

Ensayos

Análisis cinemático de un mecanismo de cuatro barras para un telar mecánico

Resumen

En este trabajo, se desarrolla un modelo matemático de ingeniería, generalizado para un mecanismo de cuatro barras, este mecanismo es el elemento fundamental de movimiento de un soporte para telar mecánico de chorro de agua. Para este propósito, se utiliza el álgebra de cuaterniones como una alternativa de modelación ya que, presenta soluciones directas que permite realizar un análisis cinemático completo de cada uno de los elementos del sistema en su configuración no deformada, donde se enfrenta y supera la dificultad de desarrollar un modelo de ingeniería en un problema real. Para esta modelación, se determinan las ecuaciones de posición, velocidad y aceleración de manera simbólica, es decir, en función de los cuaterniones p , q , y $k \in \mathfrak{N}^4$, respectivamente. El cálculo computacional, así como la simulación del movimiento del mecanismo se logra con la ayuda del software Mathematica®.

Abstract

This study develops a mathematical model of engineering, which is generalised for a 4-bar mechanism; this mechanism is the fundamental element in the support-movement of a water-spurt mechanical loom. To do so, the quaternion algebra is used as a modeling alternative, as this offers direct solutions that enable us to make a complete kinematic analysis of each one of the elements of the system in their non-deformed configuration. It thereby faces and overcomes the difficulty of developing a model of engineering in a real problem. For this modeling, the equations of position, velocity and acceleration are determined in a symbolic way, that is, in function of the p , q , and $k \in \mathfrak{N}^4$ quaternions, respectively. The computerized calculation, as well as the simulation of the movement of the mechanism, are obtained with the aid of Mathematica® software.

Abstrait

Dans ce travail, on a développé un modèle mathématique d'ingénierie, généralisé par un mécanisme de quatre barres. Ce mécanisme est l'élément fondamental du mouvement d'un support pour un métier à tisser mécanique à jet d'eau. Pour cela, on utilise l'algèbre de quaternions comme une alternative de modélisation, puisqu'il présente des solutions directes permettant de réaliser une analyse cinématique complète de chacun des éléments du système, dans sa configuration non déformée, où on rencontre et résout la difficulté de développer un modèle d'ingénierie dans un problème réel. Pour cette modélisation, on détermine les équations de position, rapidité et accélération de manière symbolique, c'est-à-dire, en fonction des quaternions respectifs, p , q , y $k \in \mathfrak{N}^4$. Le calcul informatique, ainsi que la simulation du mouvement du mécanisme, s'obtiennent à l'aide du software Mathematica®.

* Márquez Miranda M.

* Salinas Pérez I.

** Cuenca Jiménez F.

Palabras clave: Modelo en ingeniería, cuaterniones, modelación cinemática.

1. Introducción

Generalmente, el éxito del diseño depende mucho de la validez y lo apropiado de los modelos matemáticos de ingeniería para predecir y analizar el comportamiento de un sistema antes de elaborar el modelo físico o prototipo. El desarrollo de un modelo de ingeniería útil para un diseño, es probablemente la etapa más difícil y desafiante de todo el proceso. Su éxito, depende principalmente de la experiencia y sobre todo del conocimiento del problema. Es de máxima importancia una comprensión completa de los principios y los fundamentos de la ingeniería. El estudiante de ingeniería, está acostumbrado a problemas totalmente estructurados de la forma «dados A, B y C, encuentre el valor de D»; Los problemas de ingeniería de la vida real, no son de este tipo; son poco estructurados y se debe estructurar y resolver, este es uno de los desafíos que debe enfrentar el ingeniero o estudiante de ingeniería, [1]

* Universidad Tecnológica de la Mixteca

** Universidad Nacional Autónoma de México, división de Estudios de Postgrado

El modelo de ingeniería que se describe, es muy general, pero se aterriza en la solución de un problema en particular. Se trata de un modelo matemático que describe el comportamiento cinemático de un mecanismo de cuatro barras, este mecanismo es parte fundamental de un telar mecánico de chorro de agua, fig. 1. Este modelo de ingeniería, requiere el uso de una computadora y herramienta computacional, para hacerlo funcionar a través de la simulación, posteriormente construir el prototipo, necesario para comprobar la validez del modelo de ingeniería por medio de la experimentación.

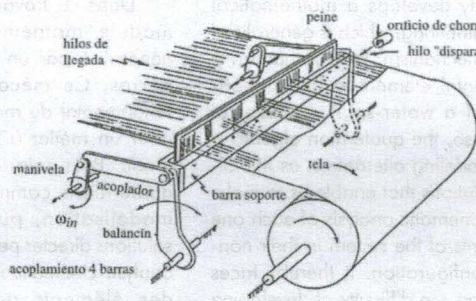


Fig. 1 Telar mecánico de chorro de agua

A continuación, se presenta una metodología que pretende enfrentar y superar la dificultad de desarrollar un modelo de ingeniería en un problema real, para un mecanismo de cuatro barras, fig. 2. Para el desarrollo de este modelo, se aplica el álgebra de cuaterniones con la finalidad de mostrar la sencillez con que se desarrolla el modelo de ingeniería para este mecanismo, sin disminuir la rigurosidad y la seriedad.

Este trabajo tiene la siguiente estructura, en la primera parte se estudian los fundamentos necesario para desarrollar un modelo de ingeniería de un mecanismo de cuatro barras, en la segunda parte, se desarrolla el modelo de ingeniería para el mecanismo, a través del análisis cinemático, es decir, la posición, la velocidad y la aceleración y por último, se presentan los sistemas de ecuaciones generales, su solución y simulación.

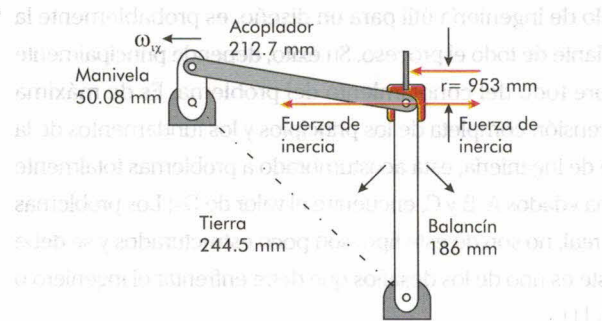


Fig. 2. Mecanismo de cuatro barras

2. Desarrollo

2.1 Fundamentos

La *cinemática*, estudia el comportamiento de los cuerpos rígidos. Un *cuerpo rígido*, se define como un sistema de partículas en donde la distancia entre ellas permanece sin cambio. Si una partícula sobre un cuerpo, se localiza a través de un vector de posición que está fijo en el cuerpo, el vector nunca cambia su posición relativa a él, incluso cuando el cuerpo esté en movimiento.

