, the PLL observer further corrects the estimated mechanical states obtained from the back EMF estimated functions. The second problem is formulated as follows: Assuming that only the estimated back EMF functions are available for measurement, design an observer, in the form of a baseband equivalent PLL circuit, that asymptotically reconstructs the rotor position and the rotor speed of the PMSM.

**Problem 3: Load torque parameter observer.** It is desired to accurately estimate the load torque input to the PMSM on the basis of the measured currents and the angular velocity estimate obtained from the solution to the previous problem. The nominal values of the parameters,  $J$  and  $K_m$  are assumed to be known, and the unknown load torque perturbation input is considered to be constant. A reduced order observer for the load torque is then proposed which accurately yields the uncertain value of the constant load torque.

### A. Estimation of the Back EMF Functions via Extended Observers

This section provides the solution to Problem 1, defined above.

We propose a linear extended observer, known as a Generalized proportional Integral (GPI) observer for simultaneous estimation of the back EMF functions,  $e$  and  $e$ , based on knowledge of the currents  $i$  and  $i$  and the applied voltages  $v$ ,  $v$  (see *Sira-Ramírez et al.* [17]). The idea is to model the unknown terms,  $e$  and  $e$ , as an unknown time polynomial functions, of certain degree (say 5th degree). These models can be incorporated into the observer as an internal system model in the form of a string of cascaded integrations with arbitrary initial conditions (see *Sira-Ramírez et al.* [17]). Thus, we have the following extended GPI observer for the back EMF  $e$ :

$$\begin{aligned} L_s \frac{d\hat{i}}{dt} &= R_s \hat{i} + z_1 + u + \gamma_5 (i - \hat{i}) \quad (8) \\ \dot{z}_1 &= z_2 + \gamma_4 (i - \hat{i}) \\ \dot{z}_2 &= z_3 + \gamma_3 (i - \hat{i}) \\ \dot{z}_3 &= z_4 + \gamma_2 (i - \hat{i}) \\ \dot{z}_4 &= z_5 + \gamma_1 (i - \hat{i}) \\ \dot{z}_5 &= \gamma_0 (i - \hat{i}) \end{aligned}$$

where  $z_1$  is the variable representing the estimate of  $e$  regarded as a time signal. The GPI linear observer gains,  $\gamma_i$ ,  $i = 0, \dots, 5$ , are calculated using any pole-assignment technique (See for instance, [21]).

For the estimation of the back EMF function  $e$ , the linear

GPI observer is similarly given by

$$\begin{aligned} L_s \frac{d\hat{i}}{dt} &= R_s i + z_1 + u + \sum_{i=1}^5 (i - \hat{i}) \quad (9) \\ \dot{z}_1 &= z_2 + \sum_{i=1}^4 (i - \hat{i}) \\ \dot{z}_2 &= z_3 + \sum_{i=1}^3 (i - \hat{i}) \\ \dot{z}_3 &= z_4 + \sum_{i=1}^2 (i - \hat{i}) \\ \dot{z}_4 &= z_5 + \sum_{i=1}^1 (i - \hat{i}) \\ \dot{z}_5 &= \sum_{i=1}^0 (i - \hat{i}) \end{aligned}$$

where  $z_1$  is now the variable representing the estimate of the signal  $e$ .

1) *Stability Analysis:* Let the current estimation errors be defined as:  $e_i = i - \hat{i}$  and  $e_{\dot{i}} = \dot{i} - \dot{\hat{i}}$ . These errors are governed by:

$$\begin{aligned} L_s \frac{de_i}{dt} &= R_s e_i - z_1 + e - \sum_{i=1}^5 e_i \quad (10) \\ \dot{z}_1 &= z_2 + \sum_{i=1}^4 e_i \\ &\vdots \\ \dot{z}_5 &= \sum_{i=1}^0 e_i \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} L_s \frac{de_{\dot{i}}}{dt} &= R_s e_{\dot{i}} - z_1 - e - \sum_{i=1}^5 e_{\dot{i}} \quad (11) \\ \dot{z}_1 &= z_2 + \sum_{i=1}^4 e_{\dot{i}} \\ &\vdots \\ \dot{z}_5 &= \sum_{i=1}^0 e_{\dot{i}} \end{aligned}$$

Therefore, the error dynamics of estimation are

$$\begin{aligned} e_i^{(6)} + \frac{R_s + \sum_{i=1}^5}{L_s} e_i^{(5)} + \frac{\sum_{i=1}^4}{L_s} e_i^{(4)} + \frac{\sum_{i=1}^3}{L_s} e_i^{(3)} \\ + \frac{\sum_{i=1}^2}{L_s} \ddot{e}_i + \frac{\sum_{i=1}^1}{L_s} \dot{e}_i + \frac{\sum_{i=1}^0}{L_s} e_i = \frac{1}{L_s} e^{(5)} \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_{\dot{i}}^{(6)} + \frac{R_s + \sum_{i=1}^5}{L_s} e_{\dot{i}}^{(5)} + \frac{\sum_{i=1}^4}{L_s} e_{\dot{i}}^{(4)} + \frac{\sum_{i=1}^3}{L_s} e_{\dot{i}}^{(3)} \\ + \frac{\sum_{i=1}^2}{L_s} \ddot{e}_{\dot{i}} + \frac{\sum_{i=1}^1}{L_s} \dot{e}_{\dot{i}} + \frac{\sum_{i=1}^0}{L_s} e_{\dot{i}} = \frac{1}{L_s} e^{(5)} \quad (13) \end{aligned}$$

*Proposition 1:* Let  $\sum_{i=1}^5 = 1$  and  $\omega_n > 0$  constants such that the following polynomial,  $p_d(s)$ , in the complex variable  $s$ , defined by

$$p_d(s) = s^6 + 2\omega_n s + \omega_n^2 s^3$$

is a sixth degree Hurwitz polynomial.

Since  $e^{(5)}(t)$  and  $e^{(5)}(t)$  are assumed to be uniformly absolutely bounded then, there exists design coefficients  $k_k$  ( $k = 0, \dots, 5$ ) for the observer, which may be chosen via a term-by-term comparison of (12) and (13) with those of a desired sixth order characteristic polynomial,  $p_d(s)$ . Therefore,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 &= 6L_s\omega_n - R_s - \sum_{i=1}^4 = 15L_s\omega_n^2 \\ \sum_{i=1}^3 &= 20L_s\omega_n^3 - \sum_{i=1}^2 = 15L_s\omega_n^4 \\ \sum_{i=1}^1 &= 6L_s\omega_n^5 - \sum_{i=1}^0 = L_s\omega_n^6 \end{aligned}$$

As long as the roots of the characteristic polynomial are chosen sufficiently far from the imaginary axis in the left

portion of the complex plane, the disturbing effects of the fifth-order time derivatives:  $e^{(5)}(t)$  and  $e^{(5)}(t)$  are diminished, or attenuated; with the observer estimation errors, and their time derivatives, asymptotically converging toward small as desired disks centered around the origins in the respective observer estimation error phase space (for generalities about the *Extended Observers* or *GPI Observers*, see [11], [17], [18], [26], [27]).

**Fact 1.** From (10) and (11) it follows that if  $e_i$  and  $e_{\dot{i}}$  are identically zero. In particular, from the differential equation for  $e_i$  and  $e_{\dot{i}}$  in (10) and (11),

$$L_s \frac{de_i}{dt} = R_s e_i - z_1 + e - \sum_{i=1}^5 e_i \quad (14)$$

$$L_s \frac{de_{\dot{i}}}{dt} = R_s e_{\dot{i}} - z_1 - e - \sum_{i=1}^5 e_{\dot{i}} \quad (15)$$

It follows that if  $e_i$  and  $e_{\dot{i}}$  are identically zero, then  $z_1(t) = \hat{e}(t)$  and  $\dot{z}_1(t) = \dot{\hat{e}}(t)$  are exact estimate of the nonlinear terms:  $e^{(j)}(t)$  and  $e^{(j)}(t)$ . Moreover,  $z_j = e^{(j-1)}(t)$  for  $j = 2, \dots, 5$  and  $\dot{z}_j = e^{(j)}(t)$ .

**Fact 2.** Similarly, from (8) and (9) themselves, if all  $e_i$  were not identically zero, but ultimately uniformly arbitrarily close to zero, then  $z_1 = \hat{e}$  and  $\dot{z}_1 = \dot{\hat{e}}$  would also be an ultimately arbitrarily close estimate of the nonlinear terms:  $e^{(j)}(t)$  and  $e^{(j)}(t)$ . This justifies our choice of notation for  $z_1(t)$  as  $\hat{e}(t)$ . Therefore,

$$z_1(t) = \hat{e}(t) \quad (16)$$

$$\dot{z}_1(t) = \dot{\hat{e}}(t) \quad (17)$$

Thus, estimates of the rotor position and of the angular speed of the PMSM shaft can be found by using equations (16) and (17). One obtains,

$$\hat{\theta} = \tan^{-1} \frac{\hat{e}(t)}{\dot{\hat{e}}(t)} \quad (18)$$

From (18), we build the following estimated functions,

$$K_m \sin n_p \hat{\theta} \quad (19)$$

$$K_m \cos n_p \hat{\theta} \quad (20)$$

In the next section, using (19) and (20), we design the rotor position and the angular speed observer in the form of a baseband equivalent PLL circuit.

### B. Rotor position and speed observer

The objective of designing an estimator, in the form of a PLL scheme, is to have a better stability of the closed loop system and, also, a low level effect of the noise on the estimated signals (angular position and angular speed), to be used by the controller. In this section, we present the estimation algorithm that gives the solution to problem Problem 2 defined above. We state the following assumptions:

1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10  
11  
12  
13  
14  
15  
16  
17  
18  
19  
20  
21  
22  
23  
24  
25  
26  
27  
28  
29  
30  
31  
32  
33  
34  
35  
36  
37  
38  
39  
40  
41  
42  
43  
44  
45  
46  
47  
48  
49  
50  
51  
52  
53  
54  
55  
56  
57  
58  
59  
60

1) *Assumptions:*

The estimated values of  $z_1$  and  $z_1$  are considered to be indistinguishable from the actual values,  $e$  and  $e$ , within a finite amount of time.

The estimated values of functions:  $K_m \sin n_p \hat{\theta}$  and  $K_m \cos n_p \hat{\theta}$  are considered to be indistinguishable from the values  $K_m \sin(n_p \theta)$  and  $K_m \cos(n_p \theta)$  within a finite time interval.

The rotor position estimate is considered to be indistinguishable from the actual rotor position within a finite amount of time, i.e., we proceed as if  $\hat{\theta} = \theta$ .

The estimated value of the position of the rotor reaches a value so close to its actual value within a finite amount of time. As a justification of this statement, the error dynamics (**Back EMF function observers**) of  $e_i$  and  $e_i$  are known to be faster than the error dynamics (**Rotor angular position and rotor angular speed observer**) of  $e$  and  $e_\omega$ .

Considering the above assumptions, we obtain the error correction term using (19) and (20), thus we have the following expression,

$$\begin{aligned} \varepsilon &= K_m \left[ \sin(n_p \theta) \cos n_p \hat{\theta} - \cos(n_p \theta) \sin n_p \hat{\theta} \right] \\ &= K_m \sin n_p \hat{\theta} \end{aligned} \quad (21)$$

where  $\theta$  is the actual angular position, and  $\hat{\theta}$  is the position estimate given by the estimation algorithm interpreted as a baseband equivalent PLL.

The error correction term,  $\varepsilon$  is used to drive the angular speed and the angular position estimates to their actual values via using the estimation algorithm [6]:

$$\frac{d}{dt} \hat{\theta} = \hat{\omega} + \gamma_1 \varepsilon \quad (22)$$

$$\frac{d}{dt} \hat{\omega} = \gamma_0 \varepsilon \quad (23)$$

where  $\gamma_1$  and  $\gamma_0$  are observer gains. The observer design given by (22) and (23) is nonlinear. The position estimate,  $\hat{\theta}$  is obtained through the integral of the speed estimate corrected by the term  $\gamma_1 \varepsilon$ , while the speed estimate,  $\hat{\omega}$ , is obtained as the integral of the correction term  $\gamma_0 \varepsilon$ . Therefore, the estimator (22) and (23) is similar to the baseband equivalent model of a PLL. This observer is illustrated in Fig. 1 (see *J. L. Stensby* [19]).

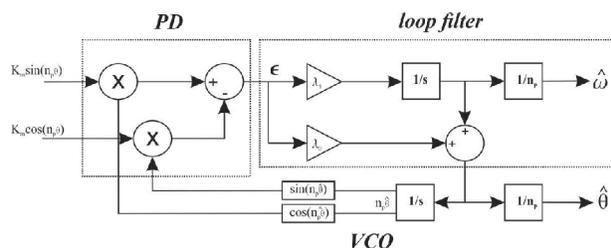


Fig. 1. PLL based rotor angular position and rotor angular speed observer.

