

## Ensayos

# Probabilidad de ruina en el modelo clásico de *Cramer-Lundberg*

### Resumen

En este artículo se exponen métodos para obtener fórmulas exactas y aproximadas para la probabilidad de ruina de una compañía de seguros en el caso cuando el capital de la compañía se modela con el proceso clásico de riesgo (o proceso de *Cramer-Lundberg*). Se supone también que las distribuciones del tamaño de los reclamos son de cola ligera. Se aplican estos métodos a casos particulares, cuando las distribuciones de los reclamos son mezclas de exponenciales y cuando son gamma, para obtener resultados numéricos. Además, se realizan simulaciones de las trayectorias del proceso de riesgo en estos casos, y en el caso de la distribución exponencial, variando el capital inicial de la compañía.

### Abstract

This paper presents methods for obtaining exact and approximate formulae for bankruptcy risk of an insurance company by using the classical Cramer-Lundberg risk process as a model for the surplus of the company. Consideration is given to cases in which claims have mild consequences. As an illustration, the above methods are applied where the claim distributions are gamma and a mixture of exponential distributions. The paper provides simulations of the trajectories of risk processes in these cases for different levels of starting capital.

### Résumé

Résumé. Dans cet article, on expose des méthodes pour obtenir des formules exactes et approximatives pour la probabilité de ruine d'une compagnie d'assurance dans le cas où le capital de la compagnie se forme sur le processus classique de risque (ou processus de Cramer-Lundberg). On suppose aussi que les distributions de taille des réclamations sont en queue légère. On applique ces méthodes à des cas particuliers, quand les distributions des réclamations sont des mélanges d'exponentielles et quand elles sont gamma, afin d'obtenir des résultats numériques. En plus, on réalise des simulations des trajectoires des processus de risque dans ces cas, et dans le cas de la distribution exponentielle, en variant le capital initial de la compagnie.

- \* Jiménez Hernández José del Carmen
- \* \* Ekaterina Todorova Kolkovska y Alma Delia Maldonado Santiago

### Palabras clave:

Aproximación de *Cramer-Lundberg*, fórmula recursiva de Panjer, proceso de riesgo, simulación, transformada de Laplace.

## Introducción

La noción de riesgo es un concepto importante en la economía, debido a que es necesario contar con estrategias y métodos para el buen manejo del capital de las compañías aseguradoras, bancos y otras instituciones públicas y privadas. Nuestro interés en este trabajo estará particularmente centrado en el riesgo actuarial que es estudiar la incertidumbre que existe en las compañías aseguradoras sobre si éstas son capaces de cumplir con sus obligaciones, es decir si en algún momento la compañía no pueda pagar alguna de las reclamaciones que se le presentan.

Específicamente, la teoría de riesgo se ha centrado en estudiar las fluctuaciones de las reservas de una compañía aseguradora y de estimar las posibilidades de ruina de dicha aseguradora, es

\* Universidad Tecnológica de la Mixteca

\*\* Centro de Investigación en Matemáticas

decir la probabilidad de que la reserva puede ser negativa en algún momento. Esto se hace estudiando la dependencia de la ruina de los parámetros del proceso, tales como capital inicial, el número de reclamos y el tamaño de los reclamos, con el propósito de ponderar las consecuencias del riesgo de interés.

De manera general una compañía de seguros opera de la siguiente manera: un grupo de personas que está expuesto a un tipo determinado de accidentes, tales como choques de automóviles, incendios, robos etc., contrata un seguro donde cada una de estas personas paga una cantidad fija de dinero por unidad de tiempo, llamada prima a la compañía aseguradora. Ésta a su vez tiene la obligación de pagar al asegurado el monto total del daño en caso de accidente, en el momento en que este ocurre. Por lo tanto aunque no se conozca con certeza cuantas personas requerirán de la protección de la compañía, ni el tamaño total de los daños que ocurrirán, el capital obtenido de las primas colectadas más el capital inicial de la compañía deben ser suficientes para solventar los gastos que se presenten.

Sin duda una de las preguntas de mayor interés para la compañía aseguradora es la siguiente: ¿Hasta qué punto la compañía aseguradora puede solventarse?

Es decir, ¿cuál es la probabilidad de que la compañía se va a arruinar en tiempo finito, o en un intervalo dado de tiempo? Esta interrogante ha hecho que se desarrollen varios modelos matemáticos que reflejan las características más importantes de la realidad de las compañías. Aquí consideramos el modelo más común en aplicaciones reales.

### Modelo clásico de Cramer-Lundberg

Para poder definir el modelo clásico de riesgo se tienen en cuenta varios aspectos tales como el capital inicial de la compañía, el monto que se recibe por unidad de tiempo, el tamaño y el número de reclamos que llegan a la compañía en determinado momento.