En realidad, todos los materiales sólidos cambian de forma en ciertas magnitudes cuando algunas fuerzas se aplican a ellos. No obstante, si el movimiento asociado con los cambios de forma es pequeño comparado con el movimiento total del cuerpo, entonces el concepto de rigidez es aceptable.

Un *mecanismo*, es un conjunto de elementos rígidos que están arreglados de tal manera que pueden producir un movimiento específico. Por lo tanto, la *cinemática* estudia el movimiento, completamente aparte de las fuerzas que producen dicho movimiento. Más particularmente, la *cinemática* estudia la *posición*, *velocidad* y *aceleración* de un sistema de cuerpos que forman a un mecanismo.

La *síntesis cinemática*, es el proceso de encontrar la geometría de un mecanismo que producirá un movimiento deseado. Por lo tanto, el *análisis cinemático* es el proceso de predecir la *posición*, *velocidad* y *aceleración* una vez que el mecanismo esté especificado.

Los cuerpos individuales que en conjunto forman un mecanismo son llamados *eslabones*. La conexión de dos eslabones constituye un *par cinemático* o *junta cinemática*. Un conjunto de eslabones interconectados, es llamado *cadena cinemática*. Un mecanismo, se forma cuando por lo menos uno de sus eslabones de la cadena cinemática es considerado fijo y los otros eslabones móviles. Los eslabones fijos son llamados *bases*.

Si todos los eslabones de un mecanismo, se mueven en el plano o en planos paralelos, el mecanismo es llamado *mecanismo plano*. Si algunos eslabones sufren un movimiento en tres dimensiones el mecanismo se llama *mecanismo espacial*.

Un mecanismo que está formado por un conjunto de eslabones o cuerpos cinemáticamente conectados a otros pero, para el cual no es posible que se mueva a eslabones sucesivos a través de juntas cinemáticas y

regresan al eslabón de inicio es llamado *ciclo abierto* o mecanismo de *cadena abierta*. Un mecanismo de *cadena abierta*, puede tener eslabones con una sola unión como se muestra en la figura 3a.

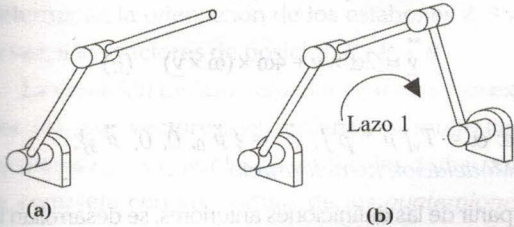


Fig. 3. Sistemas mecánicos de lazo abierto, (a) y lazo cerrado (b).

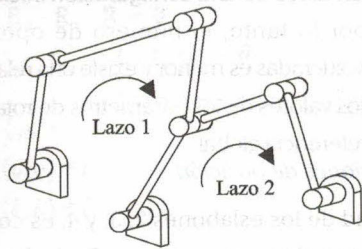


Fig. 4. Sistemas mecánicos de lazo cerrado, multilazo.

Un mecanismo de *lazo cerrado*, se forma por una cadena cerrada, en donde cada eslabón está conectado por lo menos a otras dos juntas del mecanismo y es posible que ejecute un ciclo cerrado, como el mecanismo de cuatro barras que se muestra en la figura 3b. Si el número de lazos en un mecanismo cerrado es uno, el mecanismo es llamado *mecanismo de lazo simple*, figura 3b. Si el mecanismo contiene más de un lazo, es llamado *mecanismo de multilazo*, figura 4.

2.2. Vector coordenado

Un conjunto de parámetros que en forma unívoca define la posición (configuración) de todos los cuerpos que forman a un mecanismo, es llamado *conjunto de coordenadas*. Para todo sistema en movimiento, estos parámetros varían con el tiempo. El vector coordenado, está designado por un vector columna de la forma $\mathbf{r} = \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n\}^T$ donde n representa el número de coordenadas que describe el sistema.

Para especificar la configuración de un sistema plano, se asocia un sistema de coordenadas fijo al cuerpo $e(t)_i^i$, como se muestra en la figura 5a. El cuerpo W_i , se localiza especificando las coordenadas de traslación global, $\mathbf{r}_i = \{x, y\}_p$, del origen O_i del sistema de coordenadas fijo al cuerpo y el ángulo de rotación

q_i de este sistema relativo a los ejes globales. El vector, $\mathbf{r}_i = \{x, y, \theta\}_p$, es el vector coordenado del cuerpo Ω_i en el plano.

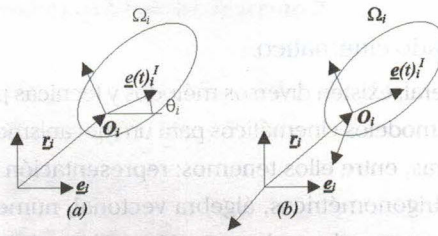


Fig. 5. Sistemas de referencia de un cuerpo rígido en \mathcal{R}^2 (a) y \mathcal{R}^3 (b), respectivamente.

Para sistemas espaciales, se requieren seis coordenadas para describir la configuración de cada cuerpo, es decir, para el cuerpo W_i que se muestra en la figura 5b, se requieren tres coordenadas de posición y tres coordenadas de orientación. Las coordenadas de posición, se representan por $\mathbf{r}_i = \{x, y, z\}_p$, localizan el origen del sistema de referencia fijo al cuerpo $e(t)_i^i$ relativo a los ejes globales e_i . Las coordenadas de orientación, se representan por θ_1, θ_2 y θ_3 , especifican la orientación angular del cuerpo. Por lo tanto, el vector $\mathbf{r}_i = \{x, y, z, \theta_1, \theta_2, \theta_3\}_p$, es el vector de coordenadas para el cuerpo en el espacio tridimensional.