Assuming that  $\hat{\theta} = \theta$ , i.e., the equation (21) of the error is linearized around zero as

$$K_m \sin n_p \hat{\theta} = K_m n_p \hat{\theta} \quad (24)$$

Thus, the equations of the estimation algorithm (22) and (23) may be rewritten as:

$$\frac{d}{dt} \hat{\theta} = \hat{\omega} + \gamma_1 \hat{\theta} \quad (25)$$

$$\frac{d}{dt} \hat{\omega} = \gamma_0 \hat{\theta} \quad (26)$$

where  $\gamma_1 = K_m n_p$  and  $\gamma_0 = K_m n_p$ . The linear differential equations (25) and (26) exhibit the following characteristic polynomial,

$$p(s) = s^2 + \gamma_1 s + \gamma_0 \quad (27)$$

Choosing of the design gains:  $\gamma_1$  and  $\gamma_0$  is made via straightforward term by term comparison with the following Hurwitz polynomial,

$$p(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \quad (28)$$

In order to gain robustness and avoid oscillations, we propose both poles to be placed at the real location:  $s = -\zeta\omega_n$ , where  $\zeta$  is a positive real parameter. Thus, the gains of nonlinear observer are given by:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{2}{K_m n_p} \\ \gamma_0 &= \frac{\omega_n^2}{K_m n_p} \end{aligned}$$

where, the nominal values of  $K_m$  and  $n_p$  are assumed to be perfectly known.

2) *Stability Analysis of the nonlinear baseband PLL observer:* The estimation errors are given by:  $e = \theta - \hat{\theta}$  and  $e_\omega = \omega - \hat{\omega}$ , where the actual acceleration of the PMSM is considered to be approximately zero, i.e.  $\dot{\omega} = 0$ , given that the torque developed by the PMSM equals the torque applied to the motor shaft. Thus, the dynamics of the rotor angular position and of the angular speed errors are given by

$$\frac{de}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{d}{dt} \hat{\theta} = e_\omega - \gamma_1 K_m \sin(n_p e) \quad (29)$$

$$\frac{de_\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dt} - \frac{d\hat{\omega}}{dt} = -\gamma_0 K_m \sin(n_p e) \quad (30)$$

The proof of stability of the error dynamics in (29) and (30) is carried out through the Direct Method of *Lyapunov's* stability theory.

*Theorem 4:* Let (29) and (30), which are asymptotically stable for the set  $\{\gamma_1, \gamma_0\} > 0$ , with the convergence points  $\{e, e_\omega\} = \{2\pi n_p, 0\}$ , where  $n$  is an integer.

**Proof.** Consider the following Lyapunov function candidate:

$$V(e, e_\omega) = \frac{K_m \gamma_0}{n_p} [1 - \cos(n_p e)] + \frac{1}{2} e_\omega^2 \quad (31)$$

The function is clearly positive definite, i.e.,  $V(e, e_\omega) > 0$ ,  $e \neq 0$ ,  $e_\omega \neq 0$ , and  $V(0, 0) = 0$ . One obtains:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, e_\omega) &= -K_m \sin(n_p e) \dot{e} + e_\omega \dot{e}_\omega \\ &= -K_m \sin(n_p e) e_\omega - K_m \sin(n_p e) e_\omega \\ &\quad - K_m^2 \sin^2(n_p e) \\ &= -K_m \sin(n_p e) e_\omega - K_m^2 \sin^2(n_p e) \end{aligned} \quad (32)$$

As  $\dot{V} = 0$  from (32), this implies that  $e_\omega = 0$  and  $e = 0$ . We conclude using *LaSalle's invariance principle* that, the dynamic of the estimation errors given by (29) and (30) have the origin as an asymptotically stable equilibrium point (see S. Sastry [16]). ■

### C. Reduced Order Observer for the Load Torque Input Estimation

In this section, we design the reduced order observer to estimate the load torque parameter. For this design, the quadrature current  $u_1 = i_q$  is taken as an input, while the estimated angular velocity is considered as an output  $y_1 = \hat{\omega}_r$ . The nominal values of the parameters,  $J$  and  $K_m$  are assumed to be known. The estimated value of the load torque parameter is considered to be constant and unknown, but uniformly absolutely bounded. From the mechanical equation (33), we consider the expression:

$$L = K_m u_1 \quad D y_1 + J \frac{d y_1}{d t}$$

as an indirect measurement of the load torque  $L$ . We thus propose the following adaptive observer for  $L$ :

$$\frac{d \hat{L}}{d t} = (L - \hat{L})$$

where  $\hat{L} = 0$ .

The estimation error involves,

$$\frac{d e_L}{d t} = -e_L$$

where  $e_L = L - \hat{L}$ . Clearly, for  $e_L = 0$ , the observation error  $e_L$ , asymptotically exponentially converges to zero. Thus, we have the following reduced order observer after using the expression for  $L$ :

$$\frac{d \hat{L}}{d t} + \frac{d y_1}{d t} = m u_1 \quad \hat{L}$$

setting  $\hat{L} = \hat{L} + 1$ , we have

$$\begin{aligned} \frac{d \hat{L}}{d t} &= -\hat{L} \\ \frac{d y_1}{d t} &= m u_1 + (D) y_1 + m u_1 \end{aligned}$$

The design of the load torque estimator is used for adaptation purposes in the reference trajectories to be used in the trajectory tracking controller (see the next subsection). In this manner the effects of sudden loads affecting the PMSM shaft motion will be minimized.

## III. ETEDPOF AVERAGE FEEDBACK CONTROLLER DESIGN

This section deals with the design of a tracking controller based on the d-q model of the PMSM. To calculate the input voltage  $u = [u_d \ u_q]^T$  and input current  $i = [i_d \ i_q]^T$  at the d-q coordinates, we use the estimated values of the rotor position (see section IV). Thus, we assume that  $\hat{r}(t) = r(t)$ . On the other hand, the reference trajectories are calculated via the use of the differential flatness property of the perturbed d-q model, i.e., the load torque parameter is accurately estimated to achieve an on-line adaptation on the prescribed reference trajectories.

### A. Passivity-Based Average Multivariable Controller Design

The d-q model given by (1)-(4) is transformed into [2]:

$$\begin{aligned} L_s \frac{d i_d}{d t} &= R_s i_d + n_p \omega L_s i_q + u_d \\ L_s \frac{d i_q}{d t} &= R_s i_q - n_p \omega L_s i_d - K_m \omega + u_q \\ J \frac{d \omega}{d t} &= K_m i_q - D \omega - L \end{aligned} \quad (33)$$

Notice that when  $\omega = 0$ , i.e., when the angular position coincides with the angular displacement, one obtains the traditional d-q model. We rewrite (33) in its passivity form as:

$$\begin{aligned} A \dot{x} &= [J(y) \quad R] x + B u + \quad \in R^3, u \in R^2 \\ y &= \omega \end{aligned} \quad (34)$$

with the state vector

$$x^T(t) = (i_d, i_q, \omega)$$

where,

$$\begin{aligned} A &= \text{diag} \left( L_s \quad L_s \quad J \right); \\ J(y) &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_m \\ 0 & K_m & 0 \end{pmatrix}}_{:=J_0} + y \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & n_p L_s & 0 \\ n_p L_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{:=y J_1} \\ R &= \begin{pmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ N &= \text{diag} \left( 1 \quad 1 \quad 1 \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

with  $J_0$  and  $J_1$  being constant skew symmetric matrices while  $y$  is a scalar output variable for the system. The matrix  $R$  is symmetric positive definite and  $B$  is a full rank matrix. Let  $u(t) \in R^2$  denote the nominal input trajectory corresponding to the nominal state trajectory,  $x(t) \in R^3$ . The nominal system dynamics satisfies:

$$A \dot{x} = [J(y) \quad R] x + B u \quad (35)$$

Let  $y$  be one of the state variables in  $x$ , say,  $x_i$  for some  $i$ . The output  $y$  is then trivially expressed as  $y = l_i^T x$  where  $l_i^T$  is a row vector of 0's except for a 1 in the  $i$ -th entry

(this is called, henceforth, the *labeling vector* of  $y$ ). While the row vector  $(\hat{\tau}_L)^T = (0, 0, \hat{\tau}_L)$  contains the estimated load torque, calculated from the previously discussed reduced order observer.

The state tracking error,  $e = x(t) - x_d(t) = [e_{i_d}, e_{i_q}, e_\omega]^T$ , the control input error,  $e_u = u(t) - u_d(t)$ , and the perturbation input error  $e = (e_{\tau_L})^T = (0, 0, e_{\tau_L})^T$ , satisfy the following exact tracking error dynamics (ETED):

$$A\dot{e} = J(y)e - Re + Be_u + J_1 M_i(t)e - Ne \quad (36)$$

with  $M_i(t) = x(t)l_i^T$  i.e.,  $M_i(t)$  is the  $n \times n$  outer product matrix of the column vector  $x(t)$  and the labeling vector,  $l_i$ , associated with the scalar output  $y$ .

In the PMSM system, the matrix  $M_i(t)$  is given by

$$M_3(t) = J_1 x(t)l_3^T = n_p L_s \begin{pmatrix} 0 & 0 & i_q(t) \\ 0 & 0 & i_d(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

This matrix may be classically decomposed into the sum of a symmetric and a skew symmetric matrix,

$$\begin{aligned} J_1 x(t)l_3^T &= \frac{1}{2} n_p L_s \begin{pmatrix} 0 & 0 & i_q(t) \\ 0 & 0 & i_d(t) \\ i_q(t) & i_d(t) & 0 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{2} n_p L_s \begin{pmatrix} 0 & 0 & i_q(t) \\ 0 & 0 & i_d(t) \\ i_q(t) & i_d(t) & 0 \end{pmatrix} \\ &= W_3(t) + S_3(t) \end{aligned}$$

In general, the final form of the ETED is just

$$A\dot{e} = J_i(y)e - R_i(t)e + Be_u - Ne \quad (37)$$

with  $J_i(y) = J(y) + W_i(t)$  and  $R_i(t) = R + S_i(t)$  with  $W_i(t)$  and  $S_i(t)$  being the classical decomposition of  $M_i(t)$ . We assume that the estimated load torque  $\hat{\tau}_L$  is indistinguishable from  $\tau_L$  within a finite time, i.e., the observation error  $e_{\tau_L}$ , asymptotically exponentially converges to zero (see subsection II C). Thus,  $e^T$  may be considered to be the zero vector  $e^T = (0, 0, 0)$ . The tracking error dynamics is given by

$$A\dot{e} = J_i(y)e - R_i(t)e + Be_u$$

In the PMSM model the matrix  $R_3(t)$  turns out to be positive definite, i.e., the following condition is satisfied,

$$R_3(t) = \begin{pmatrix} R_s & 0 & \frac{1}{2} n_p L_s i_q \\ 0 & R_s & \frac{1}{2} n_p L_s i_d \\ \frac{1}{2} n_p L_s i_q & \frac{1}{2} n_p L_s i_d & D \end{pmatrix} > 0$$

The positive definiteness of the matrix  $R_3(t)$  is guaranteed whenever

$$R_s D - \frac{1}{4} n_p^2 L_s^2 [(i_d)^2 + (i_q)^2] > 0$$

is uniformly valid. Under such circumstances, a controller rendering exponentially asymptotic tracking of the nominal state is just given by,

$$e_u = -B^T e$$

with,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} > 0$$

being a positive definite matrix. Thus,

$$u_d(t) = u_d(t) \begin{bmatrix} 1 & i_d(t) \\ 0 & i_d(t) \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$u_q(t) = u_q(t) \begin{bmatrix} 1 & i_q(t) \\ 0 & i_q(t) \end{bmatrix} \quad (39)$$

The overall system stability is easily assessed from the positive definite character of

$$\underbrace{R_3(t) + B^{-1} B^T}_{:=\tilde{R}} = \begin{pmatrix} R_s + 1 & 0 & \frac{n_p L_s i_q}{2} \\ 0 & R_s + 2 & \frac{n_p L_s i_d}{2} \\ \frac{n_p L_s i_q}{2} & \frac{n_p L_s i_d}{2} & D \end{pmatrix} \quad (40)$$

which simply requires:

$$\begin{aligned} &(R_s + 1)(R_s + 2)D \\ &\frac{n_p^2 L_s^2}{4} [(R_s + 2)(i_d)^2 + (R_s + 2)(i_q)^2] > 0 \end{aligned}$$

Setting  $i_d = i_q = 0$  the previous expression adopts the form:

$$(R_s + 1)D - \frac{n_p^2 L_s^2}{4} [(i_d)^2 + (i_q)^2] > 0$$

Clearly, the effect of the linear tracking error feedback, through the positive gain  $\gamma$ , can only be beneficial for the overall asymptotic stability.

## B. Planning of the reference trajectories

In view of the nature of the derived feedback control laws (38) and (39), we need to generate the voltage and current references for the PMSM system, i.e., we must specify:  $u^T(t) = [u_d(t), u_q(t)]$  and  $i^T(t) = [i_d(t), i_q(t)]$ . For the determination of the reference trajectories for  $u(t)$  and  $i(t)$ , we rely on the differential flatness property of the system. The  $d-q$  model, given by (33), is *differentially flat* with flat outputs given by  $\omega(t)$  and  $i_d(t)$  (see Delaleau *et al.* [4]).