Supóngase que se tiene una compañía de seguros, con un capital inicial  $u \geq 0$ , y que llegan reclamaciones en tiempos aleatorios  $W_1, W_2, \dots$ , de acuerdo a un proceso de Poisson homogéneo  $\{N(t): t > 0\}$  de intensidad  $\lambda > 0$ . Esto significa

que los tiempos entre las llegadas de los eventos son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución común exponencial. Supóngase también que los tamaños de las reclamaciones  $Z_1, Z_2, \dots$ , son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con una cierta distribución común  $F$ , con  $F(0) = 0$  y media  $E(Z_k) = \mu > 0$ . Además la compañía recibe de sus asegurados una prima constante  $c > 0$  por unidad de tiempo. Si se denota con  $X(t)$ , el capital de la compañía al tiempo  $t$ , entonces

$$X(t) = u + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Z_k. \quad (1)$$

Aquí por definición  $\sum_{k=1}^0 Z_k = 0$  y  $N(t)$  es el número de reclamaciones que llegan a la compañía en el intervalo  $(0, t]$ .  $X(t)$  se llama modelo clásico de riesgo, o modelo de Cramer-Lundberg.

La Figura 1 muestra una trayectoria del modelo clásico de riesgo empezando con un capital inicial  $u$ . Al inicio  $X(t)$  va creciendo, porque recibe las primas de sus asegurados, pero al recibir las primeras reclamaciones,  $X(t)$  decrece, debido al desembolso de dinero que la compañía tiene que hacer, para responder las reclamaciones de sus clientes. Al término del primer periodo,  $X(t)$  empieza a crecer nuevamente, posteriormente recibe reclamaciones de sus asegurados y el capital de la compañía decrece, y así sucesivamente.

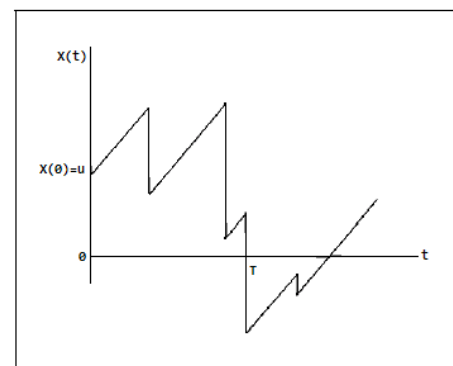


FIGURA 1. TRAYECTORIA DEL MODELO DE RIESGO.

1. El capital de la compañía en el instante  $t$ , es igual al capital inicial más la suma de todas las primas recolectadas por parte de sus asegurados en ese periodo de tiempo, menos la suma de todas las reclamaciones hechas por sus asegurados, es decir se descuentan los desembolsos que hizo la compañía a causa de los siniestros ocurridos en ese tiempo.

Se dice que una compañía aseguradora está en ruina cuando para algún  $t \geq 0$ ,  $X(t)$  se encuentra por debajo de cero y el momento de ruina está dado por:

$$T = \min \{t \geq 0 : X(t) < 0\},$$

si  $X(t) < 0$  para algún tiempo  $t$  finito, y  $T = \infty$

si  $X(t) \geq 0$  para todo  $t$ .

Cabe mencionar que aunque el estado de ruina haya llegado, esto no significa que la compañía vaya a quebrar, dado que en muchos casos la compañía sigue trabajando con capital prestado esperando que se recobre en el futuro. Claramente resulta de interés saber en qué momento sucederá la ruina y que probabilidad existe de que se llegue a este estado en tiempo finito.

Si se denota por  $\varphi(u)$  la probabilidad de ruina de la compañía aseguradora, empezando con capital inicial  $u$ , entonces

$$\varphi(u) = P(X(t) < 0, \text{ para algún } t > 0 | X(0) = u).$$

La probabilidad de no ruina o de supervivencia de la compañía será denotada por  $\phi(u)$  y por lo tanto,

$$\phi(u) = 1 - \varphi(u).$$

No existen expresiones explícitas para la probabilidad de ruina, salvo en pocos casos conocidos, por lo cual es importante encontrar fórmulas aproximadas

Si se supone que  $u = 0$  y usando la independencia entre  $N(t)$  y  $\{Z_1, Z_2, \dots\}$ , se deduce que,

$$E[X(t)] = t(c - \lambda\mu) \geq 0,$$

Por lo tanto se supondrá de ahora en adelante que,

$$c > \lambda\mu. \quad (1)$$

Esto es debido a que en caso contrario se tendría que  $\varphi(u) = 1$  para todo  $u \geq 0$ . (Rolski, et al. 1999). Este supuesto es natural porque indica que la prima que recibe la compañía por unidad de tiempo debe ser mayor que el número de

reclamos por unidad de tiempo multiplicado por el valor esperado de cada uno.