2.3. Espacio vectorial de cuaterniones

Los cuaterniones fueron presentados en 1843, por el matemático irlandés William Rowan Hamilton (1805-1865). El resultado del estudio de los cuaterniones, lo escribió en sus libros "Elements of Quaternions" [2], y "Lectures on Quaternions" [3]. El tratamiento de esta álgebra en las referencias citadas, es puramente geométrico, sin embargo, en esta aplicación, se utiliza la sistematización del álgebra de cuaterniones como una estructura algebraica en \mathcal{R}^4 , [4, 5].

Sea el conjunto \mathcal{R}^4 , sobre el cual, se define las operaciones siguientes:

i). **Una operación aditiva**, $\oplus: \mathcal{R}^4 \times \mathcal{R}^4 \rightarrow \mathcal{R}^4$ definida como,
 $(a, b, c, d) \oplus (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (a + \alpha, b + \beta, c + \gamma, d + \delta)$

ii). **Una operación multiplicativa**, $*$: $\mathcal{R}^4 \times \mathcal{R}^4 \rightarrow \mathcal{R}^4$ definida por,
 $(a, b, c, d) * (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (a\alpha - b\beta - c\gamma - d\delta, a\beta + b\alpha + c\delta - d\gamma, a\gamma - b\delta + c\alpha + d\beta, a\delta + b\gamma - c\beta + d\alpha),$
 $\forall (a, b, c, d), (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathcal{R}^4.$

por medio de las cuales las parejas (\mathbb{R}^4, \oplus) y $(\mathbb{R}^4, *)$, forman un grupo aditivo conmutativo y un grupo multiplicativo no conmutativo, respectivamente.

2.4 Modelado cinemático

En general, existen diversos métodos y técnicas para desarrollar modelos cinemáticos para un mecanismo de cuatro barras, entre ellos tenemos: representación por funciones trigonométricas, álgebra vectorial, números complejos y matrices de rotación, ellos ofrecen ventajas en ciertas condiciones y desventajas en otras, como el número de ecuaciones e incógnitas involucradas, ambigüedades en las rotaciones y singularidades matemáticas.

En este trabajo, se utiliza el álgebra de cuaterniones para desarrollar un modelo matemático sencillo, pero riguroso. Unas de las principales ventajas, con respecto a las mencionadas que ofrece el álgebra, es que está libre de singularidades matemáticas, se puede reducir el número de operaciones algebraicas y completar rápidamente el sistema de ecuaciones [6, [7, 8].

En el análisis cinemático, uno de los principales problemas, es determinar el número de coordenadas y el número de ecuaciones de restricción. En este análisis, el vector coordenado está definido por $\mathbf{r}_i = \{x, y, \mathbf{p}\}_i$ y las ecuaciones de restricción lo determinarán los lazos formados en el mecanismo y las normas de los parámetros de rotación de \mathbf{p} .

A continuación, se establecen las definiciones de la *posición*, *velocidad* y *aceleración*, empleando el álgebra de cuaterniones, [9].

2.4.1 Teoremas cinemáticos

Teorema 1: La ecuación de *posición* en el plano mediante un movimiento de rotación, queda establecida por la expresión [9]:

$$\underline{\mathbf{v}} = \rho(\mathbf{p}, \underline{\mathbf{u}}) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|^2} \mathbf{p}^* \mathbf{q} * \bar{\mathbf{p}} \quad (a)$$

donde: $\mathbf{p} = \{p_0, 0, 0, p_3\}$, $\underline{\mathbf{u}} = \{0, x, y, 0\}$.

Teorema 2: La ecuación de *velocidad* en el plano mediante un movimiento de rotación, queda establecida por la expresión [9]:

$$\dot{\underline{\mathbf{v}}} = 2\omega \times \underline{\mathbf{v}} \quad (b)$$

donde:

$$\omega = T_v[\dot{\mathbf{p}} * \bar{\mathbf{p}}], \dot{\mathbf{p}} = \{\dot{p}_0, 0, 0, \dot{p}_3\}, \bar{\mathbf{p}} = \{p_0, 0, 0, -p_3\}.$$

Teorema 3: La ecuación de *aceleración* en el plano mediante un movimiento de rotación, queda establecida por la expresión [9]:

$$\ddot{\underline{\mathbf{v}}} = 2\alpha \times \underline{\mathbf{v}} + 4\omega \times (\omega \times \underline{\mathbf{v}}) \quad (c)$$

donde: $\alpha = T_v[\ddot{\mathbf{p}} * \bar{\mathbf{p}}]$, $\ddot{\mathbf{p}} = \{\ddot{p}_0, 0, 0, \ddot{p}_3\}$.

2.4.2 Modelación no deformada.

A partir de las definiciones anteriores, se desarrollan las ecuaciones cinemáticas para un mecanismo de cuatro barras. Se analiza la *modelación no deformada*, es decir, no se requieren datos de una configuración inicial para su modelado, por lo tanto, el número de operaciones algebraicas involucradas es menor y existe una relación más directa entre los valores de los parámetros de rotación con respecto a la referencia global.

2.4.2.1 Ecuaciones de posición

La longitud de los eslabones 2, 3, y 4, es conocida y están representadas por r_2, r_3 y r_4 . En la figura 6, se muestran los parámetros de entrada $\theta_2, \omega_2, \alpha_2$, del eslabón 2 y se desea encontrar los parámetros $\theta_3, \omega_3, \alpha_3$ y $\theta_4, \omega_4, \alpha_4$, de los eslabones 3 y 4, respectivamente. Los vectores de posición para cada uno de los eslabones están dados por $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3$ y \mathbf{R}_4 , los cuales forman un lazo cerrado, por lo tanto la suma de los vectores en el lazo debe de ser igual a cero.

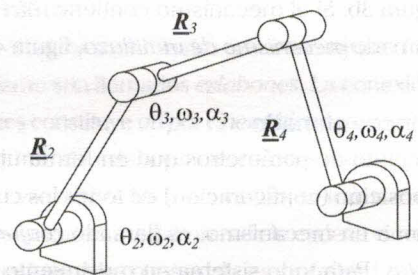


Fig. 6 Parámetros del mecanismo

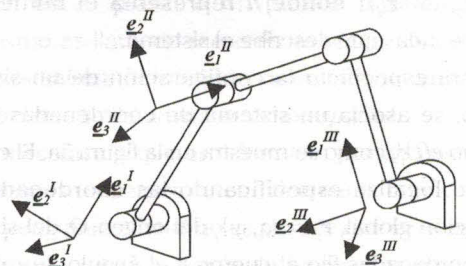


Fig. 7 Sistemas de referencia relativos

Los ángulos θ_2 , θ_3 , y θ_4 , están relacionados con los *quaterniones* de rotación \mathbf{p} , \mathbf{q} , \mathbf{k} , respectivamente y estos mediante la función de rotación con los sistemas de referencia relativos *no deformados*, \mathbf{e}_j^I , \mathbf{e}_j^{II} y \mathbf{e}_j^{III} también llamados *bases locales*, figura 6. Las bases determinan la orientación de los eslabones 2, 3 y 4 y a la vez, a los vectores de posición \mathbf{R}_2 , \mathbf{R}_3 y \mathbf{R}_4 .