Therefore, the reference trajectories needed in the tracking controller are given by:

$$\begin{aligned} i_q(t) &= \frac{J}{K_m} \dot{\omega}(t) + \frac{B}{K_m} \omega(t) + \frac{\hat{\tau}_L}{K_m} \\ u_q(t) &= \frac{L_s J}{K_m} \ddot{\omega}(t) + \frac{L_s B}{K_m} \dot{\omega}(t) + \frac{J R_s}{K_m} \omega(t) + \frac{R_s B}{K_m} + n_p L_s i_d + K_m \omega(t) + \frac{R_s}{K_m} \hat{\tau}_L \\ u_d(t) &= \frac{L_s di_d(t)}{dt} + R_s i_d(t) \\ \omega(t) &= \frac{J}{K_m} L_s n_p \dot{\omega}(t) + \frac{D}{K_m} \omega(t) + \frac{\hat{\tau}_L}{K_m} \end{aligned}$$

All the above trajectories are written in terms of the nominal flat outputs trajectories, and their successive time derivatives, and in terms of the estimated load torque parameter. The desired reference trajectories:  $\omega(t)$  and  $i_d(t)$ , may be defined in the following form:

Let  $z$  denote the quantity,  $z = \frac{t - t_{fin}}{t_{fin} - t_{ini}}$ . Define:

$$i_d(t) = 0 \quad \forall t$$

$$\omega(t) = \begin{cases} \omega_{ini} & \text{for } t < t_{ini} \\ \omega_{fin} & \text{for } t > t_{fin} \\ \text{else,} & \text{for } t \in [t_{ini}, t_{fin}] \\ \omega_{ini} + p(z) (\omega_{fin} - \omega_{ini}) & \end{cases}$$

with  $p(z) = z^5(252 - 1050z + 1800z^2 - 1575z^3 + 700z^4 - 126z^5)$  (see *Biagiotti et al.* [1]).

#### IV. EXPERIMENTAL SETUP

The experimental setup depicted in Fig. 2, is constituted by the following devices: Dayton Autotransformer (Model 1010B-3) with 280V, 10A, 4.85kVA (Supply voltage); a Three Phase Rectifier; a 2.4kW Voltage Source Inverter; a Baldor PMSM (Model BSM80N-275AA); a Prime Mover/Dynamometer (Model 8960-1X). This unit consists of a dynamometer (for applying a mechanical load to the PMSM), a tachogenerator, and a load torque sensor. Two current sensors (NT-50) were added to the platform for measuring the phase currents  $i_a$  (SC1) and  $i_c$  (SC2). The PWM signals to the inverter were set at a frequency of 10KHz. Other blocks that are part of the platform and were implemented into the DS1104 dSPACE controller card (see laboratory setup in Fig. 3) are for example, the speed-sensorless passive controllers, reference trajectory generators, the linear observers, and the  $ac/dq$ ,  $dq/abc$  and  $dq/dq$  transformation blocks.

The PMSM parameters (Model BSM80N-275AA): stator winding resistance  $R_s = 1 \Omega$ , stator dq-axis inductances  $L_d$  and  $L_q$  are considered equal to  $L_s = 6.365 \text{ mH}$ . The d-q coordinates are defined so that the d-axis passes through the center of the magnet, and the q-axis lies in the middle of the two magnets. The q-axis is leading the d-axis. The peak line-to-line back EMF constant ( $V_{pk}/krpm = 77.3$ ) was obtained via an experiment by operating the machine as a generator at 1000 rpm and measuring the peak line-to-line voltage. The number of poles pairs  $n_p = 2$ , the moment of inertia is  $J = 0.182 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$ , and the mechanical time constant is  $\tau_{mech} = 2.09195 \text{ s}$ . This constant is associated with the viscous friction coefficient  $D$  as:  $D = \frac{J}{\tau_{mech}} = 8.7 \cdot 10^{-5} \text{ kgm}^2/\text{s}$ . All the parameter values were validated with the manufacturer motor datasheet (*Baldor Electric Company*). The sampling time for the controller program was set to 100  $\mu\text{s}$ .

##### A. Experimental Results

The angular velocity reference trajectory for the PMSM was chosen according to the speed-torque diagram given by the manufacturer's data sheet. The following PMSM parameters provide important information for sizing the actuation system:

- 1) *Continuous torque* ( $T_c$ ) (or *rated torque*): 3.2 [Nm], torque that can be continuously produced by the PMSM without exceeding thermal limits.
- 2) *Peak torque* ( $T_p$ ): 12.8 [Nm], maximum torque that can generate the PMSM for short periods.

- 3) *Rated speed* ( $\omega_n$ ): 419 [rad/s], maximum value of the speed at rated torque and at rated voltage: 300 [V].
- 4) *Maximum power*: 1340 [W], maximum amount of output power generated by the PMSM.

According to the above information, we first considered the case where only the current constraint is active. In this case, one of the Flat outputs (optimum)  $i_d$  must be zero and  $i_q \neq 0$  is used to optimize the torque (see *Chiasson* [2] Chapter 9, page 610, Case 1: Optimization under just Current Constraints). Thus, the desired reference trajectories are simply:

$$i_d(\omega, \hat{L}) = 0$$

$$i_q(\omega, \hat{L}) = \frac{J}{K_m} \dot{\omega}(t) + \frac{B}{K_m} \omega(t) + \frac{\hat{L}}{K_m}$$

$$u_q(\omega, \hat{L}) = L_s \frac{di_q}{dt} + R_s i_q + K_m \omega(t)$$

$$u_d(\omega, \hat{L}) = n_p L_s [\omega(t)] i_q$$

The initial and final nominal speed values in the speed reference trajectory are:  $\omega_{ini}(1) = 0$  [rad/s] while the final speed is specified as:  $\omega_{fin}(6) = 350$  [rad/s], which is 16.46 % below the typical rated speed of the PMSM. However, this allows us to fully verify the performance of the tracking controller algorithm for low and intermediate speeds, as mentioned in the specialized literature on speed controllers without position sensor. Figure 4 (a) shows the desired reference trajectory  $\omega(t)$  (dotted line), the actual speed  $\omega(t)$  (black line), and the estimated speed (gray line). This test was carried under a sudden load torque change applied on the shaft of the PMSM at  $t = 8$  [s]. Figure 4 (b) shows the estimated value of the load torque parameter,  $\hat{L}$ . This signal includes friction terms, which are unknown, but are bounded. Additionally, Figure 4 (b) shows the load torque signal applied to the PMSM shaft. This signal is measured through a torque sensor. Figure 4 (c) shows the quadrature current response. In this graphic, we observe that when we apply the load torque to the PMSM shaft, the amplitude of the quadrature current is incremented. This is due to the internal developed torque in the PMSM which balances the load torque applied to shaft. Also, we can see that the friction terms are adapted into the quadrature current nominal trajectory through the estimated value gathered by the load torque observer. The direct input current and control responses are shown in the Figures 4 (d) and 4 (f), which were planned to optimize the internal torque developed by the PMSM. Figure 4 (e) shows the quadrature input control response. This input signal was planned to ensure a smooth start for the PMSM.

Figure 5 (a) depicts the speed response for a speed reference trajectory, with an initial angular speed of  $\omega_{ini}(1) = 0$  [rad/s] and a final speed of  $\omega_{fin}(6) = 200$  [rad/s]. Figure 5 (b) shows the performance of the reduced order observer in the estimation of the load torque parameter applied to motor shaft. In this Figure, we see how the observer estimates the unmodeled friction terms.

Figures 5 (c) and 5 (d) show the estimated values of the back EMF functions. In the first graph, the  $z_1(t) = \hat{e}$  function is shown, while, in the second graph, the  $z_1(t) = \hat{e}$

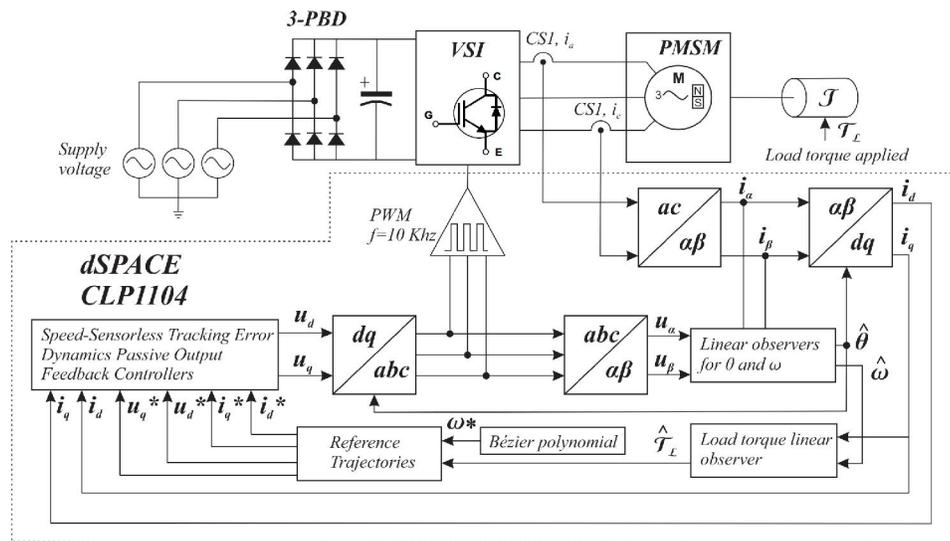


Fig. 2. Schematics of the experimental setup for the PMSM system and DS1104 dSPACE controller card in closed loop.

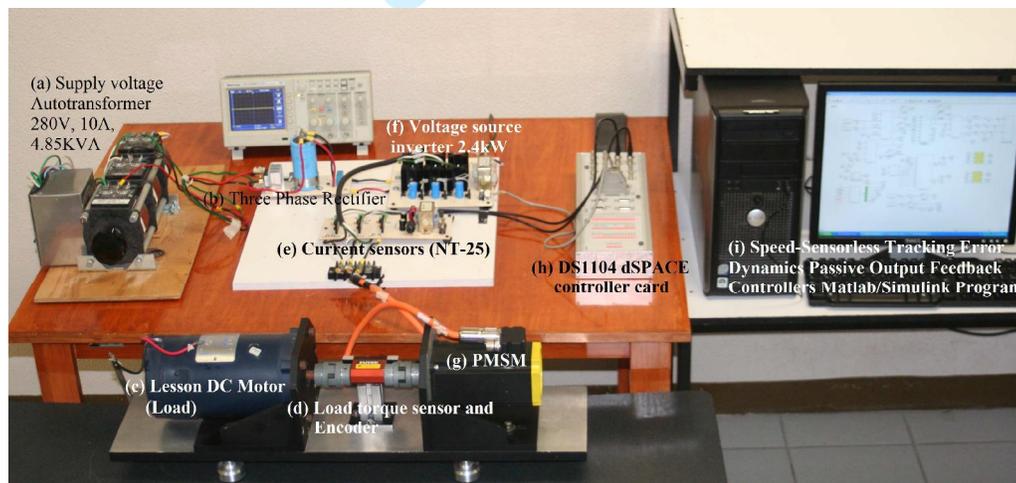


Fig. 3. Photograph of the laboratory setup of the test system with indicated devices

function is shown for a speed of 200 [rad/s]. These functions were recorded in the closed interval [7.82 7.87]. Figure 5 (e) shows the real and estimated variables of the angular position of PMSM shaft. We can observe that the estimated variables are approximately equal to the actual variables. The stability system in closed loop is improved while that the acoustic noise is reduced. This improvement occurs, when we use the position and speed observer based on PLL (see Section II B).

Figure 6 (a) shows the angular speed response  $\omega$  for a command  $\omega_d = 100$  [rad/s]. Figure 6 (b), (c), and (d) shows estimates,  $\sin \hat{\theta}$ ,  $\cos \hat{\theta}$ , and  $\hat{\omega}$  in a short period of time. These estimations present a good tracking performance after a transient period. These same figures shown the sinusoidal, cosinusoidal, and the real position wave forms provided by a resolver in the absence of any load torque applied to shaft.

Figure 7 (a) shows the angular speed response  $\omega$  for a command  $\omega_d = 200$  [rad/s] under a sudden load torque change at  $t = 2.75$  [s]. Figure 7 (b), (c), and (d) shows  $\cos \hat{\theta}$ ,  $\sin \hat{\theta}$ , and  $\hat{\omega}$ , along real rotor position measured by the resolver. These graphs were recorded in the closed interval [2.75 2.9], in order to show the performance of Back EMF function observers and the rotor position observer, when the load torque is applied on the motor shaft. In these graphs the sinusoidal signal is deformed, indicating a drastic disturbance in the rotation of the shaft, the estimator smooths considerably the perturbation effects and prevents a undesired transient response of the controller. Figure 7 (e) shows the quadrature current response together with its desired reference. The overshoot transient response of the quadrature current is high, which is produced by the presence of friction terms on the motor shaft. Figure 7 (f) shows the performance of the

reduced observer in the estimation of the load torque parameter applied to motor shaft. In all graphs of this Figure, we can see that the constant reference signal produces an abrupt starter on the motor shaft. Another reason of this phenomenon is that the unmodeled friction terms estimated by load torque observer have a major effect, over the transient response.