Definición 1. La carga de seguridad de la compañía, denotada por  $\rho$ , se define como

$$\rho = \frac{c - \lambda\mu}{\lambda\mu} > 0.$$

Esta condición es necesaria para asegurar la solvencia de la compañía por la observación anterior.

## Aproximaciones de la probabilidad de ruina.

### a) Aproximación de Cramer-Lundberg

Definición 2. Se define la función  $h$ :

$$h(r) = \int_0^{\infty} \exp(rz) dF(z) - 1,$$

se asume que existe  $0 < r_{\infty} \leq \infty$

tal que  $h(r) \uparrow +\infty$  cuando  $r \uparrow r_{\infty}$ .

Lo anterior significa que para algún  $r > 0$ , la función generadora de momentos de  $Z$  es finita, lo cual implica que  $F$  es de cola ligera (Rolski, et al. 1999). Esto significa que  $1 - F(x) < a \exp(-bx)$  para todo  $x > 0$  y algunas constantes  $a, b > 0$  fijas, es decir la cola de  $F$  decrece más rápido que una función exponencial.

Además suponemos que existe una constante  $R > 0$ , tal que:

$$\frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} \exp(Rz) [1 - F(z)] dz = 1.$$

Cuando esta constante existe es única y se llama coeficiente de ajuste. Por lo tanto  $R$  existe sólo para procesos de riesgo con reclamaciones de cola ligera, y todos los casos de procesos que vamos a considerar son de este tipo.

Teorema 1. Cuando el coeficiente de ajuste  $R$  existe, se tiene la aproximación de Cramer-Lundberg:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \exp(Ru) \varphi(u) = \frac{\rho\mu}{h'(R) - \frac{c}{\lambda}}.$$

De aquí se sigue que para  $u$  grande,

$$\varphi(u) \approx \frac{\rho\mu}{h'(R) - \frac{c}{\lambda}} \exp(-Ru). \quad (2)$$

Nótese que se puede controlar  $\varphi(u)$  a través de las constantes  $c$ ,  $R$  y  $u$ .

Como consecuencia de (2) la probabilidad de ruina en los procesos de riesgo para los cuales existe  $R$ , decrece exponencialmente como función del capital inicial  $u$ , lo cual significa que la probabilidad de ruina es muy pequeña.

Observemos también que de (2) se deduce,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) = 0.$$

Este hecho se comprobaba en los resultados numéricos que se exponen al final del trabajo.

**Teorema 2.** (Desigualdad de *Cramer-Lundberg*). Cuando existe el coeficiente de ajuste  $R$ , para todo  $u \geq 0$  se cumple la desigualdad,

$$\varphi(u) < \exp(-Ru).$$

Debido a la desigualdad anterior,  $R$  se puede considerar una medida de riesgo para la compañía de seguros cuanto más grande es  $R$ , mas pequeña es la probabilidad de ruina.

### b) Cálculo exacto de la probabilidad de ruina vía transformadas de Laplace.

**Definición 3.** La transformada de Laplace,  $L_a(s)$ , de una función real no negativa  $a(x)$  se define por medio de

$$L_a(s) = \int_0^{\infty} \exp(-sx) a(x) dx.$$

La transformada de Laplace de una función determina de una única manera a la función.

**Teorema 3.** Las transformadas de Laplace para  $\phi(u)$  y  $\varphi(u)$  denotadas por  $L_{\phi(u)}(s)$  y  $L_{\varphi(u)}(s)$

son

$$\begin{aligned} L_{\phi(u)}(s) &= \frac{c - \lambda\mu}{cs - \lambda(1 - l_F(s))}, \quad s > 0, \\ L_{\varphi(u)}(s) &= \frac{1}{s} - \frac{c - \lambda\mu}{cs - \lambda(1 - l_F(s))}, \quad s > 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{donde } l_F(s) = \int_0^{\infty} \exp(-sy) dF(y).$$

Nótese que en los casos cuando se puede calcular la inversa de la transformada de Laplace, se obtiene una fórmula exacta para la probabilidad de ruina.

### c) Fórmula de Pollaczek-Khinchin

**Definición 4.** Sea  $Z$  una variable aleatoria no negativa con función de distribución  $F$ . Entonces la cola integrada de  $F$ , denotada por  $F_Z^s(y)$ , se define como,

$$F_Z^s(y) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} \int_0^x [1 - F_Z(y)] dy & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{o.c.} \end{cases}$$

**Teorema 4.** (Fórmula de *Pollaczek-Khinchin*). Para todo  $u \geq 0$ ,

$$\phi(u) = \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n (F_Z^s)^{*n}(u). \quad (4)$$

La serie infinita dada en (4) es difícil de usarse directamente, debido a la dificultad que conlleva su cálculo. Sin embargo se usa ampliamente para calcular aproximaciones de probabilidades de ruina. Primero observemos que  $1 - \varphi(u)$  es la distribución de una variable aleatoria geométrica

compuesta con parámetros  $\left(\frac{\lambda\mu}{c}, F_Z^s\right)$ .