La ecuación de lazo para el mecanismo, se expresa por (1). Los vectores, se obtienen al multiplicar los escalares r_2 , r_3 y r_4 por las bases locales dados por (2) y se completa con las normas de los *quaterniones* [9], (3). Las bases locales, \mathbf{e}_j^I , \mathbf{e}_j^{II} y \mathbf{e}_j^{III} , $j = 1, 2, 3$, se obtienen rotando la base global alrededor del eje $\mathbf{e}_3 = \{0, 0, 0, 1\}$:

$$\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_4 = \mathbf{0} \quad (1)$$

$$r_2 \mathbf{e}_j^I + r_3 \mathbf{e}_j^{II} - r_1 \mathbf{e}_j - r_4 \mathbf{e}_j^{III} = \mathbf{0} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}\| &= \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle = 1 \\ \|\mathbf{q}\| &= \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle = 1 \\ \|\mathbf{k}\| &= \langle \mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle = 1 \end{aligned} \quad (3)$$

A partir del **Teorema 1**:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_j^I &= T_v[\rho(\mathbf{p}, \mathbf{e}_j)], \\ \mathbf{e}_j^{II} &= T_v[\rho(\mathbf{q}, \mathbf{e}_j)], \\ \mathbf{e}_j^{III} &= T_v[\rho(\mathbf{k}, \mathbf{e}_j)], \\ \mathbf{p} &= \{p_0, 0, 0, p_3\}, \\ \mathbf{q} &= \{q_0, 0, 0, q_3\}, \\ \mathbf{k} &= \{k_0, 0, 0, k_3\} \end{aligned} \quad (4)$$

La ecuación (2), produce componentes en x y y . Con la ecuación (3), se forma un sistema cuadrado de ecuaciones algebraicas *no lineales* para la posición. El modelo de ingeniería para la posición, se presenta en la tabla 1.

Datos	Ecuaciones	Incógnitas
Dado p_0, p_3 , obtener q_0, q_3, k_0, k_3	2 ecuaciones de (2) 2 ecuaciones de (3) total: 4	q_0, q_3, k_0, k_3 total:

TABLA 1. SISTEMAS DE ECUACIONES PARA LA POSICIÓN

2.4.2.2 Ecuaciones de velocidad

El mecanismo presentado en la figura 3a, muestra una velocidad angular de entrada ω_2 para el eslabón 2 del mecanismo. La ecuación de velocidad del mecanismo, se obtiene derivando la ecuación de posición (1) y las normas de los quaterniones (3). La derivada de cada vector en (5), representa la velocidad lineal del extremo final de cada eslabón.

$$\dot{\mathbf{R}}_2 + \dot{\mathbf{R}}_3 - \dot{\mathbf{R}}_4 = \mathbf{0} \quad (5)$$

Donde $\dot{\mathbf{R}}_1 = \mathbf{0}$, es un vector coordenado constante. A partir del **Teorema 2**.

$$\begin{aligned} 2\omega_2 \times \mathbf{R}_2 + 2\omega_3 \times \mathbf{R}_3 - 2\omega_4 \times \mathbf{R}_4 &= \mathbf{0} \\ \omega_2 \times \mathbf{R}_2 + \omega_3 \times \mathbf{R}_3 - \omega_4 \times \mathbf{R}_4 &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \|\dot{\mathbf{p}}\|^* &= \langle \dot{\mathbf{p}}, \dot{\mathbf{p}} \rangle = 0 \\ \|\dot{\mathbf{q}}\|^* &= \langle \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \rangle = 0 \\ \|\dot{\mathbf{k}}\|^* &= \langle \dot{\mathbf{k}}, \dot{\mathbf{k}} \rangle = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

donde,

$$\begin{aligned} \omega_2 &= T_v[\dot{\mathbf{p}}^* \bar{\mathbf{p}}], \quad \dot{\mathbf{p}} = \{\dot{p}_0, 0, 0, \dot{p}_3\}, \\ \bar{\mathbf{p}} &= \{p_0, 0, 0, -p_3\}, \\ \omega_3 &= T_v[\dot{\mathbf{q}}^* \bar{\mathbf{q}}], \quad \dot{\mathbf{q}} = \{\dot{q}_0, 0, 0, \dot{q}_3\}, \\ \bar{\mathbf{q}} &= \{q_0, 0, 0, -q_3\}, \\ \omega_4 &= T_v[\dot{\mathbf{k}}^* \bar{\mathbf{k}}], \quad \dot{\mathbf{k}} = \{\dot{k}_0, 0, 0, \dot{k}_3\}, \\ \bar{\mathbf{k}} &= \{k_0, 0, 0, -k_3\}, \end{aligned}$$

Tal que, ω_2 , ω_3 , ω_4 , y \mathbf{R}_2 , \mathbf{R}_3 , \mathbf{R}_4 , representan las velocidades angulares y los vectores de posición con respecto al tiempo de los eslabones 2, 3 y 4 respectivamente. Considerando que ω_2 representa la magnitud de la velocidad angular del eslabón 2. La asignación paramétrica del quaternion $\dot{\mathbf{p}}$, se obtiene como:

$$\dot{\mathbf{p}} = \omega_2 * \mathbf{p} \quad (9)$$

De la solución del sistema de ecuaciones de posición, tabla 1, se obtienen los valores de las incógnitas q_0 , q_3 , k_0 , k_3 , estos valores, se utilizan como datos para determinar las velocidades. A partir de las ecuaciones (6) y (7), se tiene un sistema de ecuaciones diferenciales *lineales* para la velocidad, tabla 2.