## V. CONCLUSIONS

The analysis of the model structure for the control, the simplicity and effectiveness of the EMF's and mechanical variables estimators, as well as experimental results on the performance of the complete scheme, all show that methodology proposed in this paper for sensorless speed control of PMSM can be fully and reliably implemented. The passivity control law is simple but effective such that has allowed achieving motor nominal operating conditions in a controlled fashion. An adequate speed trajectory planning of the machine can avoid a catastrophic current transient response. The sensorless algorithm provides a soft and robust performance in noise conditions, which avoids an abrupt response of the controller. The FEM, the position and velocity observers have worked correctly even in the presence of constant load torques and bounded unmodeled friction forces. The rotor speed is maintained even in presence of these phenomena using the load torque estimator.

## REFERENCES

- [1] L. Biagiotti and C. Melchiorri, *Trajectory Planning for Automatic Machines and Robots*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2008.
- [2] J. Chiasson, *Modeling and High-Performance Control of Electric Machines*, IEEE Press/Wiley-Interscience, 2005.
- [3] C. De Angelo, G. Bossio, J. Solsona, G. O. García, and M. I. Valla, Mechanical Sensorless Speed Control of Permanent-Magnet AC Motors Driving an Unknown Load, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 53, no. 2, April 2006.
- [4] E. Delaleau, A. M. Stanković, "Flatness-based hierarchical control of the PM synchronous motor," Proc. of the 2004 Am. Contr. Conf., pp. 65-70, 2004.
- [5] F. Genduso, R. Miceli, C. Rando, and G. Ricco Galluzzo, Back EMF Sensorless-Control Algorithm for High-Dynamic Performance PMSM, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 57, no. 6, June 2010.
- [6] L. Harnefors, and Hans-Peter Nee, A General Algorithm for Speed and Position Estimation of AC Motors, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 47, no. 1, February 2000.
- [7] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Third Edition, Prentice-Hall, NJ, Inc., 2002.
- [8] H. Kim, J. Son, and J. Lee, A High-Speed Sliding-Mode Observer for the Sensorless Speed Control of a PMSM, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 58, no. 9, September 2011.
- [9] J. Lee, J. Hong, K. Nam, R. Ortega, L. Praly, and A. Astolfi, Sensorless Control of Surface-Mount Permanent-Magnet Synchronous Motors Based on a Nonlinear Observer, *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 25, no. 2, February 2010.
- [10] J. Linares-Flores, J. Regeer, and H. Sira-Ramírez, Load Torque Estimation and Passivity-Based Control of a Boost-Converter/DC-Motor Combination, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 18, no. 6, November 2010.
- [11] J. Linares-Flores, Jorge L. Barahona-Avalos, H. Sira-Ramírez, and M. A. Contreras-Ordaz, Robust Passivity-Based Control of a Buck-Boost-Converter/DC-Motor System: An Active Disturbance Rejection Approach, *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 48, no. 6, November/December 2012.
- [12] J. A. Moreno and G. Espinosa-Pérez, "Sensorless PBC of induction motors: A separation principle from ISS properties," in Proc. IEEE 46th Conf. Decision Control, 2007, pp. 6094-6099.
- [13] R. Ortega, G. Espinosa-Pérez, and A. Astolfi, Passivity-based control of AC drives: theory for the user and application examples, *International Journal of Control*, pp. 1-13, ISSN: 0020-7179, 2013.
- [14] R. Ortega, L. Praly, A. Astolfi, J. Lee, and K. Nam, Estimation of Rotor Position and Speed of Permanent Magnet Synchronous Motors With Guaranteed Stability, *IEEE Transactions on Control System Technology*, vol. 19, no. 3, May 2011.
- [15] V. Petrović, R. Ortega, and A. M. Stanković, Interconnection and Damping Assignment Approach to Control of PM Synchronous Motors, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 9, no. 6, November 2001.
- [16] S. Sastry, *Nonlinear Systems, Analysis, Stability, and Control*, Springer-Verlag, New York, Inc., 1999.
- [17] H. Sira-Ramírez and M. A. Oliver-Salazar, On the Robust Control of Buck-Converter DC-Motor Combinations, *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 28, no. 8, August 2013.
- [18] H. Sira-Ramírez, J. Linares-Flores, C. García-Rodríguez, and M.A. Contreras-Ordaz, On the Control of the Permanent Magnet Synchronous Motor: An Active Disturbance Rejection Control Approach *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, DOI: 10.1109/TCST.2014.2298238, 2014.
- [19] J. Solsona, M. I. Valla, and C. Muravchik, On Speed and Rotor Position Estimation in Permanent-Magnet AC Drives, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 47, no. 5, October 2000.
- [20] J. L. Stensby, *Phase-Locked Loops: Theory and Applications*, Boca Raton, FL: CRC Press, 1997.
- [21] M. Tomita, T. Senjyu, S. Doki, and S. Okuma, New Sensorless Control for Brushless DC Motors Using Disturbance Observers and Adaptive Velocity Estimations, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 45, no. 2, April 1998.
- [22] Z. Wang, K. Lu, and F. Blaabjerg, A Simple Startup Strategy Based on Current Regulation for Back-EMF-Based Sensorless Control of PMSM, *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 27, no. 8, August 2012.
- [23] Y. E. Gliklikh "Necessary and sufficient conditions for global -in-time existence of solutions of ordinary, stochastic and parabolic differential equations" *Abstract and Applied Analysis*, Vol. 2006, pp. 1-17.
- [24] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, 2nd. Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 1996.
- [25] P. Kokotovic, H. K. Khalil and J. O'Reilly, *Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design*, Classics in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia 1999.
- [26] R. E. Bou Serhal and H. K. Khalil *Application of the Extended High Gain Observer to Underactuated Mechanical Systems 2012 American Control Conference* Fairmont Queen Elizabeth, Montréal, Canada, June 27-June 29, 2012
- [27] H. K. Khalil, and L. Praly High-gain observers in nonlinear feedback control *International Journal of Robust and Nonlinear Control* (2013) Published online in Wiley Online Library (wileyonlinelibrary.com). DOI: 10.1002/rnc.3051

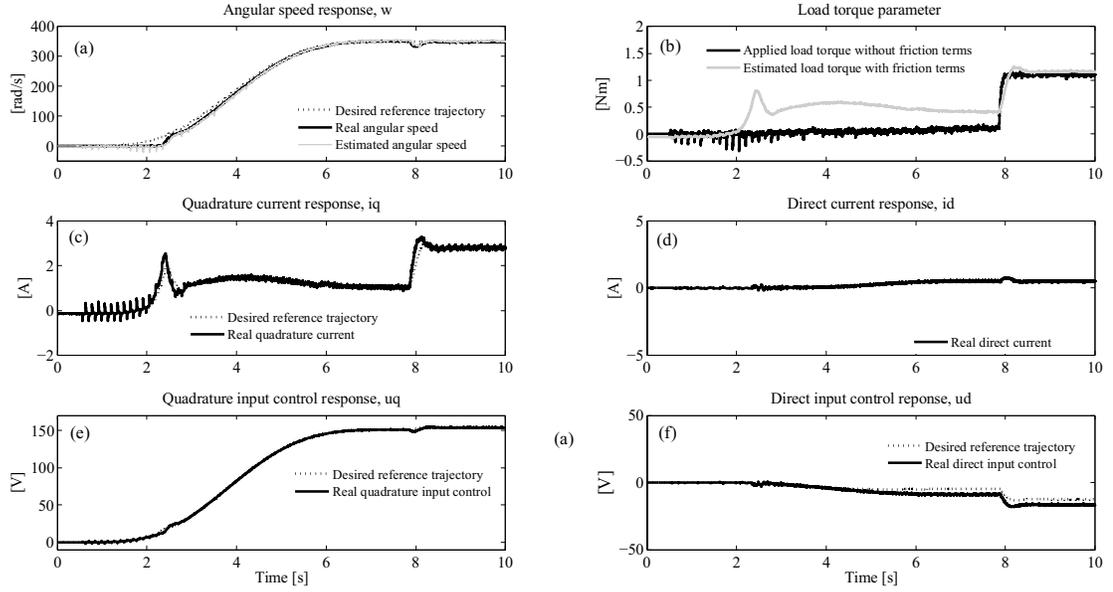


Fig. 4. Experimental results: (a) angular speed response, (b) load torque parameter, (c) quadrature current response, (d) quadrature input control response, (e) direct current, (f) direct input control response for a desired angular speed trajectory tracking task with external load torque applied,  $L \neq 0$ .

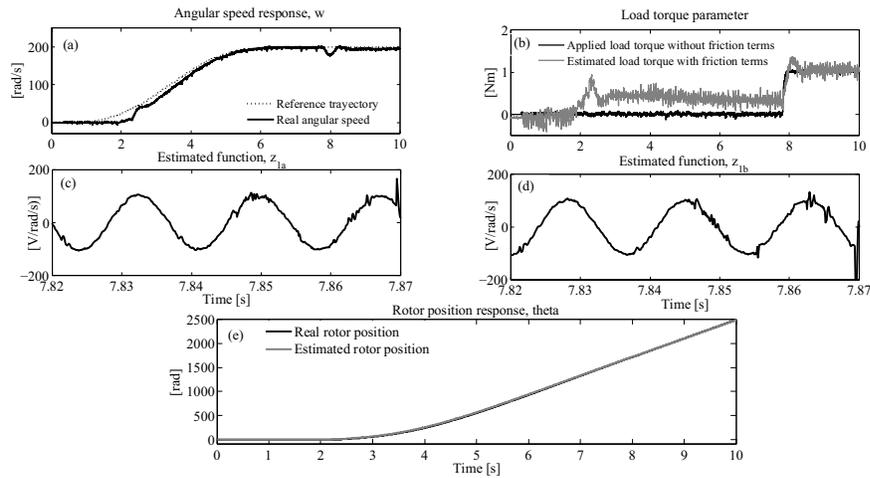


Fig. 5. Experimental results: (a) angular speed response, (b) load torque parameter, (c) and (d) the back EMF functions,  $z_{1a}(t) = \hat{e}$  and  $z_{1b}(t) = \hat{e}$ , (e) estimated and real rotor position for a desired angular speed trajectory tracking task with external load torque applied,  $L \neq 0$ .

1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10  
11  
12  
13  
14  
15  
16  
17  
18  
19  
20  
21  
22  
23  
24  
25  
26  
27  
28  
29  
30  
31  
32  
33  
34  
35  
36  
37  
38  
39  
40  
41  
42  
43  
44  
45  
46  
47  
48  
49  
50  
51  
52  
53  
54  
55  
56  
57  
58  
59  
60

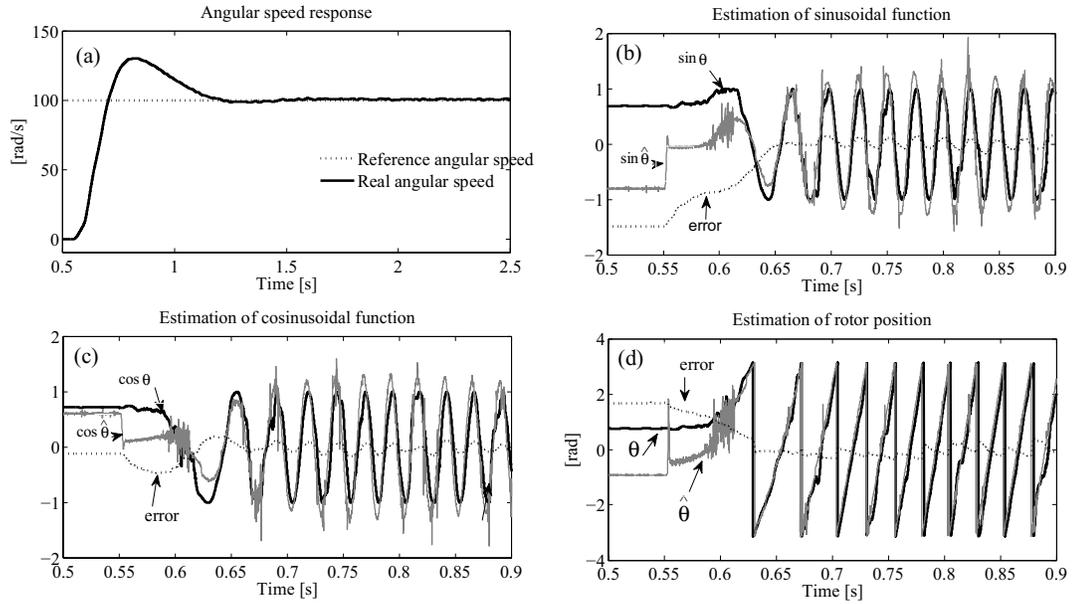


Fig. 6. Experimental results: (a) angular speed response, (b) estimation of cosinusoidal function, (c) estimation of sinusoidal function, (d) estimation of rotor position, for a constant reference of angular speed without external load torque applied,  $L = 0$ .