En efecto sea  $N$  es una variable aleatoria

geométrica de parámetro  $p = \frac{\lambda\mu}{c}$  y  $X = \sum_{i=1}^N Z_i$ ,

tal que  $Z_1, Z_2, \dots$ , son variables aleatorias independientes con distribución  $F_Z^s$ , entonces:

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X \leq x | N = n) p(1-p)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p(1-p)^n F_Z^{*n}. \end{aligned}$$

Reemplazando  $F_Z$  por  $F_Z^s$ , se obtiene la formula (4).

De (4) se obtiene también que

$$1 - \varphi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n (F_Z^s)^{*n}(u).$$

Esta fórmula será usada mas abajo para obtener aproximaciones de las probabilidades de ruina usando el algoritmo de *Panjer*.

#### d) Fórmula recursiva de *Panjer*

Calcular o aproximar la función de distribución del número de reclamos acumulados en un intervalo de tiempo dado, ha sido uno de los puntos centrales en matemática de seguros.

Algunos ejemplos para la distribución del número de reclamos de procesos de riesgo en un intervalo de tiempo dado son:

- i) La distribución de *Poisson*. El proceso de riesgo clásico de *Cramer-Lundberg* supone que los reclamos se distribuyen de acuerdo a un proceso de *Poisson*.
- ii) La distribución binomial negativa o distribución de Pascal.
- iii) La distribución binomial.
- iv) La distribución geométrica.

Estas distribuciones de probabilidad cumplen la relación recursiva de *Panjer*:

$$p_k = P(X = k) = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}, \quad k=1, \dots, (5)$$

donde  $a < 1$  y  $b \in \mathbb{R}$  son constantes fijas.

Considérese la variable aleatoria compuesta

$$X = \sum_{i=1}^N Z_i,$$

donde  $Z_1, Z_2, \dots$ , son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas y  $N$  es una variable discreta no-negativa; se asume también que la sucesión  $Z_1, Z_2, \dots$ , es independiente del número de reclamos  $N$ . Se asume que los  $Z_i$  y  $N$  toman valores en  $\{0, 1, 2, \dots\}$ . Se denotará por  $q_k$  la distribución de probabilidad de  $Z_1, Z_2, \dots$ , y la distribución del número de reclamos por  $p_k$ .

El siguiente teorema muestra una fórmula recursiva para calcular la distribución de probabilidad  $r_j = P(X = j)$  de la variable aleatoria compuesta  $X = \sum_{i=1}^N Z_i$ , cuando la distribución de probabilidad de  $N$  satisface la relación de *Panjer*. Ésta fórmula recursiva se llama el algoritmo de *Panjer*.

Teorema 4. Sea  $X = \sum_{i=1}^N Z_i$ , y supóngase que la distribución de probabilidad de  $N$  satisface (5). Entonces,

$$r_j = \begin{cases} g_N(q_0) & j = 0 \\ (1 - aq_0)^{-1} \sum_{k=1}^j (a + bkj^{-1}) q_k r_{j-k} & j = 1, \dots, \end{cases}$$

donde  $g_N$  es la función generadora de probabilidades de  $N$ .

### Cálculos numéricos aproximados y exactos de la probabilidad de ruina en casos particulares

En los cálculos de abajo aplicaremos los teoremas anteriores en varios casos concretos de distribuciones de los reclamos.

#### a) Reclamos que son mezcla de exponenciales

A continuación se hará el cálculo de la probabilidad de ruina utilizando el método de la transformada de *Laplace*, el algoritmo de *Panjer* y la aproximación de *Cramer-Lundberg*, considerando que los reclamos tienen distribución de probabilidad que es mezcla de exponenciales. Para este caso, se supondrá que tanto el capital inicial como la intensidad del proceso de *Poisson*, asociado al número de reclamos es una unidad monetaria, es decir,  $c = \lambda = 1$ , y que la función de distribución  $F_Z(x)$  del tamaño de los reclamos está dada por:

$$F_Z(x) = 1 - \frac{1}{3} [\exp(-2x) + \exp(-3x) + \exp(-4x)].$$

Obsérvese que  $F_Z(x)$  es mezcla de distribuciones exponenciales. Entonces, la media está dada por,

$$\mu = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{13}{36}.$$

Usando (3) se tiene que,

$$L_{\varphi}(s) = \frac{\frac{13}{36}s^2 + \frac{9}{4}s + \frac{61}{18}}{s^3 + 8s^2 + 20s + \frac{46}{3}}$$

Debido que en este caso la transformada de Laplace es un cociente de polinomios, se puede descomponer en suma de fracciones elementales, y obteniendo su inversa resulta,

$$\varphi(u) = 0.2955 \exp(-1.48u) + 0.0454 \exp(-2.72u) + 0.0201 \exp(-3.79u).$$

La expresión anterior muestra la fórmula exacta de la probabilidad de ruina. En general, no siempre es posible aplicar este método, puesto que se necesita calcular explícitamente la inversa de la transformada de Laplace.