Datos	Ecuaciones	Incógnitas
Dado \dot{p}_0, \dot{p}_3 , obtener $\dot{q}_0, \dot{q}_3, \dot{k}_0, \dot{k}_3$	2 ecuaciones, de (6) 2 ecuaciones, de (7) total: 4	$\dot{q}_0, \dot{q}_3, \dot{k}_0, \dot{k}_3$ total: 4

TABLA 2. SISTEMAS DE ECUACIONES PARA LA VELOCIDAD

2.4.2.3 Ecuaciones de Aceleración

Una vez obtenida la velocidad lineal, la siguiente etapa es generar el sistema de ecuaciones que permita calcular las aceleraciones de todos los eslabones del mecanismo. La velocidad, es un vector cuantitativo y

así también, lo es la aceleración. En la figura 5a, se muestra una aceleración angular de entrada a_2 que es aplicada al eslabón 2 del mecanismo. La ecuación de aceleración del mecanismo, se obtiene derivando la ecuación de velocidad (5) y las normas de los *quaterniones* (7).

$$\ddot{\underline{R}}_2 + \ddot{\underline{R}}_3 - \ddot{\underline{R}}_4 = \underline{0} \quad (10)$$

A partir del Teorema 3.

$$\begin{aligned} 2\underline{\alpha}_2 \times \underline{R}_2 + 4\underline{\omega}_2 \times (\underline{\omega}_2 \times \underline{R}_2) + 2\underline{\alpha}_3 \times \underline{R}_3 + 4\underline{\omega}_3 \times (\underline{\omega}_3 \times \underline{R}_3) - \\ 2\underline{\alpha}_4 \times \underline{R}_4 - 4\underline{\omega}_4 \times (\underline{\omega}_4 \times \underline{R}_4) = \underline{0} \\ \underline{\alpha}_2 \times \underline{R}_2 + 2\underline{\omega}_2 \times (\underline{\omega}_2 \times \underline{R}_2) + \underline{\alpha}_3 \times \underline{R}_3 + 2\underline{\omega}_3 \times (\underline{\omega}_3 \times \underline{R}_3) - \\ \underline{\alpha}_4 \times \underline{R}_4 - 2\underline{\omega}_4 \times (\underline{\omega}_4 \times \underline{R}_4) = \underline{0} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\|\underline{p}\|'' = \langle \ddot{\underline{p}}, \underline{p} \rangle + \langle \dot{\underline{p}}, \dot{\underline{p}} \rangle = 0$$

$$\|\underline{q}\|'' = \langle \ddot{\underline{q}}, \underline{q} \rangle + \langle \dot{\underline{q}}, \dot{\underline{q}} \rangle = 0 \quad (12)$$

$$\|\underline{k}\|'' = \langle \ddot{\underline{k}}, \underline{k} \rangle + \langle \dot{\underline{k}}, \dot{\underline{k}} \rangle = 0$$

donde:

$$\begin{aligned} \underline{\alpha}_2 = T_v[\ddot{\underline{p}} * \bar{\underline{p}}], \quad \ddot{\underline{p}} = \{\ddot{p}_0, 0, 0, \ddot{p}_3\}, \\ \underline{\alpha}_3 = T_v[\ddot{\underline{q}} * \bar{\underline{q}}], \quad \ddot{\underline{q}} = \{\ddot{q}_0, 0, 0, \ddot{q}_3\}, \\ \underline{\alpha}_4 = T_v[\ddot{\underline{k}} * \bar{\underline{k}}], \quad \ddot{\underline{k}} = \{\ddot{k}_0, 0, 0, \ddot{k}_3\}, \end{aligned} \quad (13)$$

Considerando que α_2 representa la magnitud de la aceleración angular del eslabón 2. La asignación paramétrica del *quaternion* \underline{p} , se obtiene como:

$$\ddot{\underline{p}} = \underline{\alpha}_2 * \underline{p} \quad (14)$$

Del análisis de la posición y la velocidad, tabla 1 y 2, se tienen como datos $p_0, p_3, q_0, q_3, k_0, k_3, \dot{p}_0, \dot{p}_3, \dot{q}_0, \dot{q}_3, \dot{k}_0, \dot{k}_3$, por lo tanto a partir de las ecuaciones (11) y (12), se tiene un sistema de ecuaciones diferenciales *lineales* para la aceleración [10,11], tabla 3.

Datos	Ecuaciones	Incógnitas
Dado $\ddot{\underline{p}}, \ddot{\underline{q}}, \ddot{\underline{k}}$	2 ecuaciones de (11) 2 ecuaciones de (12)	$\ddot{q}_0, \ddot{q}_3, \ddot{k}_0, \ddot{k}_3$
obtener $\ddot{\underline{q}}, \ddot{\underline{k}}, \ddot{q}_0, \ddot{q}_3, \ddot{k}_0, \ddot{k}_3$	total: 4	total: 4

TABLA 3. SISTEMAS DE ECUACIONES PARA LA ACCELERACIÓN.

2.5 Solución y simulación de la cinemática del mecanismo de cuatro barras

El modelo cinemático, para el mecanismo de cuatro barras mostrado en la figura 2, son las ecuaciones (2), (3), (6), (7), (11) y (12). Se generan las ecuaciones de

manera simbólica, se resuelven y se simulan utilizando el software *Mathematica*[®] [12].

Se consideran los siguientes datos del mecanismo [1]:

$$\underline{R}_1 = \{16.26, -18.25, 0\} \text{ cm}, r_2 = 5.01 \text{ cm},$$

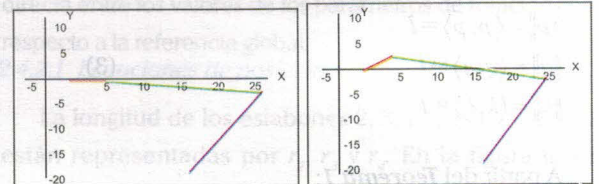
$$r_3 = 21.27 \text{ cm}, r_4 = 18.66 \text{ cm}$$

$$\theta_2 \text{ varía de } 0^\circ \text{ a } 360^\circ,$$

$$\omega_2 = 52.35 \pi \text{ rad/s}, \alpha = 0 \text{ rad/s}^2.$$

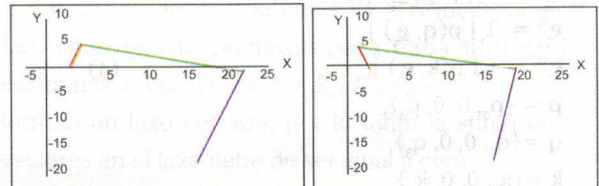
$$\underline{p} = \{p_0, 0, 0, p_3\}, p_0 = \text{Cos}(\theta_2/2), p_3 = \text{Sen}(\theta_2/2).$$

Con los datos anteriores, se obtiene las siguientes gráficas representativas de la cinemática del mecanismo, fig. 2, es decir, posición velocidad y aceleración, respectivamente; cuando la barra 2, gira una revolución (0 a 324°), en intervalos de muestreo de 36°.