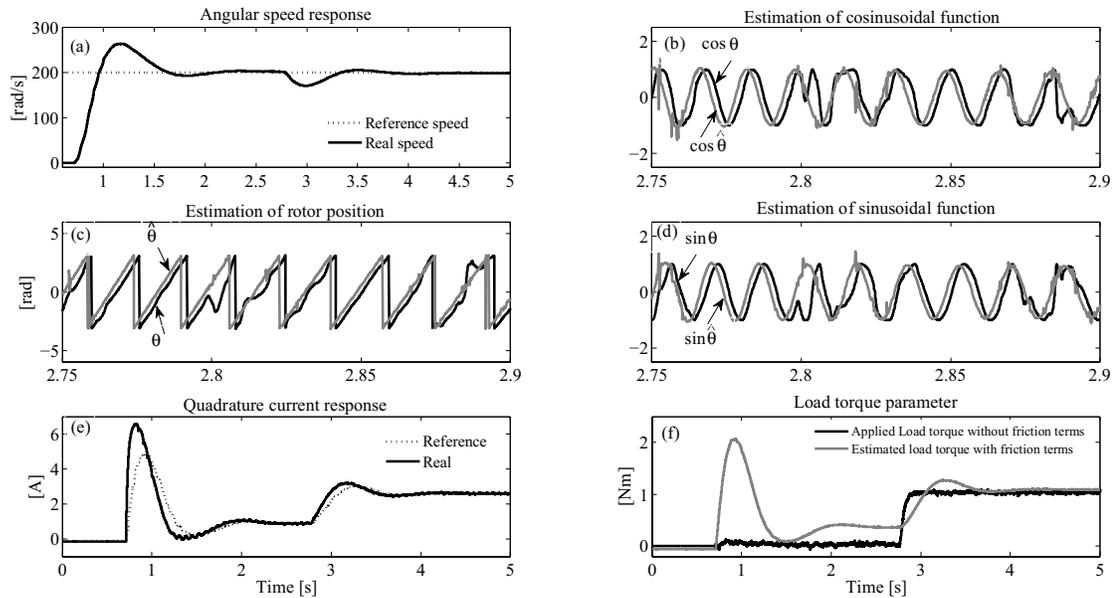


Fig. 7. Experimental results: (a) angular speed response, (b) estimation of cosinusoidal function, (c) estimation of rotor position, (d) estimation of sinusoidal function, (e) quadrature current response, (f) load torque parameter, for a constant reference of angular speed with external load torque,  $L \neq 0$ .

# Control Robusto de Seguimiento Suave de Posición Angular del Motor Síncrono de Imanes Permanentes

Linares-Flores Jesús \* García-Rodríguez Carlos \*  
Ramírez-Cárdenas Oscar D. \*\* Escobar-Noriega Carlos \*\*  
Contreras-Ordaz Marco Antonio \*

\* *Instituto de Electrónica y Mecatrónica, Universidad Tecnológica de la  
Mixteca, Oaxaca, México (e-mails: jlinares@mixteco.com.mx,  
sofosmaster@mixteco.com.mx, marco.contreras@mixteco.utm.mx).*

\*\* *División de Estudios de Postgrado, Universidad Tecnológica de la  
Mixteca, Oaxaca, México (e-mails: oscar6ri@hotmail.com,  
cen\_root2623@hotmail.com)*

---

Resumen: Este artículo trata sobre el diseño y simulación de un controlador robusto de seguimiento suave de la posición angular de un motor síncrono de imanes permanentes (MSIP). Se propone un controlador Backstepping a partir de una linealización entrada-salida del sistema descrita en un marco de referencia  $d-q$ . A fin de minimizar los efectos del par de carga sobre la tarea de posicionamiento, se diseña un observador de orden reducido que ayuda al controlador a compensar esta perturbación. Para demostrar la estabilidad en lazo cerrado de esta propuesta se recurre al criterio de estabilidad de entrada al estado. Co-simulaciones Matlab/Simulink-Psim evidencian la efectividad del algoritmo de control propuesto.

*Keywords:* Motor Síncrono de Imanes Permanentes, Observador de Par de Orden Reducido, Control Backstepping, Estabilidad de Entrada al Estado.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

Un motor síncrono de imanes permanentes (MSIP) tiene excelentes características físicas, tales como su estructura simple, su alta densidad de potencia y eficiencia, así como su bajo nivel de ruido y su casi nulo mantenimiento (ver Pillay and Krishnan [1985]). Dadas estas ventajas los MSIP han extendido su aplicación en máquinas y herramientas de control numérico, robots, aviación, etcétera. Métodos de control lineal tal como el esquema de control proporcional integral (PI) son ampliamente usados en motores de este tipo debido a su fácil implementación. Sin embargo, como el MSIP es un sistema no lineal con disturbios endógenos y exógenos no medibles (ver Kim and Youn [2002]), no es fácil obtener un excelente desempeño en el rango de operación completo cuando se utilizan métodos de control lineal (ver Grčar et al. [1996] y Wang et al. [2001]). Con los métodos de control no lineal se busca proporcionar una solución más natural a los problemas que presentan los MSIP como sistemas sustancialmente perturbados. El rápido desarrollo de la tecnología de los microprocesadores, especialmente de los procesadores digitales de señal (DSP) y de la electrónica de potencia ha permitido actualmente probar técnicas de control más sofisticadas sobre el MSIP, tales como el control adaptable (ver Li and Liu [2009]), el control robusto (ver Senjyu et al. [2010]), controladores por modos deslizantes (ver Wai [2001]), el control por linealización entrada-salida (ver Delaleau and Stanković [2004] y Grčar et al. [1996]), el control adaptable backstepping (ver Rahman et al. [2003]) y algunos otros esquemas como el

control mediante rechazo activo de perturbaciones (ver Li et al. [2014] y Sira-Ramírez et al. [2014]), etcétera. Dado que en aplicaciones industriales reales el MSIP se encuentra expuesto a pares de perturbación diversos (fuerzas de fricción, dinámica no modelada o cambios de carga, ver Li et al. [2014]), en este trabajo se propone un controlador de seguimiento suave de posición angular basado en la técnica de control *Backstepping* y un observador de orden reducido del par de perturbación. La adición del par estimado a la señal de control mejora el desempeño y exactitud del sistema en lazo cerrado.

Este artículo está organizado de la siguiente manera: en la sección 2 se presenta el modelo dinámico del motor síncrono de imanes permanentes que es considerado para el análisis y la formulación del problema. En la sección 3 es desarrollado el procedimiento de diseño del observador del parámetro de par de carga. Posteriormente, en la sección 4 se diseña el controlador de seguimiento backstepping y se muestra el análisis de estabilidad entrada al estado de la dinámica del error. Los resultados en simulación del desempeño del sistema en lazo cerrado son presentados en la sección 5. Finalmente, en la sección 6 se dan las conclusiones y trabajos futuros a desarrollar.

## 2. MODELO DINÁMICO DEL MSIP Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

El modelo dinámico del MSIP en el marco de referencia rotatorio  $d-q$ , cuando la inductancia correspondientes del eje  $d$  y del eje  $q$  se consideran iguales ( $L_d = L_q = L_s$ ),

está dado por las siguientes ecuaciones diferenciales (ver Chiasson [2005]):

$$L_s \frac{di_d}{dt} = -R_s i_d + n_p \omega L_s i_q + u_d \quad (1)$$

$$L_s \frac{di_q}{dt} = -R_s i_q - n_p \omega L_s i_d - K_m \omega + u_q \quad (2)$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{2} K_m i_q - \tau_L \quad (3)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \quad (4)$$

donde  $u_d$  es el voltaje directo,  $u_q$  es el voltaje de cuadratura,  $i_d$  es la corriente directa,  $i_q$  es la corriente de cuadratura,  $\theta$  y  $\omega$  corresponden a las variables mecánicas de posición y velocidad angular del rotor. La resistencia y la inductancia de estator son denotadas por  $R_s$  y  $L_s$  respectivamente,  $n_p$  es el número de pares de polos y  $J$  es el momento de inercia del motor. El término  $K_m$  es una constante de fuerza electromotriz inducida, donde  $K_m = n_p \lambda_m$ , siendo  $\lambda_m$  el flujo mútuo o ligado pico debido al imán permanente. El par de carga desconocido es denotado por  $\tau_L$ . Este artículo plantea los siguientes problemas a resolver.

*Problema 1:* Observador del parámetro de par de carga. Solamente la ecuación mecánica del sistema será empleada para el diseño de este observador. Las trayectorias a seguir serán a velocidades bajas por lo que el par de carga se considera desconocido, acotado y de naturaleza constante.

*Problema 2:* Diseñar una ley control backstepping para el seguimiento de posición angular del motor. Para simplificar el diseño de este controlador puede linealizarse el sistema (1)-(4) en forma exacta, considerando el par de carga como una entrada de perturbación externa. Esta ley de control debe adaptar el par de carga estimado para lograr un seguimiento casi perfecto de la posición angular.

### 3. OBSERVADOR DEL PARÁMETRO DE PAR DE CARGA

En este apartado se diseña un observador de orden reducido para estimar el parámetro de par de carga. Esta perturbación se considera desconocida pero acotada. Partiendo de la ecuación mecánica del modelo, (3), se define a la corriente de cuadratura,  $i_q$ , como una entrada de control,  $u_0 = i_q$ , y a la velocidad angular, como una salida,  $y_0 = \omega$ , para este subsistema dinámico. Los valores nominales de los parámetros,  $J$  y  $K_m$  se consideran conocidos. A partir de (3) se puede definir como una medida indirecta del par de carga  $\tau_L$ , a

$$\tau_L = \frac{3}{2} K_m u_0 - J \frac{dy_0}{dt}$$

Se propone entonces el siguiente observador adaptable para  $\tau_L$ ,

$$\frac{d\hat{\tau}_L}{dt} = \lambda(\tau_L - \hat{\tau}_L)$$

La dinámica del error de estimación está dada por:

$$\frac{de_{\tau_L}}{dt} = -\lambda e_{\tau_L}$$

donde  $e_{\tau_L} = \tau_L - \hat{\tau}_L$ . Escogiendo  $\lambda \gg 0$ , el error de estimación  $e_{\tau_L}$ , converge a cero exponencialmente conforme

$t \mapsto \infty$ . Puesto de otra manera, la norma del error de estimación  $\|\tau_L - \hat{\tau}_L\|$  satisface la desigualdad

$$|e_{\tau_L}(t)| = |\tau_L - \hat{\tau}_L| \leq e_{\tau_L}(0) e^{-\lambda t} \quad \forall t \geq 0$$

donde el valor constante de  $\lambda$  es la razón de convergencia exponencial a cero del error de estimación, cuando  $t \mapsto \infty$ . Usando la expresión para  $\tau_L$ , el observador puede ser reescrito como

$$\frac{d\hat{\tau}_L}{dt} + \lambda J \frac{dy_0}{dt} = \frac{3}{2} \lambda K_m u_0 - \lambda \hat{\tau}_L$$

definiendo a la variable  $\eta = \hat{\tau}_L + \lambda J y_0$ , se tiene el observador de orden reducido siguiente,

$$\hat{\tau}_L = \eta - \lambda J y_0 \quad (5)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = -\lambda \eta + \lambda^2 J y_0 + \frac{3}{2} \lambda K_m u_0 \quad (6)$$

El valor estimado del parámetro de par de carga,  $\hat{\tau}_L$ , se adapta en línea a la ley de control de seguimiento suave de posición angular, tratada en detalle en la siguiente sección.

### 4. CONTROLADOR SUAVE DE POSICIÓN ANGULAR Y RESULTADO PRINCIPAL

Como respuesta al segundo problema planteado en la sección 2 de este artículo, se procederá a diseñar el controlador suave de posición angular basado en la técnica Backstepping, a partir del modelo linealizado en forma exacta, escogiendo como salidas planas a la corriente directa,  $i_d$ , y a la posición angular,  $\theta$ . Por otra parte, el valor estimado del par de carga se adapta a la ley de control de seguimiento suave de posición angular, para posteriormente probar la estabilidad del sistema en lazo cerrado mediante el enfoque de estabilidad entrada al estado.