Mientras que, usando (2) la aproximación de Cramer-Lundberg esta dada por,

$$\varphi_{C-L}(u) = 0.3030 \exp(-1.4849u).$$

Ahora vamos a usar el algoritmo de Panjer combinado con la fórmula de Pollaczek-Khinchin. Para aplicar esta última, discretizamos la función de cola integrada  $F_Z^s$ : se divide el intervalo  $[0, \infty)$  en

subintervalos de longitud  $\frac{1}{1000}$  y se aproxima  $F_Z^s$

sobre los intervalos  $\left[\frac{k}{1000}, \frac{k+1}{1000}\right)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,

con una distribución  $q_k$  de una variable aleatoria discreta  $Y$ , donde

$$q_k = P\left(Y = \frac{k}{1000}\right) = F_Z^s\left(\frac{k+1}{1000}\right) - F_Z^s\left(\frac{k}{1000}\right), \quad k = 0, 1, \dots$$

En la Tabla 2 se muestran los cálculos numéricos que se obtuvieron para las dos aproximaciones de la probabilidad de ruina: la aproximación de

Cramer-Lundberg,  $\varphi_{C-L}(u)$  y usando el algoritmo de Panjer  $\varphi_{Panjer}(u)$ , así como usando la fórmula exacta  $\varphi(u)$ ; empleando distintos capitales iniciales. Se muestran también los errores relativos para  $\varphi_{C-L}(u)$  y para  $\varphi_{Panjer}(u)$ , denotados por  $Error_{C-L}$  y  $Error_{Panjer}$ , respectivamente, los cuales están dados por

$$Error_{C-L} = \frac{\varphi_{C-L}(u) - \varphi(u)}{\varphi(u)} * 100$$

y

$$Error_{Panjer} = \frac{\varphi_{Panjer}(u) - \varphi(u)}{\varphi(u)} * 100.$$

$u$	$\varphi_{Panjer}(u)$	$\varphi(u)$	$\varphi_{C-L}(u)$	$Error_{Panjer}$	$Error_{C-L}$
0	0.3604	0.3611	0.3030	-0.1768	-16.08
0.25	0.2342	0.2346	0.2090	-0.1890	-10.92
0.5	0.1550	0.1553	0.1442	-0.2018	-7.14
0.75	0.1038	0.1041	0.0995	-0.2148	-4.42
1	0.0702	0.0703	0.0686	-0.2280	-2.46
1.25	0.0477	0.0478	0.0473	-0.2411	-1.06
1.5	0.0326	0.0326	0.0326	-0.2542	-0.0601
1.75	0.0223	0.0223	0.0225	-0.2672	0.6636
2	0.0153	0.0153	0.0155	-0.2802	1.18

TABLA 2. PROBABILIDAD DE RUINA PARA EL CASO MEZCLA DE EXPONENCIALES.

Obsérvese que en la Tabla 2, el algoritmo de Panjer proporciona en general mejores aproximaciones que el método de Cramer-Lundberg. Se aprecia también que cuanto mayor es el capital inicial, las aproximaciones de Panjer y la de Cramer-Lundberg se aproximan mucho a la probabilidad de ruina exacta.

En efecto, como lo muestra la Figura 3, la línea que representa la aproximación de Panjer, está relativamente cerca de la línea que representa la probabilidad de ruina exacta.

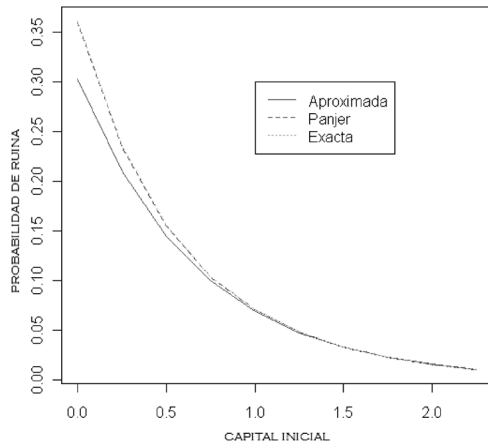


FIGURA 3. GRÁFICA COMPARATIVA.