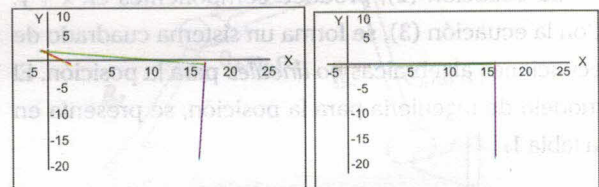
(a)

(b)



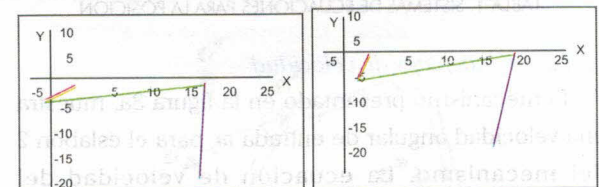
(c)

(d)



(e)

(f)



(g)

(h)

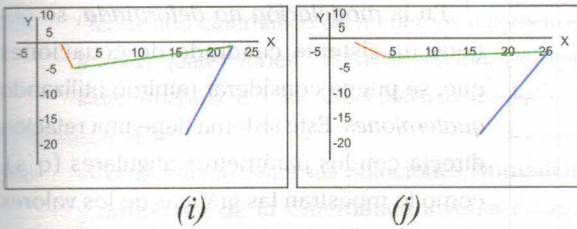


Fig. 7. Secuencia de movimientos del mecanismo de cuatro barras de 0 a 324° , en intervalos de muestreo de 36° .

A continuación, se presentan las tablas de resultados para una revolución de la barra 2, en intervalos de muestreo de 9 grados y su respectiva gráfica.

Grados	q0	q3	vq0	vq3	aq0	aq3
0	0.114085	-0.114085	-0.0792573	-1.38794	-0.603957	6.37332
9	0.146793	-0.146793	-0.089759	-1.22074	-0.241026	6.93784
18	0.175203	-0.175203	-0.0916671	-1.04373	0.0795628	7.17968
27	0.19915	-0.19915	-0.0862624	-0.863442	0.342792	7.21837
36	0.218591	-0.218591	-0.0750255	-0.68371	0.546464	7.14852
45	0.233557	-0.233557	-0.0594021	-0.506359	0.694638	7.03672
54	0.244104	-0.244104	-0.0407082	-0.331874	0.793019	6.92422
63	0.250295	-0.250295	-0.0201262	-0.159979	0.846315	6.83136
72	0.252182	-0.252182	0.00125393	0.0098919	0.857099	6.7618
81	0.249809	-0.249809	0.022378	0.178228	0.825733	6.706
90	0.243214	-0.243214	0.0421798	0.345142	0.751061	6.644
99	0.232441	-0.232441	0.059558	0.510147	0.631676	6.54811
108	0.217562	-0.217562	0.0733901	0.671996	0.467582	6.38959
117	0.198689	-0.198689	0.0825899	0.828613	0.26198	6.12414
126	0.175997	-0.175997	0.0862076	0.977118	0.0227852	5.73241
135	0.149743	-0.149743	0.0835596	1.11395	-0.236572	5.18743
144	0.120276	-0.120276	0.0743656	1.2351	-0.497405	4.4756
153	0.0880429	-0.0880429	0.0588646	1.33632	-0.737154	3.59404
162	0.0535945	-0.0535945	0.0378854	1.41344	-0.931643	2.54957
171	0.0175763	-0.0175763	0.0128534	1.46255	-1.05774	1.35621
180	0.0192771	0.0192771	-0.0142671	1.48016	-1.0959	0.0322591
189	0.0561515	0.0561515	-0.0410925	1.46324	-1.03243	-1.40228
198	0.0921629	0.0921629	-0.0649885	1.4093	-0.861261	-2.9268
207	0.126368	0.126368	-0.0832821	1.31634	-0.585645	-4.51938
216	0.157774	0.157774	-0.0935153	1.18298	-0.219808	-6.15395
225	0.185355	0.185355	-0.0937413	1.00858	0.209302	-7.79526
234	0.208076	0.208076	-0.0828613	0.793579	0.660592	-9.39177
243	0.224921	0.224921	-0.0609846	0.539988	1.07873	-10.8674
252	0.234953	0.234953	-0.0297538	0.252108	1.39725	-12.114
261	0.237384	0.237384	0.00746841	-0.0626267	1.54703	-12.9895
270	0.231669	0.231669	0.0457142	-0.392884	1.47193	-13.3271
279	0.217611	0.217611	0.0789925	-0.723128	1.15	-12.964
288	0.195464	0.195464	0.101407	-1.0343	0.613341	-11.7901
297	0.165989	0.165989	0.108627	-1.30584	-0.0457621	-9.80591
306	0.130442	0.130442	0.0992144	-1.51905	-0.693397	-7.16161
315	0.0904745	0.0904745	0.0751816	-1.66081	-1.19568	-4.14644
324	0.0479517	0.0479517	0.0413969	-1.72628	-1.46447	-1.1189
333	0.0047345	0.0047345	0.00407028	-1.71941	-1.48197	1.59379
342	0.0375121	-0.0375121	-0.0309707	-1.65104	-1.29284	3.77693
351	0.0774449	-0.0774449	-0.059493	-1.53563	-0.974227	5.35613
360	0.114085	-0.114085	-0.0792573	-1.38794	-0.603957	6.37332

TABLA 4. POSICIÓN, VELOCIDAD Y ACELERACIÓN DE LOS PARÁMETROS q_0 Y q_3 .