#### 4.1 Linealización entrada-salida del MSIP

Escogiendo como salidas del sistema (1)-(4) a  $y_1(x) = h_1(x) = i_d(t)$ , y a  $y_2 = h_2(x) = \theta(t)$ , el sistema puede ser linealizado de forma exacta, por lo que  $y_1$  y  $y_2$  son las salidas planas del sistema (ver Grčar et al. [1996] y Delaleau and Stanković [2004]). Por lo que el modelo no lineal puede ser reescrito en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x &= f(x) + \sum_{i=1}^2 g_i(x) u_i + \mathbf{d} \\ x &\in X \subset \mathbf{R}^4, u \in \mathbf{R}^2, f(0) = 0, \\ y_i &= h_i(x); i = 1, 2; h_i(0) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

donde  $f(\cdot)$ ,  $g_1(\cdot)$  y  $g_2(\cdot)$  son campos de vectores suaves en un conjunto abierto  $U$  en  $\mathbf{R}^4$ ,  $h_i(\cdot)$  es una función suave mapeada en  $X$  dentro de  $\mathbf{R}$ , y  $\mathbf{d}$  es el vector de entrada de perturbación o par de carga. Las entradas de control,  $u_1 = u_d$  y  $u_2 = u_q$ , son los voltajes directo y de cuadratura en el eje coordenado  $d-q$  del MSIP. El método de linealización entrada-salida comienza a partir de omitir el vector de entrada de perturbación,  $\mathbf{d}$ . Por tanto, la relación entrada-salida (7) se deduce a través de las derivadas sucesivas de las dos salidas planas  $y_i = h_i(x)$ , tal que al menos una entrada  $u_i$  aparezca en la expresión para la derivada de orden superior  $y_i^{(k)}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Simultáneamente la notación  $L_f h_i = \nabla h_i f$ ;  $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  se adopta para la derivada de Lie direccional de  $h$  a lo largo del campo vectorial  $f$ . De ahí, se obtiene el sistema linealizado para la primer salida plana  $y_1$ :

$$\begin{aligned}
 y_1(t) &= i_d \\
 y_1^{(1)}(t) &= L_f h_1 + \sum_{i=1}^2 L_{g_i} L_f^0 h_1 u_i \\
 &= \alpha_1(x) + \beta_1 u_d = -\frac{R_s}{L_s} i_d + n_p i_q \omega + \frac{u_d}{L_s} \quad (8)
 \end{aligned}$$

Por otro lado, se obtiene el resto del sistema linealizado a través de las derivadas sucesivas de la segunda salida plana  $y_2$ , la cual se refiere a la posición angular del MSIP:

$$\begin{aligned}
 y_2(t) &= \theta \\
 y_2^{(1)}(t) &= L_f h_2 + \sum_{i=1}^2 L_{g_i} L_f^0 h_2 u_i \\
 &= \omega \\
 y_2^{(2)}(t) &= L_f^2 h_2 + \sum_{i=1}^2 L_{g_i} L_f^1 h_2 u_i \\
 &= \frac{3 K_m}{2 J} i_q \\
 y_2^{(3)}(t) &= L_f^3 h_2 + \sum_{i=1}^2 L_{g_i} L_f^2 h_2 u_i \\
 &= \alpha_2(x) + \beta_2 u_q \\
 &= -\frac{3(K_m R_s i_q + n_p L_s K_m \omega i_d + K_m^2 \omega)}{2 L_s} + \frac{3 K_m u_q}{2 J L_s} \quad (9)
 \end{aligned}$$

Por tanto, el nuevo vector de estado se define como:  $x = (i_d, \theta, \omega, \frac{3K_m}{2J} i_q)^T = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in X \subset \mathbf{R}^4$ ,  $u \in \mathbf{R}^2$ , así la forma normal de *Brunovsky* desacoplada del sistema multivariable del MSIP que incluye el vector de entrada de perturbación desconocida, pero acotada, es dada por:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1(x) \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_2(x) \end{pmatrix} \\
 &+ \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_d \\ u_q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_L \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10)
 \end{aligned}$$

#### 4.2 Controlador Backstepping de seguimiento suave de posición angular

Partiendo de la forma normal de *Brunovsky* del MSIP, se diseñará la ley de control de seguimiento suave de posición angular, la cual adapta el valor estimado del parámetro de par de carga. Antes de desarrollar el diseño del controlador se hacen las siguientes suposiciones:

- Las corrientes de fase  $i_a$  e  $i_b$  son medidas y transformadas al eje coordenado d-q mediante el conocimiento de la variable de posición  $\theta$ .
- Las variables de posición y velocidad angular están disponibles por medición a través de los respectivos sensores.
- El valor del parámetro de par de carga, se estima mediante un observador de orden reducido, considerando a este término como constante y acotado. Este valor

se adapta a la ley de control de seguimiento suave de posición angular.

- El siguiente conjunto de valores nominales de parámetros del motor se consideran conocidos:  $\{K_m, L_s, n_p, R_s, J\}$ .
- Solamente se calcula la trayectoria de referencia de posición angular junto con sus derivadas temporales mediante un polinomio Bézier, y se denotan como:  $x_2^*(t) = \theta^*(t)$ ,  $\dot{x}_2^*(t) = \dot{\theta}^*(t)$ ,  $\ddot{x}_2^*(t) = \ddot{\theta}^*(t)$  y  $\ddot{\ddot{x}}_2^*(t) = \ddot{\ddot{\theta}}^*(t)$ . Mientras que la trayectoria de referencia de la corriente directa junto con sus derivadas se planean con un valor nominal igual a cero, y se denotan como:  $x_1^*(t) = i_d^*(t) = 0$ ,  $\dot{x}_1^*(t) = \frac{di_d^*(t)}{dt} = 0$ . Esto debido a que en una tarea de control de posición, las velocidades que se desarrollan son bajas, sin embargo, el par generado aplicado por el motor debe maximizarse, lo que lleva a restringir el valor nominal de la corriente directa  $i_d$  a cero.

#### Paso 1. Cálculo del controlador de seguimiento de la parte eléctrica $u_d$ .

Como primer paso para el diseño del controlador de posición basado en Backstepping, se propone la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V_1(z_1) = \frac{1}{2} z_1^2 \quad (11)$$

donde, la variable  $z_1$  denota el error de seguimiento de la primer salida plana

$$z_1 = x_1(t) - x_1^*(t) \quad (12)$$

La función candidata de Lyapunov cumple con ser definida positiva, escalar diferenciable no acotada, donde su derivada temporal es,

$$\dot{V}_1(z_1) = z_1 \dot{z}_1 \quad (13)$$

donde la rapidez del error de seguimiento de  $z_1$ , es dado por:

$$\dot{z}_1(t) = \dot{x}_1(t) - \dot{x}_1^*(t) = \alpha_1(x) + \beta_1 u_d \quad (14)$$

Se sustituye (14) dentro de (13), y se tiene lo siguiente

$$\dot{V}_1(z_1) = z_1 [\alpha_1(x) + \beta_1 u_d] \quad (15)$$

Por tanto, para probar que esta última ecuación, sea definida negativa se propone que la primera entrada  $u_d$  sea:

$$u_d = -\frac{1}{\beta_1} [\alpha_1(x) + c_1 z_1] \quad (16)$$

donde  $c_1$  es un valor constante mayor a cero, que define la sensibilidad proporcional del controlador de seguimiento de la corriente directa del MSIP. Sustituyendo (16) en (15), resulta

$$\dot{V}_1(z_1) = -c_1 z_1^2 \quad (17)$$

#### Paso 2. Cálculo del controlador de seguimiento de la parte mecánica $u_q$ .

Siguiendo con la metodología, se propone una segunda función candidata de Lyapunov como sigue:

$$V_2(z_1, z_2) = \frac{1}{2} z_2^2 + V_1(z_1) \quad (18)$$

donde se define el error de seguimiento para la segunda salida plana como:

$$z_2(t) = x_2(t) - x_2^*(t) \quad (19)$$

La derivada temporal (18) es dada como:

$$\dot{V}_2(z_1, z_2) = z_2 \dot{z}_2 - c_1 z_1^2 \quad (20)$$

donde la derivada del error de seguimiento de  $z_2$  es,

$$\dot{z}_2 = \dot{x}_2(t) - \dot{x}_2^*(t) = x_3(t) - \dot{x}_2^*(t) \quad (21)$$

Sustituyendo (21) en (20) se tiene lo siguiente

$$\dot{V}_2(z_1, z_2) = z_2 [x_3(t) - \dot{x}_2^*(t)] - c_1 z_1^2 \quad (22)$$

Como paso intermedio se propone un error de seguimiento  $z_3$ , el cual involucra a la primer variable de estabilización  $\gamma_1(x)$  que consigue que la derivada temporal de  $V_2(z_1, z_2)$  sea definida negativa,

$$z_3(t) = x_3(t) - \gamma_1(x) \iff x_3(t) = z_3(t) + \gamma_1(x) \quad (23)$$

La variable  $x_3(t)$  de (23) se sustituye en la derivada temporal de  $V_2(z_1, z_2)$  y queda como:

$$\dot{V}_2(z_1, z_2) = z_2 [z_3(t) + \gamma_1(x) - \dot{x}_2^*(t)] - c_1 z_1^2 \quad (24)$$

A través de proponer a la primer variable de estabilización  $\gamma_1(x)$  como:

$$\gamma_1(x) = \dot{x}_2^*(t) - c_2 z_2 \quad (25)$$

Por tanto la derivada temporal de  $V_2(z_1, z_2)$  es

$$\dot{V}_2(z_1, z_2) = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 + z_2 z_3 \quad (26)$$

donde  $c_2 > 0$  se define como la sensibilidad proporcional del error de seguimiento de la variable  $z_2$ . Para conseguir que la derivada temporal de  $V_2(z_1, z_2)$  sea definida negativa, basta con elegir a  $z_3(t) = 0$ , para que los errores de seguimiento  $z_1$  y  $z_2$  convergan a cero exponencialmente.

$$\dot{V}_2(z_1, z_2) = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 \quad (27)$$

Se sigue el método proponiendo la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V_3(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{2} z_3^2 + V_2(z_1, z_2) \quad (28)$$

de ahí, la derivada temporal de la función  $V_3(z_1, z_2, z_3)$  es dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(z_1, z_2, z_3) &= z_3 \dot{z}_3 + \dot{V}_2(z_1, z_2) \\ &= z_3 \dot{z}_3 + z_2 z_3 - c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 \\ &= z_3 (\dot{z}_3 + z_2) - c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 \end{aligned} \quad (29)$$

de (23) se calcula la derivada temporal de  $z_3$

$$\dot{z}_3(t) = \dot{x}_3(t) - \dot{\gamma}_1(x) = x_4(t) - \frac{\tau_L}{J} + c_2 \dot{z}_2 - \ddot{x}_2^*(t) \quad (30)$$

Sustituyendo (30) en (29), la derivada temporal de  $V_3(z_1, z_2, z_3)$  queda de la siguiente forma

$$\dot{V}_3(z_1, z_2, z_3) = z_3 \left( x_4 - \frac{\tau_L}{J} + c_2 \dot{z}_2 - \ddot{x}_2^* + z_2 \right) - c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 \quad (31)$$

Se propone el error de seguimiento  $z_4$ , el cual involucra un segunda variable de estabilización  $\gamma_2(x)$  que consigue que la derivada temporal de  $V_3(z_1, z_2, z_3)$  sea definida negativa, por tanto

$$z_4(t) = x_4(t) - \gamma_2(x) \iff x_4(t) = z_4(t) + \gamma_2(x) \quad (32)$$

Sustituyendo (32) en (31) se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(z_1, z_2, z_3) &= z_3 \left( z_4 + \gamma_2(x) - \frac{\tau_L}{J} + c_2 \dot{z}_2 - \ddot{x}_2^* + z_2 \right) \\ &\quad - c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 \end{aligned} \quad (33)$$

A partir de (33) se propone el segundo controlador virtual  $\gamma_2(x)$  como:

$$\gamma_2(x) = \ddot{x}_2^* - c_2 \dot{z}_2 - c_3 z_3 + \frac{\hat{\tau}_L}{J} \quad (34)$$

En este paso se adapta el parámetro del par de carga  $\hat{\tau}_L$  a la segunda variable de estabilización, y la ganancia  $c_3 > 0$ ,

se define como la sensibilidad proporcional del error de seguimiento de la variable  $z_3$ . De ahí, se sustituye (34) en (33) y resulta que

$$\dot{V}_3(z_1, z_2, z_3) = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - c_3 z_3^2 - \underbrace{\frac{1}{J} (\tau_L - \hat{\tau}_L)}_{:=e_\tau} z_3 + z_3 z_4 \quad (35)$$

Para que la derivada temporal de  $V_3(z_1, z_2, z_3)$  sea definida negativa se escoge a  $z_4 = 0$ , de ahí que los errores de seguimiento convergen a cero asintóticamente, mientras el error de estimación este acotado.

$$\dot{V}_3(z_1, z_2, z_3) = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - c_3 z_3^2 - z_3 e_\tau \quad (36)$$

Siguiendo con la metodología de la técnica *Backstepping* se propone la última función candidata de Lyapunov como sigue:

$$V_4(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{1}{2} z_4^2 + V_3(z_1, z_2, z_3) \quad (37)$$

donde su derivada temporal de (37) es,

$$\begin{aligned} \dot{V}_4(z_1, z_2, z_3, z_4) &= -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - c_3 z_3^2 + z_4 [\dot{z}_4 + z_3] \\ &\quad - z_3 e_\tau \end{aligned} \quad (38)$$

donde la derivada temporal de  $z_4$  está dada por

$$\begin{aligned} \dot{z}_4(t) &= \dot{x}_4(t) - \dot{\gamma}_2(x) \\ &= \alpha_2(x) + \beta_2 u_q - \ddot{x}_2^* + c_2 \left( x_4 - \frac{1}{J} \tau_L - \ddot{x}_2^* \right) \\ &\quad + c_3 \left( x_4 - \frac{1}{J} \tau_L + c_2 \dot{z}_2 - \ddot{x}_2^* \right) \end{aligned} \quad (39)$$

Sustituyendo (39) en (38) se tiene que:

$$\begin{aligned} \dot{V}_4(z_1, z_2, z_3, z_4) &= -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - c_3 z_3^2 - e_\tau z_3 \\ &\quad + z_4 [\alpha_2(x) + \beta_2 u_q - \ddot{x}_2^* \\ &\quad + c_2 \left( x_4 - \frac{1}{J} \tau_L - \ddot{x}_2^* \right) + z_3 \\ &\quad + c_3 \left( x_4 - \frac{1}{J} \tau_L + c_2 \dot{z}_2 - \ddot{x}_2^* \right)] \end{aligned} \quad (40)$$

La ley de control de seguimiento suave de la posición angular del MSIP está dada por:

$$\begin{aligned} u_q &= -\frac{1}{\beta_2} [\alpha_2(x) - \ddot{x}_2^* + c_2 \left( x_4 - \frac{1}{J} \tau_L - \ddot{x}_2^* \right) \\ &\quad + c_3 \left( x_4 - \frac{1}{J} \tau_L + c_2 \dot{z}_2 - \ddot{x}_2^* \right) - z_3 - c_4 z_4] \end{aligned} \quad (41)$$

Sustituyendo la ley de control (41) en (40) se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \dot{V}_4(z_1, z_2, z_3, z_4) &= -\sum_{i=1}^4 c_i z_i^2 - z_3 e_\tau - [c_2 + c_3] z_4 e_\tau \\ &= -\mathbf{z}^T \mathbf{C} \mathbf{z} - \mathbf{z}^T \mathbf{M} e_\tau \end{aligned} \quad (42)$$

donde,

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ c_2 + c_3 \end{pmatrix}; \quad (43)$$

Las expresiones (42) y (43) se utilizarán en el siguiente análisis de estabilidad en lazo cerrado del sistema MSIP perturbado.