Podemos comprobar también que se cumple la desigualdad de *Lundberg*: cuanto mayor es el capital inicial, mas pequeña es la probabilidad de ruina. En este caso la probabilidad de ruina es muy pequeña, debido a que las reclamaciones son de cola ligera.

El error relativo calculado permite conocer el comportamiento de las aproximaciones a lo largo de los distintos parámetros del modelo y evaluar su optimalidad.

En la Figura 4, se muestra el comportamiento del error relativo, se puede observar que el error para la aproximación de *Cramer-Lundberg* en valor absoluto disminuye lo que implica que las aproximaciones son buenas, mientras que el error de la fórmula de *Panjer* permanece cerca de cero.

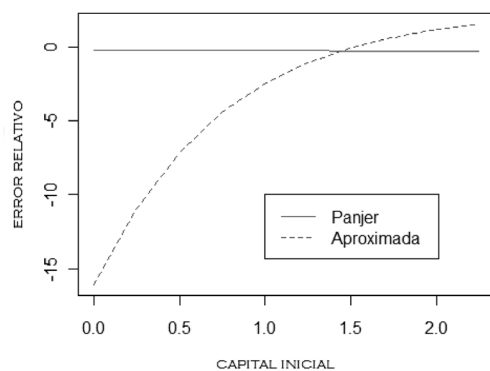


FIGURA 4. ERROR RELATIVO.

### b) Reclamos que se distribuyen de acuerdo con una distribución gamma.

Otro tipo de variable aleatoria que tiene la propiedad de que su función de distribución acumulada es

de cola ligera, es la distribución gamma. Para esta distribución no es posible calcular directamente la inversa de la transformada de *Laplace* de la probabilidad de ruina, así que solamente se harán aproximaciones de las probabilidades de ruina, por medio del algoritmo de *Panjer* y usando la aproximación de *Cramer-Lundberg*.

Se asume en este caso que la intensidad del proceso de *Poisson* y la prima por unidad de tiempo son  $c = \lambda = 1$ , respectivamente, además de que los tamaños de los reclamos tienen una distribución gamma con parámetros  $(2, 1)$ . Entonces,

$$F_Z(x) = 1 - [\exp(-x) + x \exp(-x)], \quad x \geq 0,$$

con  $\mu = 2$ , luego su función de cola integrada está dada por

$$F_Z^s(x) = \frac{1}{2} [2 - \exp(-x)(x + 2)], \quad x > 0.$$

Se aplicó el algoritmo de *Panjer* a  $F_Z^s$ , bajo la misma discretización definida en el caso anterior.

Usando (2), la aproximación de *Cramer-Lundberg*, es

$$\varphi_{C-L}(u) = 0.7031 \exp(-0.2824u).$$

La Tabla 5 presenta los resultados obtenidos. Se observa en general que la probabilidad de ruina es más grande que la probabilidad de ruina del ejemplo anterior. La aproximación de *Cramer-Lundberg* decrece más rápido que los resultados obtenidos mediante el algoritmo de *Panjer*.

$u$	$\varphi_{Panjer}(u)$	$\varphi_{C-L}(u)$
0	0.6665	0.7031
0.25	0.6378	0.6552
0.5	0.6080	0.6105
0.75	0.5780	0.5689
1	0.5484	0.5301
1.25	0.5196	0.4940
1.5	0.4917	0.4603
1.75	0.4650	0.4289
2	0.4395	0.3997

TABLA 5. PROBABILIDAD DE RUINA PARA EL CASO GAMMA.

En general, en la Tabla 5 se observa que las probabilidades de ruina en el caso cuando se tenga contemplada una distribución tipo gamma, son mayores que en el caso de la distribución mezcla de exponenciales (Tabla 2). Cuando se empieza sin capital inicial, es decir, sólo con lo recolectado de las primas, la probabilidad de ruina es más de 0.5, al igual que en el caso anterior, entre mayor sea el capital inicial invertido menor será la probabilidad de ruina que se tenga. Cabe recalcar que la probabilidad de ruina disminuye más lentamente comparada con la probabilidad de ruina de la Tabla 2.

## Simulaciones

Las simulaciones se desarrollan con el objetivo de obtener realizaciones concretas del sistema, con el propósito de predecir ciertos aspectos del comportamiento de lo que se esté analizando. Se usó el lenguaje de programación *R* para la programación.

### a) Caso exponencial y mezcla de exponenciales

Se supone que los tamaños de las reclamaciones se distribuyen exponencialmente con parámetros  $\lambda = 0.9$ ,  $c = 1$  y  $\mu = 1$ , y el número de periodos de tiempo que se aplicaron en la simulación fue  $n = 50$ .