Grados	k0	k3	vk0	vk3	ak0	ak3
0	1.01271	1.01271	-0.103138	0.185975	-6.84811	12.3017
9	1.02229	1.02229	-0.268278	0.47833	-6.35175	11.0175
18	1.03981	1.03981	-0.42027	0.734181	-5.79991	9.41175
27	1.06422	1.06422	-0.557912	0.947611	-5.20426	7.6477
36	1.0944	1.0944	-0.680101	1.11627	-4.5627	5.84696
45	1.12919	1.12919	-0.785603	1.24035	-3.86795	4.09259
54	1.16744	1.16744	-0.873001	1.32173	-3.11357	2.43766
63	1.20803	1.20803	-0.940768	1.36334	-2.29774	0.914369
72	1.24992	1.24992	-0.987415	1.36871	-1.4254	-0.458405
81	1.29209	1.29209	-1.01167	1.34176	-0.509251	-1.66981
90	1.33364	1.33364	-1.01268	1.28661	0.430193	-2.71386
99	1.37369	1.37369	-0.990193	1.20749	1.36569	-3.58818
108	1.41147	1.41147	-0.944693	1.10861	2.26556	-4.29409
117	1.4463	1.4463	-0.877484	0.994136	3.09726	-4.83752
126	1.47759	1.47759	-0.790644	0.867993	3.83166	-5.23008
135	1.50487	1.50487	-0.686893	0.733742	4.4473	-5.4897
144	1.52774	1.52774	-0.569362	0.594419	4.93337	-5.64021
153	1.54595	1.54595	-0.441301	0.452406	5.29068	-5.70983
162	1.55929	1.55929	-0.305811	0.30935	5.53017	-5.72874
171	1.56767	1.56767	-0.165627	0.166146	5.66955	-5.7263
180	1.57101	1.57101	-0.0230002	0.0229953	5.72885	-5.72838
189	1.56929	1.56929	0.120298	-0.12048	5.72588	-5.75504
198	1.56249	1.56249	0.262875	-0.265066	5.6723	-5.81855
207	1.55062	1.55062	0.403514	-0.411739	5.57044	-5.92139
216	1.53367	1.53367	0.54092	-0.561386	5.41098	-6.05365
225	1.51165	1.51165	0.6734	-0.714456	5.17148	-6.18946
234	1.4846	1.4846	0.798533	-0.870509	4.81619	-6.28245
243	1.45264	1.45264	0.912854	-1.02763	4.29809	-6.26094
252	1.41598	1.41598	1.01164	-1.18178	3.56498	-6.0252
261	1.37503	1.37503	1.08893	-1.32608	2.57137	-5.45107
270	1.33045	1.33045	1.13786	-1.4504	1.29693	-4.40607
279	1.28324	1.28324	1.15164	-1.54154	-0.231602	-2.78326
288	1.23476	1.23476	1.1249	-1.58445	-1.92391	-0.551364
297	1.18671	1.18671	1.05533	-1.56479	-3.62835	2.19446
306	1.14107	1.14107	0.944905	-1.47244	-5.16228	5.21061
315	1.09991	1.09991	0.800004	-1.30497	-6.36422	8.13993
324	1.06513	1.06513	0.630244	-1.06936	-7.14335	10.6031
333	1.03828	1.03828	0.446386	-0.781184	-7.49901	12.3076
342	1.02039	1.02039	0.258241	-0.461463	-7.50195	13.1193
351	1.01189	1.01189	0.0733794	-0.132442	-7.25361	13.0683
360	1.01271	1.01271	-0.103138	0.185975	-6.84811	12.3017

TABLA 5. POSICIÓN, VELOCIDAD Y ACELERACIÓN DE LOS PARÁMETROS K_0 Y K_3 .

Grados	w3	w4	a3	a4
0	-1.3902	0.21266	6.32852	14.0793
9	-1.22404	0.548428	6.90149	12.7164
18	-1.04775	0.84596	7.15911	11.0495
27	-0.86774	1.09965	7.21669	9.23071
36	-0.687814	1.30713	7.16547	7.36718
45	-0.509831	1.46821	7.06973	5.52708
54	-0.334361	1.58402	6.96926	3.75001
63	-0.16124	1.65642	6.88357	2.05759
72	0.00997106	1.68771	6.8159	0.462187
81	0.179627	1.68042	6.75663	-1.0267
90	0.34771	1.63735	6.68604	-2.3986
99	0.513612	1.56157	6.57718	-3.64055
108	0.675991	1.45652	6.39896	-4.73781
117	0.832719	1.326	6.11993	-5.67642
126	0.980914	1.17411	5.71223	-6.44673
135	1.11708	1.00509	5.1552	-7.047
144	1.23733	0.823108	4.43762	-7.48568
153	1.33761	0.631995	3.55812	-7.78162
162	1.41395	0.434992	2.52369	-7.96193
171	1.46261	0.234599	1.34687	-8.05814
180	1.48023	0.0325238	0.0428203	-8.10149
189	1.46382	-0.170256	-1.37275	-8.11825
198	1.41079	-0.373314	-2.88402	-8.12562
207	1.31897	-0.5765	-4.47338	-8.12804
216	1.18667	-0.779582	-6.11749	-8.11376
225	1.01293	-0.981792	-7.78117	-8.05117
234	0.797893	-1.18129	-9.40959	-7.8853
243	0.543421	-1.37453	-10.9198	-7.53529
252	0.253858	-1.55564	-12.1943	-6.89551
261	-0.0630705	-1.71588	-13.0813	-5.84457
270	-0.395534	-1.84347	-13.4079	-4.26711
279	-0.72743	-1.92422	-13.0122	-2.09113
288	-1.03926	-1.94316	-11.7937	0.664171
297	-1.31035	-1.8874	-9.76837	3.84813
306	-1.52229	-1.74955	-7.10119	7.17337
315	-1.66251	-1.53067	-4.08813	10.2659
324	-1.72677	-1.24126	-1.08347	12.7617
333	-1.71941	-0.899727	1.59729	14.4066
342	-1.65133	-0.528807	3.75202	15.1121
351	-1.53678	-0.151411	5.3144	14.9464
360	-1.3902	0.21266	6.32852	14.0793

TABLA 6. VELOCIDAD Y ACELERACIÓN ANGULAR DE LOS ES LABONES 3 Y 4.