### Paso 3. Análisis de estabilidad en lazo cerrado.

*Proposición 1:* Se considera el sistema MSIP perturbado (10) con el controlador de seguimiento por retroalimentación backstepping (16) y (41) entonces, la dinámica del error de seguimiento (42) define una estabilidad de entrada al estado mapeada, considerando  $e_\tau$  como una entrada y  $\mathbf{z}$  como un estado.

*Prueba:* Considérese la siguiente función definida positiva candidata de *Lyapunov*,

$$V(\mathbf{z}) = V_4(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2) > 0 - \{0\}$$

cuya derivada a lo largo de las trayectorias (14), (21), (30) y (39), está dada por

$$\dot{V}(\mathbf{z}) = -\mathbf{z}^T \mathbf{C} \mathbf{z} - \mathbf{z}^T \mathbf{M} e_\tau \quad (44)$$

donde  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{M}$  están definidas en (43). Note que la matriz diagonal constante es definida positiva, es decir  $\mathbf{C} > \mathbf{0}$ , entonces en el caso de que  $e_\tau = 0$  implica que  $\mathbf{z} = \mathbf{0}$  es un punto de equilibrio globalmente exponencialmente estable, ya que

$$\dot{V}(\mathbf{z}) = -\mathbf{z}^T \mathbf{C} \mathbf{z} < 0 \quad (45)$$

Por otro lado, si el error de estimación del parámetro de par de carga  $e_\tau \neq 0$ , de ahí el término  $\mathbf{z}^T \mathbf{M} e_\tau$ , se escribe por desigualdad de Young, como

$$\mathbf{z}^T \mathbf{M} e_\tau \leq \lambda (\mathbf{z}^T)^2 + \frac{\sqrt{c_2^2 + c_3^2 + 2c_2c_3 + 1}}{4\lambda} e_\tau^2$$

seleccionando a  $p = q = 2$  y  $\varepsilon^2 = 2\lambda$ , en consecuencia (44), queda de la siguiente manera

$$\dot{V}(\mathbf{z}) = -\mathbf{z}^T \mathbf{C} \mathbf{z} - \mathbf{z}^T \mathbf{M} e_\tau \leq -\mathbf{z}^T \mathbf{C} \mathbf{z} + \frac{\gamma(c_2, c_3)}{4\lambda} e_\tau^2 \quad (46)$$

donde, la norma de la matriz  $|\mathbf{M}| = \gamma(c_2, c_3) = \sqrt{c_2^2 + c_3^2 + 2c_2c_3 + 1} > 0$ , y  $\lambda$  corresponde al valor de la ganancia del estimador de par  $c_2, c_3 > \lambda > 0$ . Mediante el enfoque de estabilidad de entrada al estado (ISS) la ecuación (46) se escribe como sigue

$$\dot{V}(\mathbf{z}) = -(1 - \phi) \mathbf{z}^T \mathbf{C} \mathbf{z} - \phi \mathbf{z}^T \mathbf{C} \mathbf{z} + \frac{\gamma(c_2, c_3)}{4\lambda} e_\tau^2$$

con  $\phi > 0$  es una constante positiva la cual pertenece al conjunto abierto  $(0, 1)$ .

Por lo tanto,

$$\dot{V}(\mathbf{z}) \leq -(1 - \phi) \mathbf{z}^T \mathbf{C} \mathbf{z}$$

para todo

$$|\mathbf{z}| \geq \frac{\sqrt{\gamma(c_2, c_3)}}{2\sqrt{\lambda\phi} [\lambda_{\min}(\mathbf{C})]} |e_\tau|$$

Entonces aplicando el *Teorema 5.2* de Khalil [1996] se demuestra que el mapeo

$$e_\tau \rightarrow \mathbf{z}$$

es estable de entrada al estado (ISS).

Para obtener explícitamente la cota del vector de estado  $\mathbf{z}(t)$ , se considera la función  $\mathbf{z}(t) e^{kt}$ . Usando (46), se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (V(\mathbf{z}) e^t) &= \frac{d}{dt} (V(\mathbf{z})) e^t + V(\mathbf{z}) e^t \\ &\leq -(\mathbf{z}^T \mathbf{C} \mathbf{z}) e^t + \frac{\gamma(c_2, c_3)}{4\lambda} e_\tau^2 e^t + (\mathbf{z}^T \mathbf{C} \mathbf{z}) e^t \\ &= \frac{\gamma(c_2, c_3)}{4\lambda} e_\tau^2 e^t \end{aligned} \quad (47)$$

Integrando ambos lados a (47) en el intervalo cerrado  $[0, t]$ , se produce

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^2 e^t &\leq \mathbf{z}^2(0) + \frac{\gamma(c_2, c_3)}{4\lambda} e_\tau^2 e^t \\ &\leq \mathbf{z}^2(0) + \frac{1}{4\lambda} \underbrace{\gamma(c_2, c_3) e_\tau^2}_{:= \sup_{0 \leq \tau \leq t} \Delta^2(\tau)} \int_0^t e^\tau d\tau \\ &= \mathbf{z}^2(0) + \frac{1}{4\lambda} \left[ \sup_{0 \leq \tau \leq t} \Delta^2(\tau) \right] (e^t - 1) \end{aligned} \quad (48)$$

Multiplicando a (48) en ambos lados por el término  $e^{-t}$ , y utilizando el hecho de que  $\sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b|$ , se obtiene la cota del vector  $\mathbf{z}(t)$ :

$$\begin{aligned} |\mathbf{z}(t)| &\leq |\mathbf{z}(0)| e^{-t} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \left[ \sup_{0 \leq \tau \leq t} |\Delta(\tau)| \right] (1 - e^{-t})^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |\mathbf{z}(0)| e^{-t} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \left[ \sup_{0 \leq \tau \leq t} |\Delta(\tau)| \right] \end{aligned} \quad (49)$$

Desde que  $\sup_{0 \leq \tau \leq t} |\Delta(\tau)| \leq \sup_{0 \leq \tau \leq \infty} |\Delta(\tau)| \triangleq |\Delta|_\infty$ , (49)

conduce a

$$|\mathbf{z}(t)| \leq \mathbf{z}(0) e^{-t} + \frac{|\Delta|_\infty}{2\sqrt{\lambda}}$$

lo cual muestra que el vector de seguimiento  $\mathbf{z}(t)$  converge a un conjunto compacto  $\mathcal{R}$  definido como:

$$\mathcal{R} = \{z(t) : |z(t)| \leq \frac{|\Delta|_\infty}{2\sqrt{\lambda}}\}$$

y por lo tanto

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}\{z(t), \mathcal{R}\} = 0 \quad (50)$$

## 5. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

Los parámetros del motor utilizados para simulación son:  $n_p = 2$ ,  $R_s = 1.6 \Omega$ ,  $L_d = L_q = 6.365 \text{ mH}$ . La constante de fuerza contra electromotriz de línea a línea del motor es  $Vpk/krpm = 77.3$ ,  $J = 0.182 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$ , y su constante mecánica es  $\tau_{mech} = 2.09195 \text{ s}$ . Se considera que el motor posee un arreglo convertidor resolutor a digital (RTDC) basado en PLL que proporciona la posición absoluta del rotor en el intervalo de 0 a 360 grados, la velocidad es medida a través de un tacómetro. Se modela también un inversor fuente de voltaje trifásico de 2.4 kW. El voltaje de bus se fijó en 50 V, el periodo de muestro fue establecido en 0.1 ms, las constantes del control son fijadas en  $c_i = 600$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$ . Para el observador de par se utilizó  $\lambda = 20$ . La Fig. 1 muestra la posición angular del sistema en lazo cerrado para una trayectoria de referencia deseada, basada en un polinomio Bézier de décimo orden, para el cálculo de la trayectoria de referencia deseada ver Sira-Ramírez et al. [2014]. La trayectoria a seguir comienza en  $\theta_{in}^*(1.5 \text{ s}) = 0 \text{ rad}$  y termina en  $\theta_{in}^*(4.5 \text{ s}) = 7 \text{ rad}$ . En esta prueba se hace un cambio súbito de carga de cero a  $\tau_L(6 \text{ s}) = 2 \text{ Nm}$ . Como puede observarse se logra una buena regulación de la posición a pesar del par de carga aplicado. La Fig. 2 muestra la respuesta del sistema cuando al par anterior se le suma un par de carga que genera el acoplamiento de otro eje al eje del MSIP. Ahora el par de carga es  $\tau_{L(2)} = J_a \frac{d\omega}{dt} + B_a \omega + \tau_L$ , donde  $J_a$  y

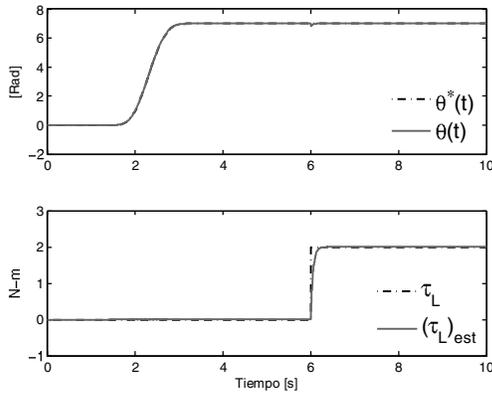


Figura 1. Seguimiento de trayectoria de la posición angular del motor en presencia de un par de carga aplicado súbitamente.

$B_a$  son el momento de inercia y el coeficiente de fricción viscosa del segundo eje aplicado como carga. A pesar de que el observador fue diseñado para estimar pares de carga constantes, éste sin embargo estima el par de carga con el término de fricción producto del acoplamiento de ejes, el cual se traduce como una variación en los parámetros mecánicos del sistema lo que representa una perturbación claramente acotada. Es por ello que el esquema de control propuesto, proporciona una asistencia adecuada a través del observador con la finalidad de minimizar el efecto de la aplicación de par al eje con términos de fricción.

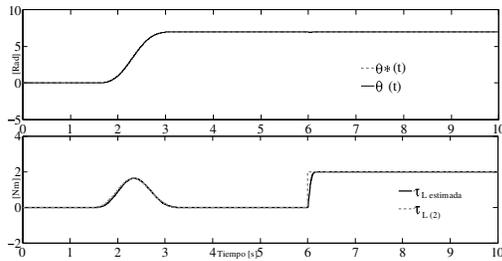


Figura 2. Respuesta del sistema a un par de carga por acoplamiento de otro eje en combinación con un aumento súbito del par a un valor constante.

## 6. CONCLUSIONES

Tomando como salidas a la corriente directa,  $i_d$ , y a la posición angular del rotor,  $\theta$ , el modelo del MSIP puede linealizarse de forma exacta y además proponerse fácilmente una ley de control *backstepping* que logra la convergencia de los errores de seguimiento de trayectorias a cero. Esta ley de control es robusta bajo pares de carga constantes mediante un observador de orden reducido. Las simulaciones en un entorno Matlab/Simulink-PSIM han permitido incluir los efectos de carga, medición, y modelos de elementos de conmutación realísticos, permitiendo corroborar el seguimiento suave de la trayectoria de referencia de posición angular.