Considerando un capital inicial  $u = 0$ , las trayectorias simuladas correspondientes al proceso de riesgo se muestran en la Figura 6, en la cual se puede observar que dado que no se invirtió capital inicial, la mitad de las trayectorias simuladas están por debajo del cero.

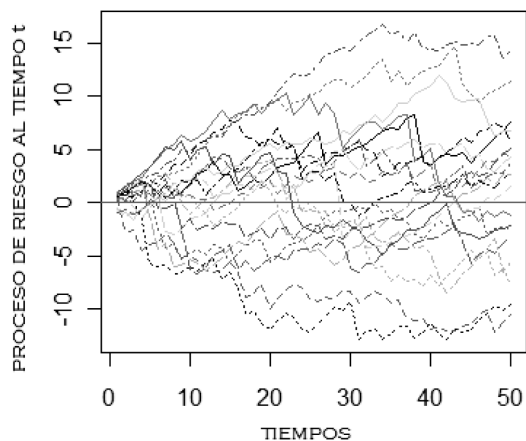


FIGURA 6. SIMULACIÓN, RECLAMOS EXPONENCIAL Y  $u = 0$ .

Con un capital inicial de 8 unidades, las simulaciones obtenidas se muestran en la Figura 7, se observa que al invertirse un mayor capital inicial, las trayectorias resultantes en su mayoría se encuentran por arriba del cero.

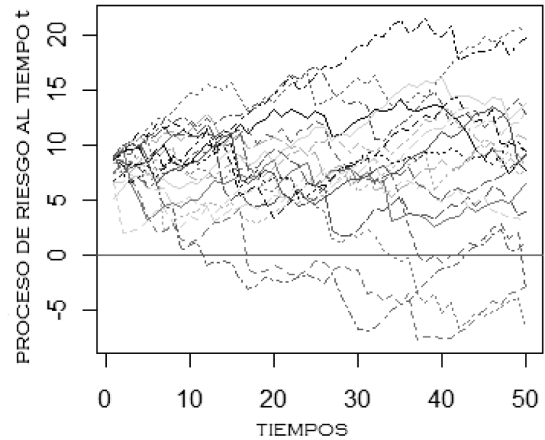


FIGURA 7. SIMULACIÓN, RECLAMOS EXPONENCIAL Y  $u = 8$ .

Las Figuras 8 y 9 muestran las simulaciones obtenidas con los mismos parámetros usados en el caso de que los reclamos tienen distribución mezcla de exponenciales, es decir,

$$\mu = \frac{13}{36}, \quad c = \lambda = 1,$$

asumiendo que  $u = 0$  y  $u = 2$ , respectivamente. Obsérvese que las trayectorias del proceso de riesgo tienen una pendiente creciente a lo largo del tiempo y se encuentran por arriba del cero.

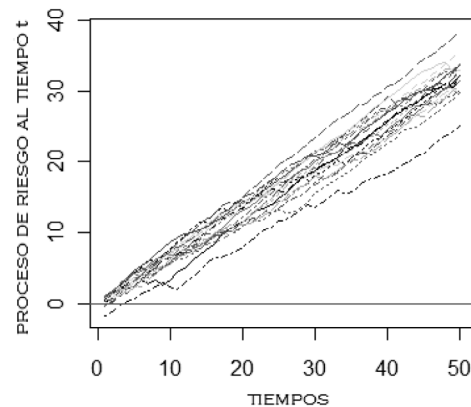


FIGURA 8. SIMULACIÓN RECLAMOS MEZCLA DE EXPONENCIALES  $u = 0$ .



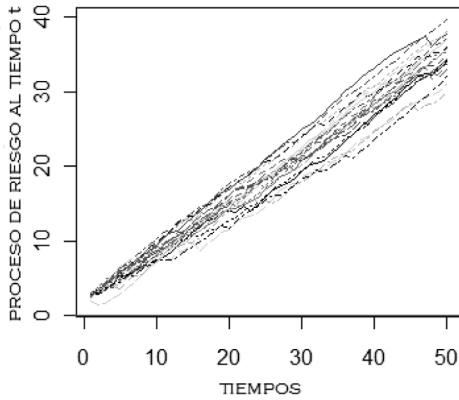


FIGURA 9. SIMULACIÓN RECLAMOS MEZCLA DE EXPONENCIALES  $u = 2$ .