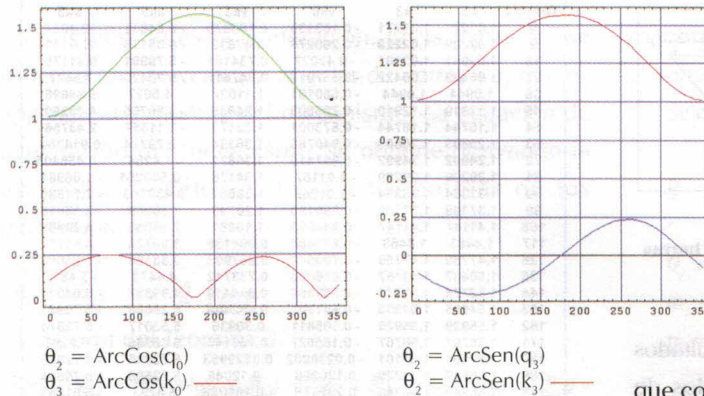


Fig. 8. Variación de los parámetros de posición θ_2, θ_3 , en grados.

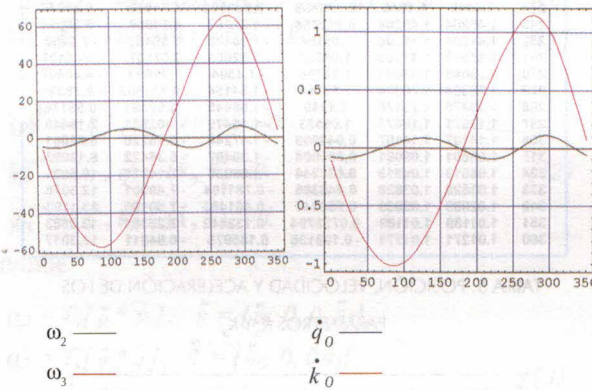


Fig. 9. Velocidad angular de los eslabones 3, 4 y los parámetros

$$\dot{q}_0, \dot{q}_3, \dot{k}_0, \dot{k}_3$$

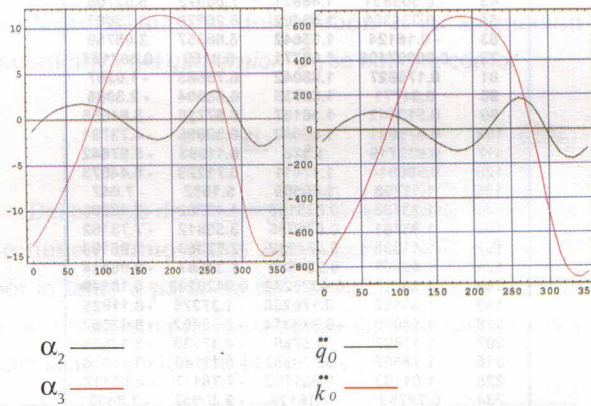


Fig. 10. Aceleración angular de los eslabones 3, 4 y los parámetros

$$\ddot{q}_0, \ddot{q}_3, \ddot{k}_0, \ddot{k}_3$$

3. Conclusiones

La modelación con *quaterniones*, representa una alternativa para desarrollar modelos de manera sencilla, pero rigurosa. Además, para resolver los problemas cinemáticos de sistemas mecánicos en general y en particular mecanismos. Donde las soluciones, se enfocan en obtener los parámetros de los *quaterniones* que representan las rotaciones de los eslabones.

En la *modelación no deformada*, se obtiene un sistema cuadrado de ecuaciones que, se puede considerar mínimo utilizando *quaterniones*. Este sistema tiene una relación directa con los parámetros angulares (q 's), como lo muestran las gráficas de los valores obtenidos. Ya que el mecanismo del telar involucra *posición, velocidad y aceleración*, su solución en forma conjunta resulta rápida,

ésto se logra por el número de operaciones que considera cada sistema. Su principal ventaja radica en la simplicidad para expresar los movimientos de rotación, ya que no existe la composición de rotaciones que redundaría en una claridad de las ecuaciones de movimiento.

Se enfrentó y superó las dificultades de desarrollar un modelo en un problema real, las gráficas finales, es una prueba de ello, se observan soluciones directas que permiten comprobar que se desarrolló un análisis cinemático completo de cada uno de los elementos que componen el mecanismo del telar, en su configuración *no deformada*.

4. Bibliografía

- [1] L. NORTON, R. 1999 «Diseño de máquinas». Prentice Hall, México.
- [2] W. R. HAMILTON 1853 Lectures on quaternions. Dublin: Hodges and Smith.
- [3] _____ 1969 Elements of quaternions, 3rd ed. New York: Chelsea.
- [4] REYES, ÁVILA. L. 1990 "Quaternions: Une Representation Parametrique Systematique Des Rotations Finies".Partie 1: Le Cadre Theorique. INRIA, Rocquencourt, France.
- [5] REYES, A. L. 1990 Partie 2: Quelques Applications. Rapport de Recherche Inria - Rocquencourt, France.
- [6] REYES A. LUIS. MÁRQUEZ M. M 1996 "Mathematical and computational modeling of multiple rigid bodies of kinematic using quaternions". "The 5th Mechatronics Forum International conference Mechatronic '96. Universidade do Minho, Guimaras, Portugal.
- [7] Márquez, M. M.

- 1998 "Modelado cinemático de n cuerpos rígidos utilizando cuaterniones". Primera edición. Universidad Anáhuac del Sur. ISBN 968-6402-23-3
- [8] MÁRQUEZ, M. M.
1998 «Comparación entre las Soluciones Numérica y Simbólica de la Cinemática inversa de un Robot de dos grados de libertad». Primera edición. Universidad Anáhuac del Sur. ISBN 968-6402-25-X.
- [9] SALINAS PÉREZ I.
1999 «Modelado cinemático de un mecanismo de cuatro barras.». Primera edición. Universidad Anáhuac del Sur. ISBN 968-6402-45-4.
- [10] MÁRQUEZ, M. M.
1999 «Solución de la cinemática inversa del robot PUMA 560 mediante cuaterniones». Primera edición. Universidad Anáhuac del Sur. ISBN 968-6402-12-8.
- [11] MÁRQUEZ M. M.
1995 «Modelado cinemático de sistemas mecánicos de cadena abierta». Tesis de grado de maestro en ingeniería . UNAM.
- [12] WOLFRAM, S.
1999 «*Mathematica: A System for Doing mathematic by Computer*». Adison - Wesley Publishing Co., Redwood City, California.