## REFERENCIAS

- Chiasson, J. (2005). *Modeling and High-Performance Control of Electric Machines*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.
- Delaleau, E. and Stanković, A.M. (2004). Flatness-based hierarchical control of the pm synchronous motor. *Proc. American Control Conference*, 65–70.
- Grčar, B., Cafuta, P., Žnidarič, M., and Gausch, F. (1996). Nonlinear control of synchronous servo drive. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 4, 177–184.
- Khalil, H. (1996). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2nd edition.
- Kim, K.H. and Youn, M.J. (2002). A nonlinear speed control for a pm synchronous motor using a simple disturbance estimation technique. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 49, 524–535.
- Li, S., Yang, J., Chen, W., and Chen, X. (2014). *Disturbance Observer-Based Control Methods and Applications*. CRC Press.
- Li, S. and Liu, Z. (2009). Adaptive speed control for permanent magnet synchronous motor system with variations of load inertia. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 56, 3050–3059.
- Pillay, P. and Krishnan, R. (1985). Control characteristics and speed controller design of a high performance pmsm. *IEEE Industrial Applications Society Annual Meeting*, 627–633.
- Rahman, M.A., Vilathgamuwa, M., Tseng, K., and Uddin, M.N. (2003). Nonlinear control of interior permanent magnet synchronous motor. *IEEE Transactions on Industrial Applications*, 39, 408–415.
- Senjyu, T., Noguchi, Y., Urasaki, N., Howlader, A.M., Yona, A., and Sekine, H. (2010). Position sensorless control for interior permanent magnet synchronous motors using  $h_\infty$  flux observer. *IEEE XIX International Conference on Electrical Machines (ICEM)*, 1–6.
- Sira-Ramírez, H., Linares-Flores, J., García-Rodríguez, C., and Contreras-Ordaz, M.A. (2014). On the control of the permanent magnet synchronous motor: An active disturbance rejection control approach. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*.
- Wai, R.J. (2001). Total sliding-mode controller for pm synchronous servo motor drive using recurrent fuzzy neural network. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 48, 926–944.
- Wang, G., Fong, C., and Chang, K. (2001). Neural-network-based self tuning pi controller for precise motion control of pmac motors. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 48, 408–415.



# Bibliografía

- [1] ANGULO, N. M. I., AND SIRA, R. H. Passivity based regulation of nonlinear continuous processes.
- [2] ASSAAD, H. M., DE LEON, J., GLUMINEAU, A., AND BOISLIVEAU, R. An adaptive interconnected observer for sensorless control of pm synchronous motors with online parameter identification. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 60, 2 (February 2013), 739–748.
- [3] BATZEL, T. D. Improved angular velocity estimation for high performance sensorless pmsm. Tech. rep., University Altoona College, The Pennsylvania State, April 2004.
- [4] BIAGIOTTI, L., AND MELCHIORRI, C. *Trajectory Planning for Automatic Machines and Robots*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.
- [5] BIMAL, K. B. *Modern Power Electronics and AC Drives*. Printice Hall PTR, 2001.
- [6] CASEDEI, D., PROFUMO, F., SERRA, G., AND TANI, A. Foc and dtc: Two viable schemes for induction motors torque control. *IEEE Transactions on Power Electronics* 17, 5 (September 2002), 779–787.
- [7] CHIASSON, J. *Modelling and High-Performance Control of Electric Machines*. IEEE series on Power Engineering, 2005.
- [8] DARIUSZ, S. *Direct Torque Control With Space Vector Modulation (DTC-SPVM) of inverter - Fed Permanent Magnet Synchronous Motor Drive*. PhD thesis, Politechnik Warszawska, Warsaw University of Technology Faculty of Electrical Engineering, 2005.
- [9] DE ANGELO, C., BOSSIO, G., SOLSONA, J., GARCÍA, G. O., AND VALLA, M. I. Mechanical sensorless speed control of permanent-magnet ac motors driving an unknown load. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 53, 2 (April 2006), 406–414.
- [10] DELALEAU, E., AND M., S. A. *Flatness-based hierarchical control of the PM synchronous motor*. 2004.

- [11] DURAN FONSECA, M. A. Diseño de un controlador no lineal basado en pasividad de un motor síncrono. Master's thesis, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, enero 2004.
- [12] ESKOLA, M. *Speed and Position Sensorless Control of Permanent Magnet Synchronous Motors in Matrix Converter and Voltage Source Converter Applications*. PhD thesis, Tampere University Technology, December 2006.
- [13] FITZGERALD, A. E. *Máquinas eléctricas*. McGraw-Hill, México 1996.
- [14] FLIESS, M., LÉVINE, J., MARTIN, P., AND P., R. *Flatness and detect of nonlinear systems: introductory theory and examples*. January 1995.
- [15] FLORES, J. L., AND REGER, J.SIRA, R. H. Load torque estimation and passivity-based control of a boost-converter dc-motor combination. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 18, 6 (November 2010), 1398–1405.
- [16] GENDUSO, F., MICELI, R., RANDO, C., AND GALLUZZO, G. Back emf sensorless-control algorithm for high-dynamic performance pmsm. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 57, 6 (June 2010), 2092–2100.
- [17] GLIKLIKH, Y. E. "necessary and sufficient conditions for global -in-time existence of solutions of ordinary, stochastic and parabolic differential equations", abstract and applied analysis, 2006.
- [18] GRECAR, B., CAFUTA, P., ZNIDARIC, M., AND GAUSCH, F. Nonlinear control of synchronous servo drive. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 4, 2 (March 1996).
- [19] HARNEFORS, L., AND NEE, H. P. A general algorithm for speed and position estimation of ac motors. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 47, 1 (February 2000).
- [20] HEDRICK, J. K., AND GIRARD, A. Control of nonlinear dynamic systems: Theory and applications. 2005.
- [21] HENDERSHOT, J. R., AND E, M. T. J. *Design of Brushless Permanent-Magnet Motors*. Magna Physics Publishing and Clarendon Press, Oxford, U.K. 1994.
- [22] HERMANN, R., AND J., K. A. Nonlinear controllability and observability. *IEEE Transactions on automatic control* 22, 5 (October 1977), 728–740.
- [23] HONG, J., NAM, K., ORTEGA, R., PRALY, L., ASTOLFI, A., AND LEE, J. Sensorless control of surface-mount permanent-magnet synchronous. *IEEE Transactions on Power* 25, 2 (February 2010).

- [24] HSIEH, G. C., AND HUNG, J. C. Phase-locked loop techniques-a survey. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 43, 6 (December 1996).
- [25] IGGIDR, A. *Controllability, Observability, and Stability of Mathematical Models*. Encyclopedia of Life Support Systems, 2004.
- [26] INC., T. I. Digital signal processing solution for permanent magnet synchronous motor. Literature Number: BPRA044, 1997.
- [27] INSTRUMENTS, T. Sensorless field oriented control of 3-phase permanent magnet synchronous motors. May 2011.
- [28] ISIDORI, A. *Nonlinear control systems*. Springer Verlag, London, 3rd edition, 1995.
- [29] KHALIL, H. *Nonlinear systems*. Printice Hall, NJ, 3rd edition, 2002.
- [30] KIM, H., SON, J., AND LEE, J. A high-speed sliding-mode observer for the sensorless speed control of a pmsm. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on* 58, 9 (September 2011), 4069–4077.
- [31] KOKOTOVIC, P., KHALIL, H. K., AND O’REILLY, J. *Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design*. Classics in Applied Mathematics, SIAM, 1999.
- [32] KRISHNAN, R. *Permanent Magnet Synchronous and Brushless DC Motor Drives*. CNC Press, 2010, ch. Permanent Magnet and Machines.
- [33] KUNDUR, P. *Power Systems Stability and Control*. McGraw-Hill, Inc., USA 1994.
- [34] LANGARICA CÓRDOBA, D. Control de un motor brushless para aplicación a vehículos eléctricos. Master’s thesis, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, Departamento de Ingeniería Electrónica, 2010.
- [35] LARA, J., CHANDRA, A., AND XU, J. Integration of hfsi and extended-emf based techniques for pmsm sensorless control in hev/ev applications. In *38th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society* (October 2012), pp. 3688–3693.
- [36] LI, S., YANG, J., CHEN, W., AND X., C. *Disturbed Observer-Based Control, Methods and Applications*. CRC Press, NJ, Taylor and Francis Group, 2014.
- [37] LUENBERGER, D. G. An introduction to observers. *IEEE Transactions on Automatic Control* 16, 6 (December 1971).
- [38] LYSHEVSKI, S. *Electromechanical Systems, Electric Machines and Applied Mechatronics*. CRC Press, USA 2000.

- [39] MARÍN, J. L., AND ALFARO, M. V. Sintonización de controladores por ubicación de polos y ceros. *IEEE CONESCAPAN XXVI* (september 2007).
- [40] MARQUEZ, J. H. *Nonlinear control systems, analisis and desing*. John Wiley and Sons, NJ, 2003.
- [41] OGATA, K. *Ingeniería de control moderna*. Prentice Hall, 1998.
- [42] ORTEGA, R., LORIA, A., NICKLASSON, H., AND SIRA-RAMÍREZ, H. *Passivity based control of Euler-Lagrange systems: mechanical, electrical and electromechanical applications*. Springer, London, 1998.
- [43] ORTEGA, R., PRALY, L., ASTOLFI, A., AND LEE, J. Estimation of rotor position and speed of permanent magnet synchronous motors with guaranteed stability. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 19, 3 (May 2011), 601–614.
- [44] PETROVIC, V., ORTEGA, R., AND STANKOVIC, A. Interconnection and damping assignment approach to control of pm synchronous motors. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 9, 6 (November 2001), 811–820.
- [45] PETROVIĆ, V., ORTEGA, R., AND STANKOVIĆ, A. M. Interconnection and damping assignment approach to control of pm synchronous motors. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 9, 6 (November 2001).
- [46] POLIC, A., AND JEZERNIK, K. Speed sensorless variable structure and event driven torque control of pmsm. In *9th IEEE International Workshop on Advanced Motion Control* (2006), pp. 553 – 558.
- [47] PREINDL, M., AND SCHALTZ, E. Sensorless model predictive direct current control using novel second-order pll observer for pmsm drive systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 58, 9 (September 2011), 4087–4095.
- [48] SALAS PEÑA, O. S., AND DE LEON MORALES, J. Controles por retroalimentación de salida para motor de inducción sin sensores mecánicos. *CIENCIA UANL* (2006).
- [49] SASTRY, S. *Nonlinear Systems, Analysis, Stability, and Control*. Springer-Verlag, 1999.
- [50] SEMICONDUCTOR, F. Sensorless pmsm vector control with a sliding mode observer for compressors using mc56f8013. 2008.
- [51] SEN, P. C. *Principles of electric machines and power electronics*. John Wiley and Sons, Inc., USA 1989.

- [52] SIRA, R. H. Are nonlinear controllers really necessary in power electronics devices? Tech. rep., CINVESTAV-IPN, Departamento de Ingeniería Eléctrica., 2005.
- [53] SIRA, R. H., AND AGRAWAL, S. K. *Differentially Flat Systems*. CRC Press, 2004.
- [54] SIRA, R. H., LINARES, F. J., GARCIA, R. C., AND CONTRERAS, O. M. A. On the control of the permanent magnet synchronous motor: An active disturbance rejection control approach. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 22, 5 (January 2014).
- [55] SIRA, R. H., LUVIANO, J. A., AND CORTÉS, R. J. Control lineal robusto de sistemas no linealesdiferencialmente planos. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 8, 1 (Enero 2011).
- [56] SIRA, R. H., AND SILVA, O. R. *Control design techniques in power electronics*. Springer-Verlag, 2006.
- [57] SLOTINE, J., AND LI, W. *Applied nonlinear control*. Printice Hall , NJ, 1991.
- [58] SOLSONA, J., VALLA, M., AND MURAVCHIK, C. On speed and rotor position estimation in permanent-magnet ac drives. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 47, 5 (October 2000), 1176–1180.
- [59] SPINETTI, R. M. *Síntesis de controladores para convertidores de potencia utilizando realimentación de la salida pasiva de la dinámica exacta del error de seguimiento: Teoría y práctica*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Cataluña, Enero 2010.
- [60] STENSBY, J. L. *Phase-locked loops: Theory and applications*. CRC Press, 1997.
- [61] TOLEDO OJEDA, O. Sistema de control por plitud diferencial de un sistema eoloeléctrico. Master’s thesis, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, 2010.
- [62] TOMITA, T. M., SENJYU, S. D., AND OKUMA, S. New sensorless control for brushless dc motors using disturbance observers and adaptive velocity estimations. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 45, 2 (April 1998).
- [63] WANG, C.-H., YEH, W.-T., SUNG, W.-T., AND WANG, J.-J. T. M.-S. A simple approach to sensorless control for permanent magnet synchronous motors. In *Intelligent and Advanced Systems (ICIAS), 4th International Conference on* (2012), pp. 531 – 535.
- [64] WANG, Z., LU, K., AND BLAABJERG, F. A simple startup strategy based on current regulation for back-emf-based sensorless control of pmsm. *IEEE Transactions on Power Electronics* 27, 8 (August 2012), 3817–3825.