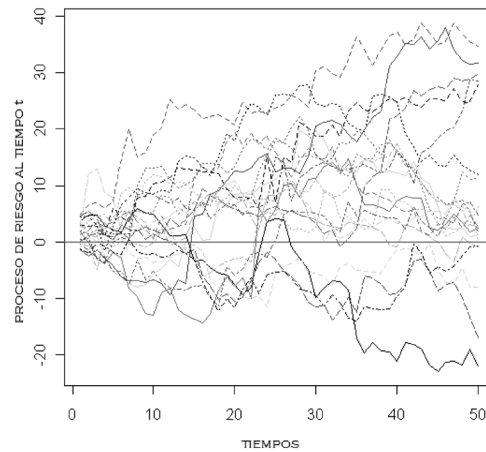


FIGURA 11. SIMULACIONES RECLAMOS GAMMA  $u = 2.25$ .

### b) Caso gamma

En las simulaciones mostradas a continuación se supone que el tamaño de los reclamos se distribuye de acuerdo a una distribución gamma con parámetros  $(2,1)$ , con  $\mu = 1$ ,  $\lambda = 1$  y  $c = 2$  unidades.

Con capital inicial igual a 1 unidad, en la Figura 10 se ven los procesos de riesgo simulados, se observa que la mitad de las trayectorias obtenidas para un tiempo de 30 periodos se encuentran por arriba del cero.

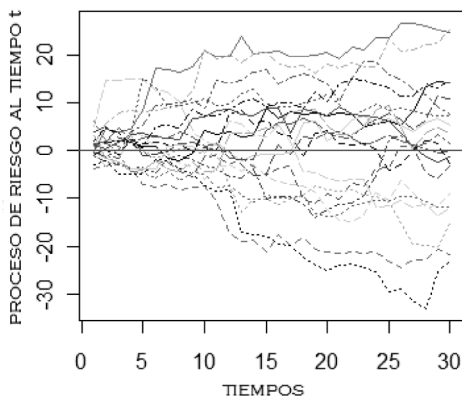


FIGURA 10. SIMULACIONES RECLAMOS GAMMA  $u = 1$ .


Ahora con un capital inicial de 2.25 unidades, las simulaciones obtenidas se muestran en la Figura 11. Se observa que la mayoría de los procesos de riesgo que simulan el comportamiento de la compañías se encuentran por arriba del cero, al igual que en el caso anterior.

Aunque en general no se puede decir con certeza a partir de las trayectorias simuladas cual será la probabilidad de ruina, éstas proporcionan un panorama general del comportamiento de los procesos de riesgo.

### Conclusiones

La incertidumbre a la que las compañías de seguros se enfrentan es de gran interés dentro del área de probabilidad, motivo por el cual en este trabajo se mostraron métodos aproximados y exactos para calcular la probabilidad de ruina de una compañía de seguros, para el caso cuando las distribuciones de los tamaños de los reclamos son de cola ligera. Se aplicaron estos métodos a casos particulares de distribuciones mezcla de exponenciales y gamma. Para el primer caso invirtiendo la transformada de Laplace fue posible encontrar de la fórmula exacta de la probabilidad de ruina, lo cual permitió hacer comparaciones con los resultados de aproximación obtenidos por medio del algoritmo de Panjer y la aproximación de Cramer-Lundberg. Se pudo observar que la aproximación de Panjer dio mejores resultados que la aproximación de Cramer-Lundberg. Para el caso gamma debido a que no es posible obtener una fórmula exacta usando directamente el método de inversión de la transformada de Laplace, se obtuvieron aproximaciones para la probabilidad de ruina por ambos métodos considerados (Panjer y Cramer-Lundberg).

Se hicieron simulaciones de trayectorias del proceso de riesgo en ambos casos particulares considerados, las cuales muestran realizaciones del proceso cuando variamos los parámetros. Una de las ventajas de las simulaciones es que permiten observar realizaciones del comportamiento general del capital de la compañía de seguros a lo largo del tiempo, y en base a ellas se pueden comprobar algunos resultados teóricos que tenemos.

Finalmente cabe mencionar que a pesar de que el modelo usado en este trabajo, no toma en cuenta muchos aspectos reales en cuanto al funcionamiento de una aseguradora, sirve como modelo de estudio básico en la matemática actuarial. 

## Referencias bibliográficas

Asmussen, Soren

2000 Ruin Probabilities. Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability. Vol 2. World Scientific. 385p.

Dickon, David C. M.

2006 Insurance Risk and Ruin. International Series on Actuarial Science. Cambridge University Press. 229p.

Grandell, Jan.

1991 Aspects of Risk Theory. Springer-Verlang.

Rincon, Luis

2010 Introducción a la Teoría de Riesgo. UNAM. 102p.

R Development Core Team, R

2011 A Language and Environment for Statistical Computing. R Foundation for Statistical Computing. Vienna, Australia, URL <http://www.R-project.org>.

Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V., Teugels, J.

1999 Stochastic Processes for Insurance and Finance. John Wiley & Sons. 654.

Sheldom, M. ROSS

2002 Simulations. Academic Press.